VERHANDELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN

EERSTE SECTIE

(Wiskunde - Natuurkunde - Scheikunde - Kristallenleer - Sterrenkunde - Weerkunde en Ingenieurswetenschappen.)

DEEL XII

Met 16 platen en 2 tabellen.

AMSTERDAM — JOHANNES MÜLLER
1915—1919

California Academy of Sciences

RECEIVED BY EXCHANGE

APR 14 1922

VERHANDELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN

EERSTE SECTIE

(Wiskunde - Natuurkunde - Scheikunde - Kristallenleer - Sterrenkunde - Weerkunde en Ingenieurswetenschappen.)

DEEL XII

Met 16 platen en 2 tabellen.

AMSTERDAM — JOHANNES MÜLLER
1915—1919

Gedrukt bij Joh. Enschedé en Zonen. — Haarlem.

INHOUD.

1. S. L. VAN OSS. Die regelmässigen vierdimensionalen Polytope höherer Art. (Mit 6 Tafeln).
   (Verschenen October 1915).
2. P. H. SCHOUTE. Analytical treatment of the polytopes regularly derived from the regular polytopes, published by J. CARDINAAL.
   (Verschenen April 1916).
3. B. P. MOORS. Suite à l'„Étude sur les formules servant à calculer des valeurs approximatives d'une intégrale définie."
   (Verschenen Augustus 1917).
4. ALBERT P. MATHEWS. The value of a of VAN DER WAALS' equation and the nature of cohesion.
   Verschenen November 1917).
5. L. E. J. BROUWER. Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Erster Teil. Allgemeine Mengenlehre.
   (Verschenen Maart 1918).
6. J. A. SCHOUTEN. Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie.
   (Verschenen Februari 1919).
7. L. E. J. BROUWER. Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Zweiter Teil. Theorie der Punktmengen.
   (Verschenen Maart 1919).

DIE REGELMÄSSIGEN VIERDIMENSIONALEN POLYTOPE HÖHERER ART

VON

S. L. VAN OSS.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

DEEL XII. N°. 1.

(Mit 6 Tafeln).

AMSTERDAM.

JOHANNES MÜLLER

October 1915.

DEC 1 1 1919

DIE REGELMÄSSIGEN VIERDIMENSIONALEN POLYTOPE HÖHERER ART

VON

S. L. VAN OSS.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

DEEL XII. N°. 1.

(Mit 6 Tafeln).

AMSTERDAM.

JOHANNES MÜLLER.

1915.

DIE REGELMÄSSIGEN VIERDIMENSIONALEN POLYTOPE HÖHERER ART.

VON

S. L. VAN OSS.

In einer früheren Arbeit (Das regelmässige Sechshundertzell u s.w. Verh. 1^e^ Sectie. VII n°. 1. 1899) habe ich die Konvexen Polytope mittels ihrer Projectionen auf die Ebenen und Räume eines orthogonalen Systems, abgebildet und so den Methoden der darstellenden Geometrie zugänglich gemacht. Hier soll diese Aufgabe für die Polytope höherer Art erledigt werden.

Nebenbei unternehme ich es die von Schläfli (Theorie der vielfachen Kontinuität) und von E. Hess (Polytope höherer Art. Marburger Sitzungsberichte Mai 1885) bestimmten Artzahlen an meinen Projectionen näher zu prüfen.

1. Allgemeine Theorie.

Wir bezeichnen die regelmässigen Polytope mit dem Schläflischen Symbole **m n p**.

Zum richtigen Verständnis dieses Symbols sei in Erinnerung gebracht, dass **m n** ein regelmässiges Polyeder bezeichnet, dessen n-seitige Grenzpolygone n an n in je einer Polyederecke zusammen stossen, und **m n p** ein Polytop dessen Grenzpolyeder **m n** sich p an p um je eine Kante lagern; weiter, dass das Symbol **m n p** auch zu deuten ist als die Angabe dass die in einer Polytopenecke zusammenkommenden **m n** dort ein Vielkant bilden, dessen Basis ein **n p**; schliesslich, dass mit $^5/_2$ ein sternartiges Fünfeck bezeichnet wird.

Wir stellen jetzt die beiden untenstehenden Tabelle zusammen.

	33	34	43	35	53	$3^5/_2$	$^5/_23$	$5^5/_2$	$^5/_25$
33	333		433		533		$^5/_235$		
43		343							
34	334		434		534		$^5/_234$		
53				353					$^5/_253$
35	335		435		535		$^5/_235$		
$^5/_23$						$3^5/_23$		$5^5/_23$	
$3^5/_2$	$33^5/_2$		$43^5/_2$		$53^5/_2$		$^5/_23^5/_2$		
$^5/_25$								$5^5/_25$	
$5^5/_2$				$35^5/_2$					$^5/_25^5/_2$

	33	34	43	35	53	$3^5/_2$	$^5/_2 3$	$5^5/_2$	$^5/_2 5$
33	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{10})$		1		$\frac{1}{4}(3-1\sqrt{5})\sqrt{2}$		$\frac{1}{4}(3+1\sqrt{5})\sqrt{2}$		
43		1							
34	$1+\sqrt{2}$		0		$i\sqrt{-1+1\sqrt{5}}$		$\frac{1}{2}\sqrt{1+1\sqrt{5}}$		
53				$\frac{i}{2}\sqrt{2+6\sqrt{5}}$					1
35	$\frac{1}{2}(-1+1\sqrt{5})$		$i\sqrt{1+1\sqrt{5}}$		$i\sqrt{1+2\sqrt{5}}$		$\frac{1}{2}(1+1\sqrt{5})$		
$^5/_2 3$						$\frac{1}{2}\sqrt{-2+6\sqrt{5}}$		1	
$3^5/_2$	$\frac{1}{2}(1+1\sqrt{5})$		$\frac{1}{2}\sqrt{-1+1\sqrt{5}}$		$\frac{1}{2}(-1+1\sqrt{5})$		$\sqrt{-1+2\sqrt{5}}$		
$^5/_2 5$						$\frac{1}{2}(1+1\sqrt{5})$		$\frac{1}{2}(-1+1\sqrt{5})$	
$5^5/_2$				$\frac{1}{2}(-1+1\sqrt{5})$					$\frac{1}{2}(1+1\sqrt{5})$

Die erste dieser Tabellen zeigt alle formell möglichen Fälle **m n p**. Die Anordnung der Symbole zeigt eine Symmetrie in welcher das Prinzip der Dualität zum Ausdruck kommt. Die Symbole **m n p** und **p n m** bezeichnen nämlich zwei zueinander reziproke Gebilde. Das in sich symmetrische Symbol **m n m** entspricht einer autoreziproken Figur.

Die zweite Tabelle zeigt für jedes **m n p** das leicht zu bestimmende Verhältnis $^{a}/_{R}$ von Kante und Radius. Einander entsprechende **m n p** und $^{a}/_{R}$ sind in entsprechende Fächer der Tabellen eingesetzt.

In dieser Weise erhalten wir:

1°. Die konvexen Polytope:

333, 334 u. **433, 343, 335** u. **533.**

2°. Den von Hexaedern ausgefüllten dreidimensionalen Raum **434.**

3°. Die dem imaginären Gebiete des (Euklidischen) Raumes R_4 angehörigen Gebilde **435** u. **534, 353, 535.**

4°. Die reellen, dem soeben genannten sehr nahe verwandten Gebilde: $\mathbf{43}^{5}/_{2}$ u. $^{5}/_{2}\mathbf{34}$, $\mathbf{3}^{5}/_{2}\mathbf{3}$, $^{5}/_{2}\mathbf{35}$.

Es sind aber diese Gebilde keine geschlossenen Polytope, denn zwei Kanten, die eine Ecke mit den Enden einer Hauptdiagonale des entsprechenden Basispolyeders verbinden, sind Sehnen eines grossen Kreises der umschriebenen Hypersphäre. Die entsprechenden Verhältnisse $^{a}/_{R}$ zeigen aber, dass diese Kanten keine Seiten eines regelmässigen Polygons sind. Es führt daher das Aneinanderreihen der Grenzpolyeder nie zu einer geschlossenen Figur.

5°. Die zehn mit den **335** u. **533** zu einer Familie gehörigen sternartigen Polytope $\mathbf{33}^{5}/_{2}$ u. $^{5}/_{2}\mathbf{33}$, $\mathbf{35}^{5}/_{2}$ u. $^{5}/_{2}\mathbf{53}$, $\mathbf{53}^{5}/_{2}$ u. $^{5}/_{2}\mathbf{35}$, $\mathbf{3}^{5}/_{2}\mathbf{5}$ u. $\mathbf{5}^{5}/_{2}\mathbf{3}$, $\mathbf{5}^{5}/_{2}\mathbf{5}$, $^{5}/_{2}\mathbf{5}^{5}/_{2}$.

Die Ordnungszahl ihrer gemeinschaftlichen Bewegungsgruppe ist 7200. (s. meine Abhandlung ü. d. Sechshundertzell l. c.).

Zur Bestimmung ihrer kennzeichnenden Zahlen a_0, a_1, a_2, a_3 benützen wir folgenden allgemeinen Satz.

Wenn G die Ordnungszahl der Bewegungsgruppe eines **m n p** ist, $G_{(mn)}$ die des Grenzpolyeders, $G_{(np)}$ die des Basispolyaeders, so sind:

$$a_0 = \frac{G}{G_{np}},\quad a_1 = \frac{G}{2p},\quad a_2 = \frac{G}{2m},\quad a_3 = \frac{G}{G_{(mn)}}.$$

Wir finden dann:

	a_0	a_1	a_2	a_3	a/R
335	120	720	1200	600	$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$
533	600	1200	720	120	$\frac{1}{4}(3-\sqrt{5})\sqrt{2}$
$\mathbf{33}^5/_2$	120	720	1200	600	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$
$^5/_2\mathbf{33}$	600	1200	720	120	$\frac{1}{4}(3+\sqrt{5})\sqrt{2}$
$\mathbf{53}^5/_2$	120	720	720	120	$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$
$^5/_2\mathbf{35}$	120	720	720	120	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$
$\mathbf{35}^5/_2$	120	720	1200	120	$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$
$^5/_2\mathbf{53}$	120	1200	720	120	1
$\mathbf{3}^5/_2\mathbf{5}$	120	720	1200	120	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$
$\mathbf{5}^5/_2\mathbf{3}$	120	1200	720	120	1
$\mathbf{5}^5/_2\mathbf{5}$	120	720	720	120	$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$
$^5/_2\mathbf{5}^5/_2$	120	720	720	120	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

Aus dieser Tabelle geht hervor:

1°. Dass, mit Ausnahme des $^5/_2\mathbf{33}$, der mit **533** die Eckengruppe gemein hat, alle sternartigen Polytope die Eckengruppe des **335** haben.

2°. Dass $\mathbf{53}^5/_2$, $\mathbf{35}^5/_2$, $\mathbf{5}^5/_2\mathbf{5}$ mit **335**,
$^5/_2\mathbf{35}$, $\mathbf{3}^5/_2\mathbf{5}$, $^5/_2\mathbf{5}^5/_2$ mit $\mathbf{33}^5/_2$
$^5/_2\mathbf{53}$ mit $\mathbf{5}^5/_2\mathbf{3}$
das Kantengerüste gemein haben.

Schliesslich noch folgende Bemerkung.

Ordnet man die Symbole in zwei Reihen:

335, $\mathbf{53}^5/_2$, $\mathbf{3}^5/_2\mathbf{5}$, $\mathbf{5}^5/_2\mathbf{5}$, $^5/_2\mathbf{53}$, **533**
$\mathbf{33}^5/_2$, $^5/_2\mathbf{35}$, $\mathbf{35}^5/_2$, $^5/_2\mathbf{5}^5/_2$, $\mathbf{5}^5/_2\mathbf{3}$, $^5/_2\mathbf{33}$

so sieht man, dass die in diesen Reihen einander entsprechenden Elemente durch die Substitution $(5^5/_2)$ in einander transformiert werden.

Das heisst:

Wenn irgend eins dieser Gebilde vorliegt, so geht das durch $(5^5/_2)$ Transformierte aus demselben hervor, wenn man, mit Erhaltung aller Verbindungen, die 72 Zehnergruppen, welche die Ecken bilden, S [12], [1]) alle zugleich so in sich transformiert, dass aus jedem Cyklus erster Art ein Cyklus zweiter Art hervorgeht.

II. Unsere Projectionen.

1. Die Tafel [V] mit ihrer Deutung als Abbild des **335**, S. [5], soll als ursprünglich vorliegend gedacht werden.

[1]) Die von [ ] eingeklammerten Angaben beziehen sich auf meine oben citierte Abhandlung.

Die oben erwähnte Operation ($5^5/_2$) erwies sich an den Projectionen dieser Tafel als leicht ausführbar, und lieferte sofort die Punktgruppe der Tafel I, welche nur in der Notation von der Ursprünglichen verschieden ist.

Indem nun bei der Transformation des **335** in ein **33**$^5/_2$ das an S [5] Erörterte dem Wortlaut nach ungeändert, aber mit entsprechend transformiertem Sinne, auch für das **33**$^5/_2$ gilt, war es leicht das zugehörige Kantengerüste herzustellen.

Es liegen nun die zwei in den Tafeln [V] und I abgebildeten und durch die Operation ($5^5/_2$) in einander transformierbaren Gerüste vor.

Es wäre leicht von diesen Gerüsten ein Fadenmodell herzustellen. Dazu soll man die S [5] angegebenen Gebilde I_1, D, I_2, (ID) als Stützgebilde concentrisch um den Punkt 1 stellen, und die Verbindungen in der an genannter Stelle vorgeschriebenen Weise anbringen.

Das Modell würde dan zeigen, wie man das Gerüste aus dem im Unendlichen in der Achse 1—1 liegenden Punkt sieht.

Wir haben diese zu dem zweiten Gerüste gehörigen Stützgebilde in der Tafel III gezeichnet.

Die einander entsprechenden Tafeln [IV] und II, welche bezw. dieselben Gerüste als [V] und I vorstellen, nur in anderer Lage, werden oft nützlichen Dienst leisten; eine gleichzeitige Betrachtung der Tafeln wird die Einsicht in die Figuren sehr erleichtern. Es kommt nämlich öfters vor dass gewisse zu suchende Configurationen in der einen Tafel schwer aufzufinden sind, während diese in der anderen auf der Hand liegen.

Die zwei vorliegenden Gerüste sollen jetzt mit Polyedern ausgefüllt werden.

Es kann dies auf vier verschiedene Weisen geschehen:

1°. mit Tetraedern **33**.
2°. „ D- Dodekaedern **53** bezw. $^5/_2$**3**.
3°. „ I_1- Ikosaedern **35** „ **3**$^5/_2$.
4°. „ I_1- Dodekaedern $5^5/_2$ „ $^5/_2$**5**.

(Wir bezeichnen mit D- und I_1- Polyedern solche, welche ihre Ecken in den mit D bezw. mit I_1 aequivalenten Gebilden haben, und deuten sie näher mit ihrem Schläflischen Symbole an).

Je nach der Ausfüllung erscheint dann das vollständige Bild

1° des **335** bezw. des **33**$^5/_2$
2° „ **53**$^5/_2$ „ „ $^5/_2$**35**
3° „ **35**$^5/_2$ „ „ **3**$^5/_2$**5**
4° „ $5^5/_5$**5** „ „ $^5/_2$**5**$^5/^2$.

Die Tafel IV zeigt für die sub 2°, 3° und 4° genannten Polytope die in der Ecke 1 zusammenstossenden und auf einer I_1-Basis (2—13) stützenden Grenzpolyeder.

Nur die Hälfte ist gezeichnet.

In der zu $^5/_2 35$ gehörigen Figur ist deutlichkeithalber eine Fünfzahl nach-1 verlegt.

2 Wir haben zunächst, die zu $^5/_2 53$ und $5^5/_2 3$ gehörigen Tafeln V und VI zu erklären.

Es sei vor allem darauf hingewiesen, dass die betreffenden Polytope, die Punktgruppe mit den vorigen gemein haben, und dass für beide $^a/_R = 1$ ist. Sie müssen deshalb auch dasselbe Kantengerüste zeigen.

Weiter geht aus ihren Symbolen $^5/_2 53$ und $5^5/_2 5$ hervor, dass die Operation $(5^5/_2)$ je das eine in das andere transformiert.

Hieraus lässt sich schliessen, dass, wenn man in die zwei vorliegenden durch die Operation $(5^5/_2)$ in einander transformierbaren Punktgruppen, die Kanten $a = R$ entsprechend einsetzt, zwei zu einander kongruente Gerüste erscheinen müssen.

Wir sind nun so verfahren:

In V haben wir die Punktgruppe der Tafel [V], in VI die der Tafel II wiedergegeben; dann, aus den sechsseitigen Projectionen der Tafel II ersehend, dass die Verbindungen 1 — D (13 — 34) die Länge R haben, die Kanten wie folgt angebracht:

von	1	nach	(14 — 33)	1	×	20	= 20	Kanten
„	(2 — 13)	„	(2 — 13)	6	×	6	= 30	„
„	„	„	(14 — 33)	12	×	5	= 60	„
„	„	„	(34 — 45)	12	×	5	= 60	„
„	„	„	± (46 — 60)	12	×	5	= 60	„
„	(14 — 33)	„	(14 — 33)	10	×	6	= 60	„
„	„	„	± (46 — 60)	20	×	6	= 120	„
„	„	„	— (34 — 45)	20	×	3	= 60	„
„	„	„	— (14 — 33)	20	×	1	= 20	„
„	(34 — 45)	„	(34 — 45)	6	×	5	= 30	„
„	„	„	± (46 — 60)	12	×	5	= 60	„
„	„	„	— (14 — 33)	12	×	5	= 60	„
„	± (46 — 60)	„	± (46 — 60)	15	×	4	= 60	„
„	„	„	— (34 — 45)	30	×	2	= 60	„
„	„	„	— (14 — 33)	30	×	3	= 120	„
„	„	„	— (2 — 13)	30	×	3	= 60	„
„	— (34 — 45)	„	— (34 — 45)	6	×	5	= 30	„
„	„	„	— (2 — 13)	12	×	5	= 60	„

von	— (14 — 33)	nach	— (14 — 33)	10	×	6 =	60 Kanten
„	— (14 — 33)	„	— (2 — 13)	20	×	3 =	60 „
„	„	„	— 1	20	×	1 =	20 „
„	— (2 — 13)	„	— (2 — 13)	6	×	5 =	30 „

Es lassen sich nun diese Gerüste auf zweierlei Weise mit Dodekaedern ausfüllen, nämlich:

V mit I_1- $^5/_2 5$ oder mit I_2- $5^5/_2$
VI „ I_1- $5^5/_2$ „ „ I_2- $^5/_2 5$

Entsprechend zeigt dann:

V das $^5/_2 53$ oder das $5^5/_2 3$
VI „ $5^5/_2 3$ „ „ $^5/_2 53$.

In V ($5^5/_2 3$) sind zehn, an der Ecke 1 liegenden $5^5/_2$
„ V ($^5/_2 53$) „ „ „ „ „ — 1 „ $^5/_2 5$
durch schwere Linien angedeutet.

III. Die Artzahlen.

Das $33^5/_2$.

Schon Schläfli, der dieses Gebilde entdeckt und eingehend studiert hat, hat gezeigt, dass es einen 191-fachen Mantel hat. (l. c. S 126).

Wir könnten den Schäflischen Beweis leicht Satz für Satz an unseren Projectionen verifieren, wir ziehen es aber vor die Art des Polytops von Neuem zu untersuchen, und zwar auf folgender Weise:

Wir wählen irgend ein Grenztetraeder, das sich durch einfache Lage auszeichnet, z. B. das Tetraeder *1568*, dessen Raum senkrecht auf einer Projectionsebene steht, (s Taf. II rechts oben). Es zeigen sich dann sofort diejenigen Strahlen welche diesen Raum und, vielleicht, das Tetraeder selbst durchsetzen von selbst. Es sind dies nämlich die Strahlen nach den Ecken, deren Projection auf die genannte Ebene links vom Tetraederraume liegen. Diese Ecken lagern sich in Schichten welche dem Tetraederraum parallel laufen. Strahlen, welche den Ecken solcher Schicht entsprechen, befinden sich bezüglich des Tetraeders in gleichartiger Lage.

Fangen wir an mit den Strahlen nach den Ecken des Tetraeders. Wir erhalten dann mit jedem Strahl einen Schnittpunkt; aber diesem Punkte kommt nur die Multiplicität $^7/_{20}$ zu, denn es gehört zu 20 Tetraedern welche um diesen Punkt einen 7-fachen Mantel bilden, entsprechend der Art des Basispolyeders $3^5/_2$.

Betrachten wir jetzt einen der 12 Strahlen nach den Ecken der ersten Schicht, z. B. den Strahl nach — 15, der, vielleicht, eine Kante des Dreiecks 568 trifft. Dass dies in der tat der Fall ist lässt sich leicht nachweisen, wenn wir alle vier Projectionen betrachten.

Es ergiebt sich dann, dass der genannte Strahl die Kante 6 — 8 schneidet. Ein solcher Schnittpunkt zählt $^2/_5$, denn um jede Kante gehn 5 Tetraeder 2-mal herum.

Jetzt ein Strahl der zweiten Schicht; wir wählen dazu den Strahl nach 34 der gewiss das innere der Seitenfläche trifft, denn der Kreis 34, 41, 44 ist sicher kleiner als der Kreis —15, —18, —32, —20, —23, —31 dessen entsprechenden Strahle die Kanten schneiden. Ein solcher Schnittpunkt zählt $^1/_2$, weil an jeder Seitenfläche 2 Tetraeder liegen.

Nur haben wir auch die Gewissheit, dass die 26 übrigen Strahlen das Tetraeder im Innern treffen.

Wir finden also „dass jedem Tetraeder die (reducirte) Anzahl

$$4 \times {}^7/_{20} + 12 \times {}^2/_5 + 12 \times {}^1/_2 + 26 = 38{}^1/_5$$

Schnittpunkte zukommt.

Den sämtlichen 600 Tetraedern also

$$600 \times 38{}^1/_5.$$

d. h. auf jeden der 120 Strahlen fallen

$$\frac{600 \times 38{}^1/_5}{120} = 191 \text{ Schnittpunkte.}$$

Das $55^5/_2$.

Ein Blick auf die Tafel [V] belehrt uns dass das D- Dodekaeder **53** (14—34) Schnittpunkte liefert:

a. mit den 20 Strahlen nach seinen Ecken,

b. „ „ 13 „ „ (1—13).

Den Erstern kommt die Multiplizität $^7/_{20}$ zu, die Letztern sind einfach.

Also ist für jedes Grenzpolyeder die reduzierte Anzahl:

$$20 \times {}^7/_{20} + 13 - 20$$

Dies ist eben die Artzahl, weil es ebensoviele Grenzpolyeder als Strahlen gibt.

Auch diese Zahl wurde schon von Schläfli bestimmt. (l. c. S. 134).

Das $^5/_2$35.

Betrachten wir das Dodekaeder $^5/_2$**3** (14—33) Tafel I, II, III.

Der Strahl nach —1, geht durch den Mittelpunkt.

20 Strahlen gehn nach den Ecken,

12 Strahlen treffen die zu je fünf sich in einem Punkt schneidenden Kanten.

Der erstgenannte Strahl liefert einen 7- fachen Schnittpunkt.

Die zweitgenannten liefern je einen $^1/_{20}$ Punkt.

Die letztern je einen $5 \times \frac{1}{5}$ oder einfachzählenden.

Die reducirte Anzahl der Schnittpunkte:

$$7 + 1 + 12 = 20$$

bestimmt hier wieder die Art des Polytops.

Das $35^5/_2$.

Das Ikosaeder **35** (2—13) Tafel [IV]. [V] wird getroffen:

von dem Strahle nach 1 in dem einfachen Mittelpunkt, von den 12 Strahlen nach den Ecken in $^3/_{12}$ zählenden Punkten.

Das Polytop zeigt sich also 4- ter Art.

Das $^5/_2$53.

Tafel V. Hier wird das Dodekaeder $^5/_2$**5** (2—13) getroffen:

vom Strahl nach 1 in dem 3- fach zählenden Mittelpunkt und von den 12 Strahlen nach den Ecken je in einem $^1/_{12}$ Punkt.

Das Polytop ist also 4- ter Art.

Das $5^5/_2$5.

Tafel [IV], [V] Dodekaeder $5^5/_2$ (2—13)

1 Strahl trifft den 3- fachen Mittelpunkt

12 Strahlen die $^3/_{12}$ zählenden Ecken.

Das $5^5/_2$**5** ist also 6- ter Art.

Das $^5/_2 5^5/_2$.

Tafel I, II. Dodekaeder $^5/_2$**5** (2—13).

Der Strahl nach — 1 trifft den 3- fachen Mittelpunkt.

Die 12 Strahlen nach (34—45) das ebenfalls 3- fache Innere.

Die 20 Strahlen nach (— 14— — 33) gehn durch die zu je 3 in einem Punkt sich schneidenden Kanten.

12 Strahlen gehen nach den $^3/_{12}$ zählenden Ecken.

Es ergibt sich also als Artzahl:

$$3 + 12 \times 3 + 20 \times 3 \times \tfrac{2}{5} + 12 \times \tfrac{3}{12} = 66.$$

Das $3^5/_2$5.

Tafel I, II. Ikosaeder $3^5/_2$ (2— 13).

Der Strahl nach — 1 trifft den 7- fachen Mittelpunkt.

Die 12 Strahlen nach (34—45) treffen das $3^5/_2$ je in einer Ecke des Kern-**35**.

Indem solch ein Punkt zu 5 Seitenflächen gehört, zugleich aber in einem Gebiet liegt das von einer Fünfzähl an einer $3^5/_2$-Ecke liegender Seitenflächen zweimal umhüllt wird, kommt ihm die Multiplizität $^5/_2 + 2$ zu.

Die 20 Strahlen nach (— 14—33) treffen die Punkte wo die Kanten sich zu je drei schneiden. Ein solcher Punkt zählt $3 \times \frac{2}{5}$.

Schliesslich gibt es noch die 12 Strahlen nach den $^3/_{12}$ zählenden Eckpunkten des Polyeders.

Die reducirte Anzahl Schnittpunkte:

$$7 + 12 \times {}^{9}/_{2} + 20 \times {}^{6}/_{5} + 3 = 76$$

liefert wieder die Art des Polytops.

Das $5^{5}/_{2}3$.

Tafel VI. Dodekaeder $5^{5}/_{2}$ (2—13).

Der Strahl nach — 1 trifft den 3-fachen Mittelpunkt.

Die 12 Strahlen nach (34 — 45) treffen ebenfalls das 3-fache Innere des Polyeders.

Die 20 Strahlen nach (— 14 — — 33) treffen die $^{3}/_{2}$ zählenden Punkte wo die Seitenflächen zu je drei zusammentreffen.

Schliesslich noch 12 Strahlen nach den $^{7}/_{12}$ zählenden Ecken:

$$3 + 12 \times 3 + 20 \times {}^{3}/_{2} + 7 = 76.$$

Das $5^{5}/_{2}3$ ist also wie das zu ihm reziproke $3^{5}/_{2}5$ von der 76-sten Art.

Es bleibt nun noch das eine, sehr komplizierte Polytop $^{5}/_{2}33$ zu behandeln übrig.

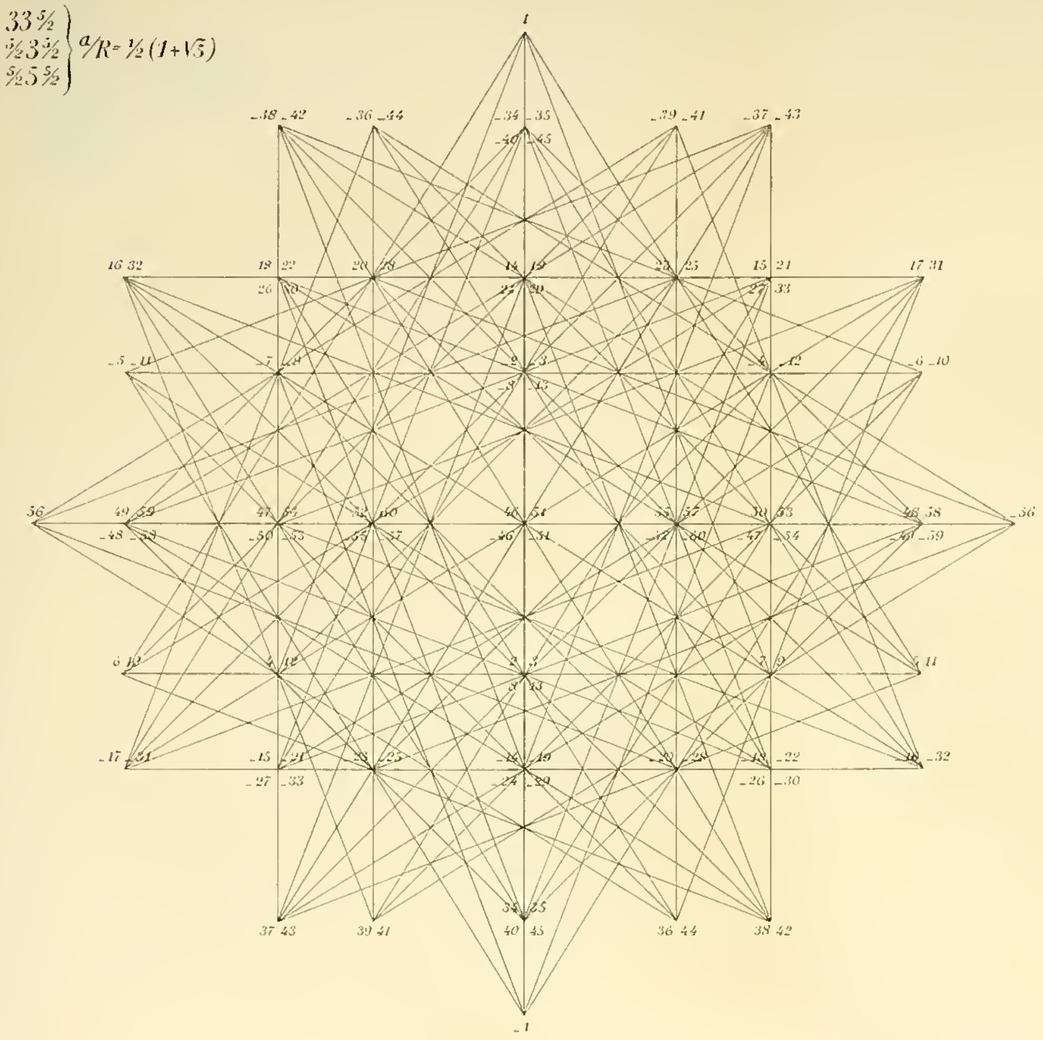
Ich behalte mir vor auch dieses Gebilde näher zu studieren.

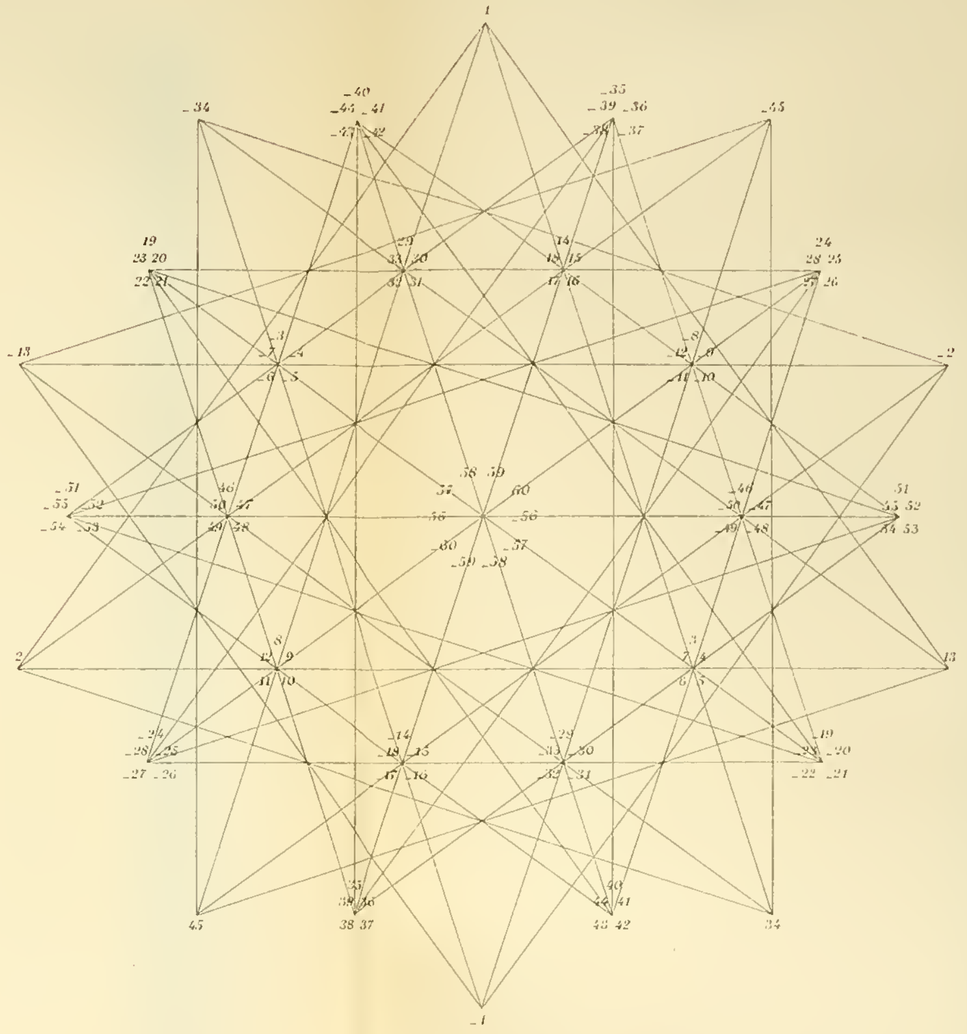
Zalt-Bommel { *20 Oct. 1913.*
9 Sept. 1915.

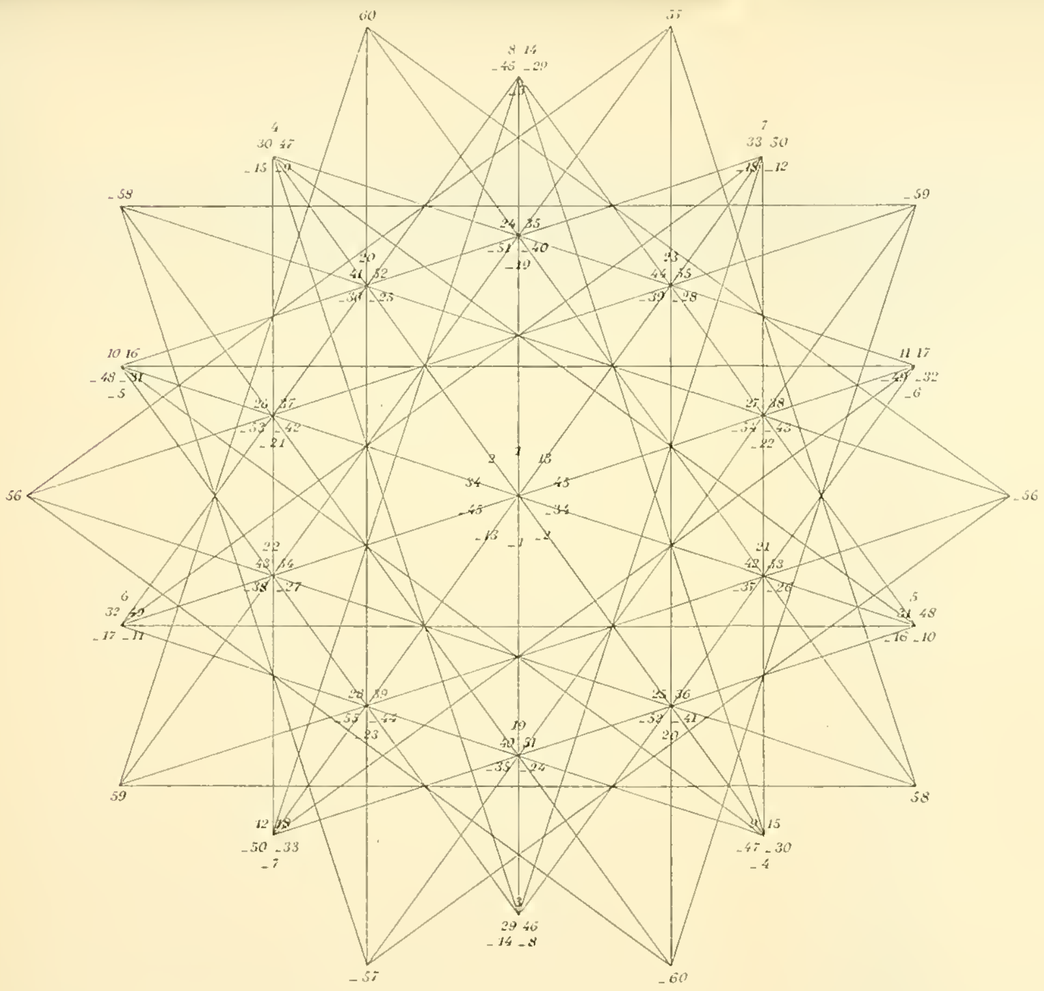
ERRATUM.

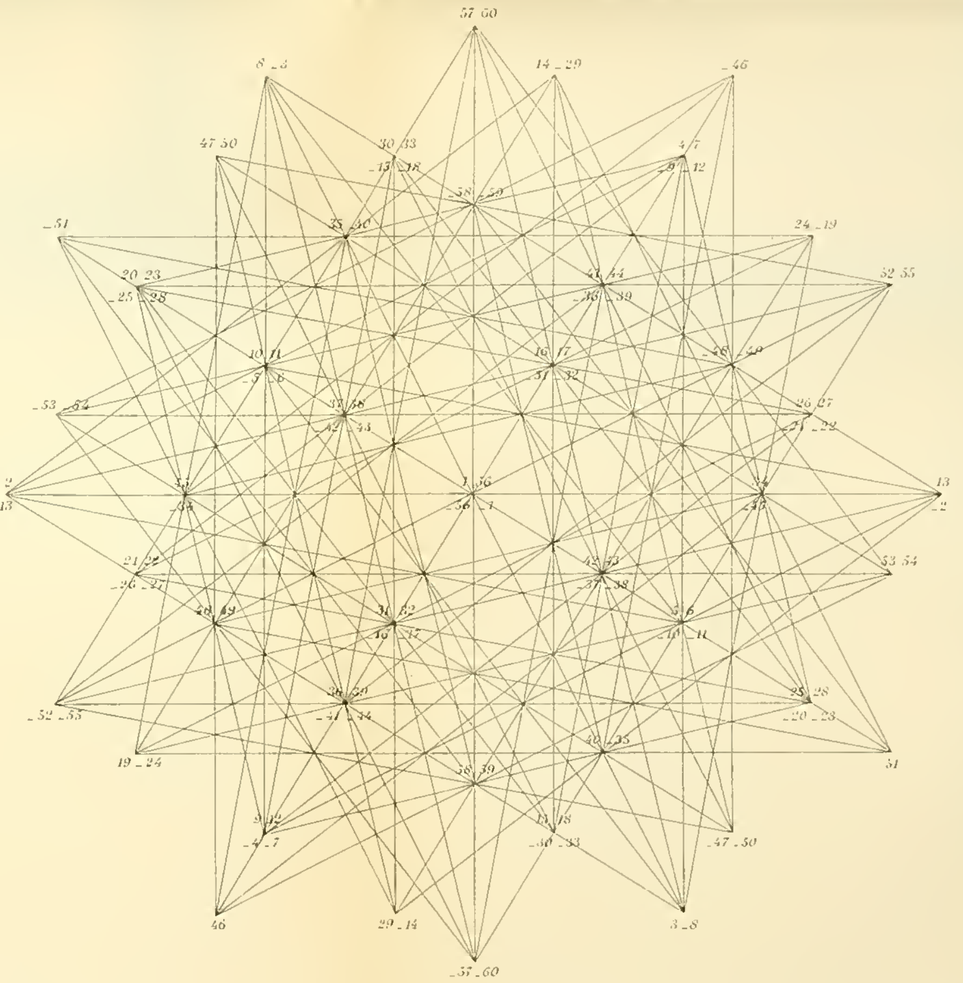
In Taf. I, II, III, links oben steht: $^{5}/_{2}3^{5}/_{2}$
soll sein: $^{5}/_{2}35$
noch hinzuzufugen: $3^{5}/_{2}5$
In Taf. III, I_1 noch zu ziehen:
die Kanten 4 5 und 9 10.

$$\left.\begin{matrix} 3\,3\,5/2 \\ 5/2\,3\,5/2 \\ 5/2\,5\,5/2 \end{matrix}\right\} a/R = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{3})$$



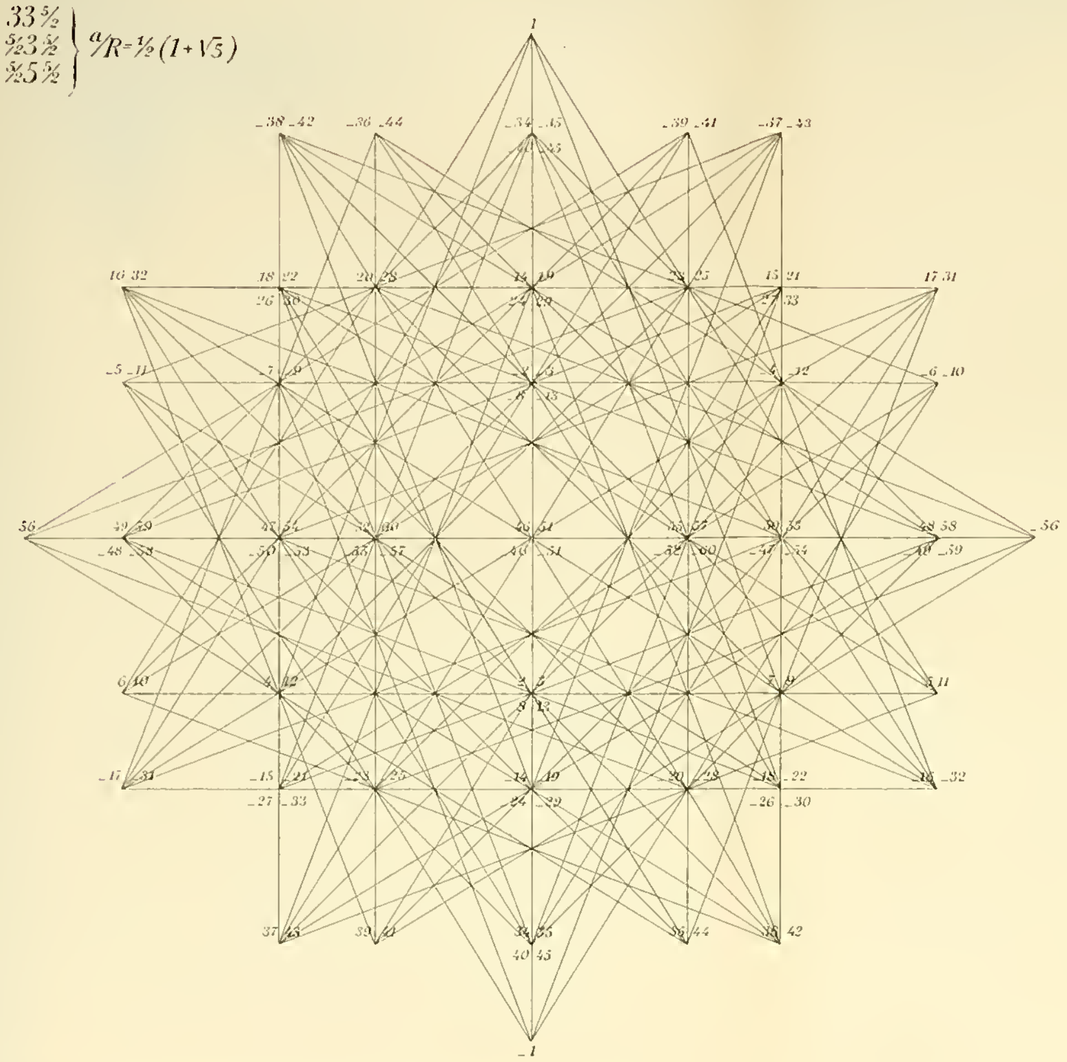


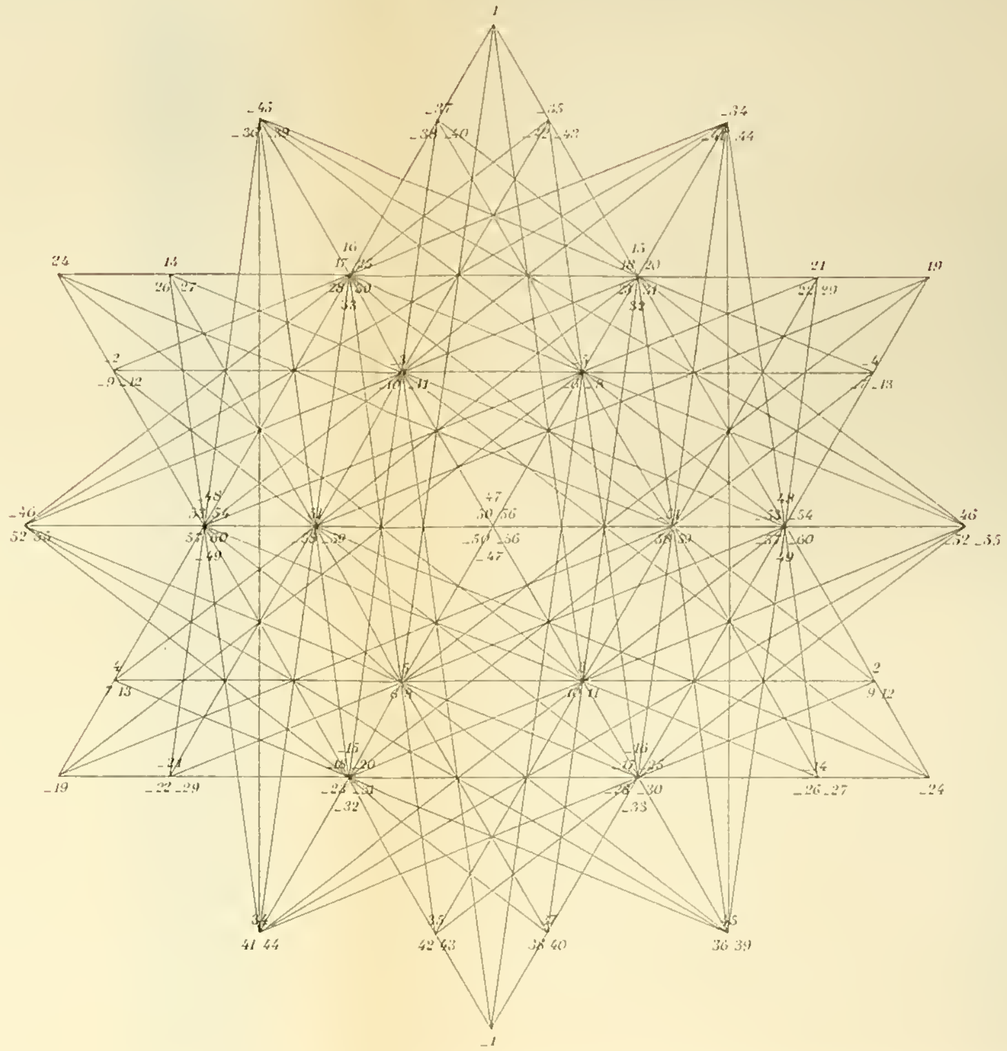


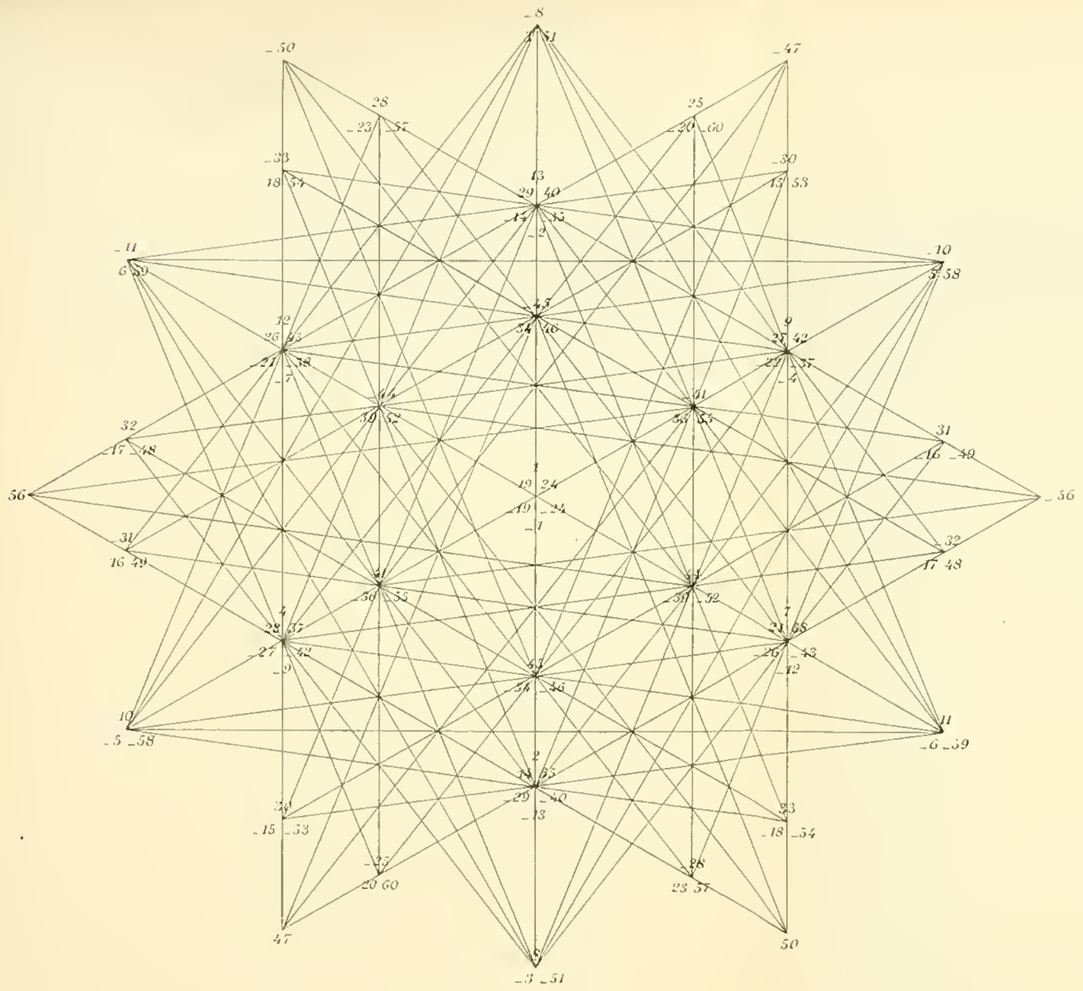


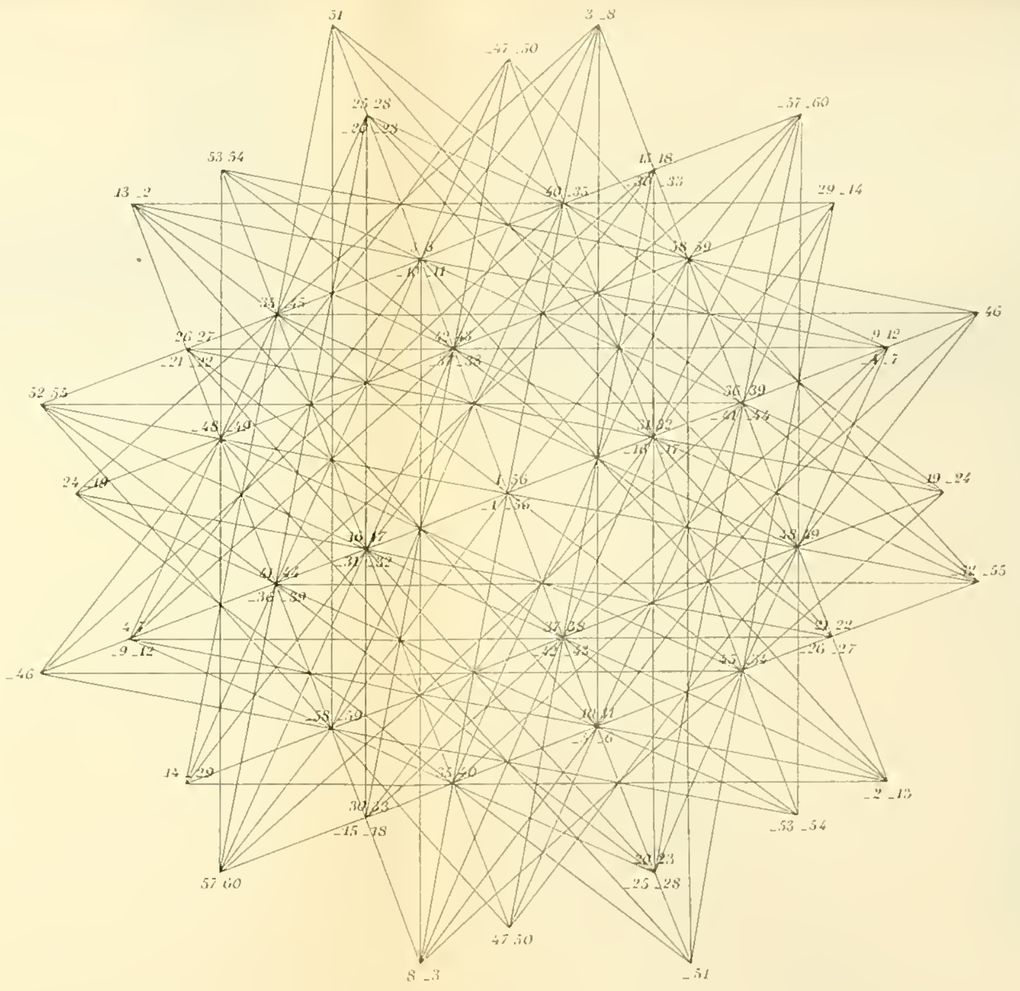
J. Eyzel lith. P. J. Mulder & Zn. impr. Leiden

$33\frac{5}{2}$
$\frac{5}{2}3\frac{5}{2}$
$\frac{5}{2}5\frac{5}{2}$
$a/R = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$





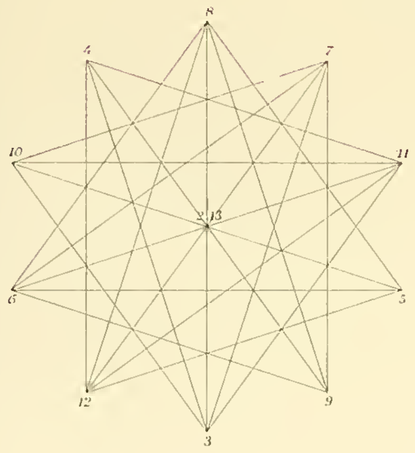


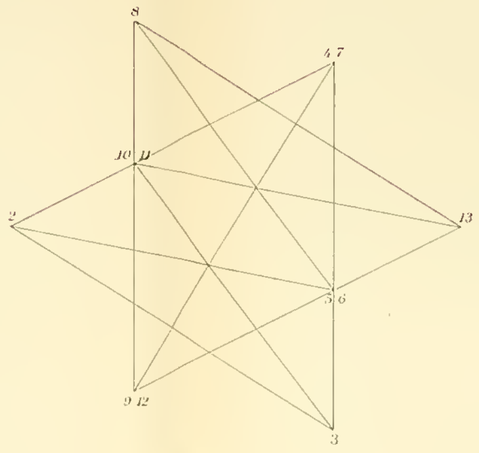


J. Bytel lith. P. J. Mulder & Zn. vnpr. Leiden

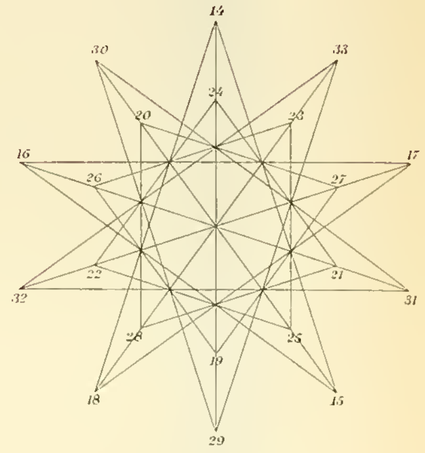
$33\frac{1}{2}$
$\frac{5}{2}3\frac{1}{2}$
$\frac{5}{2}5\frac{3}{2}$

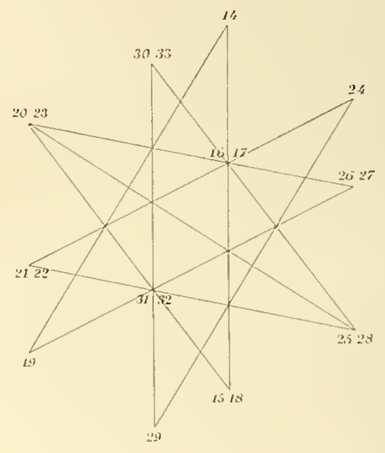
J_1



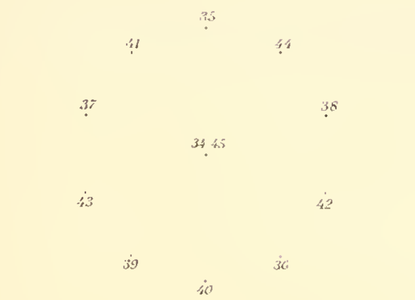


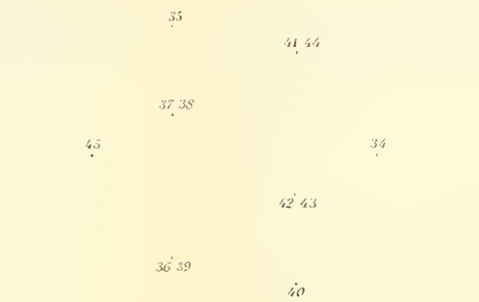
D



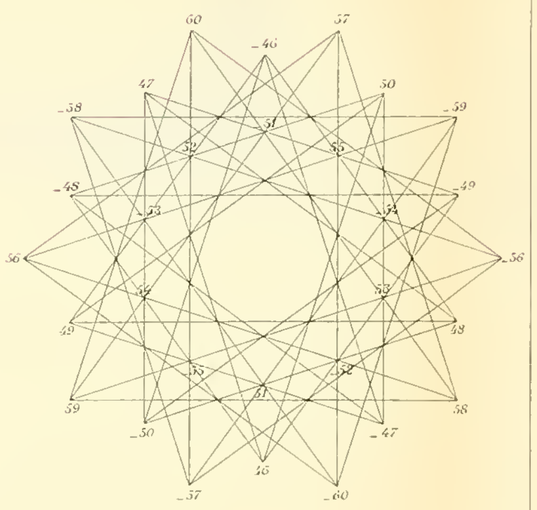


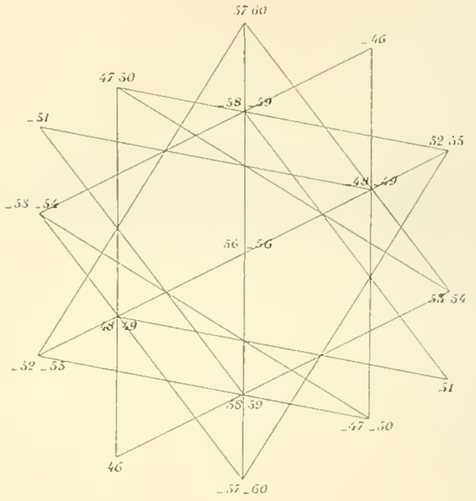
J_2





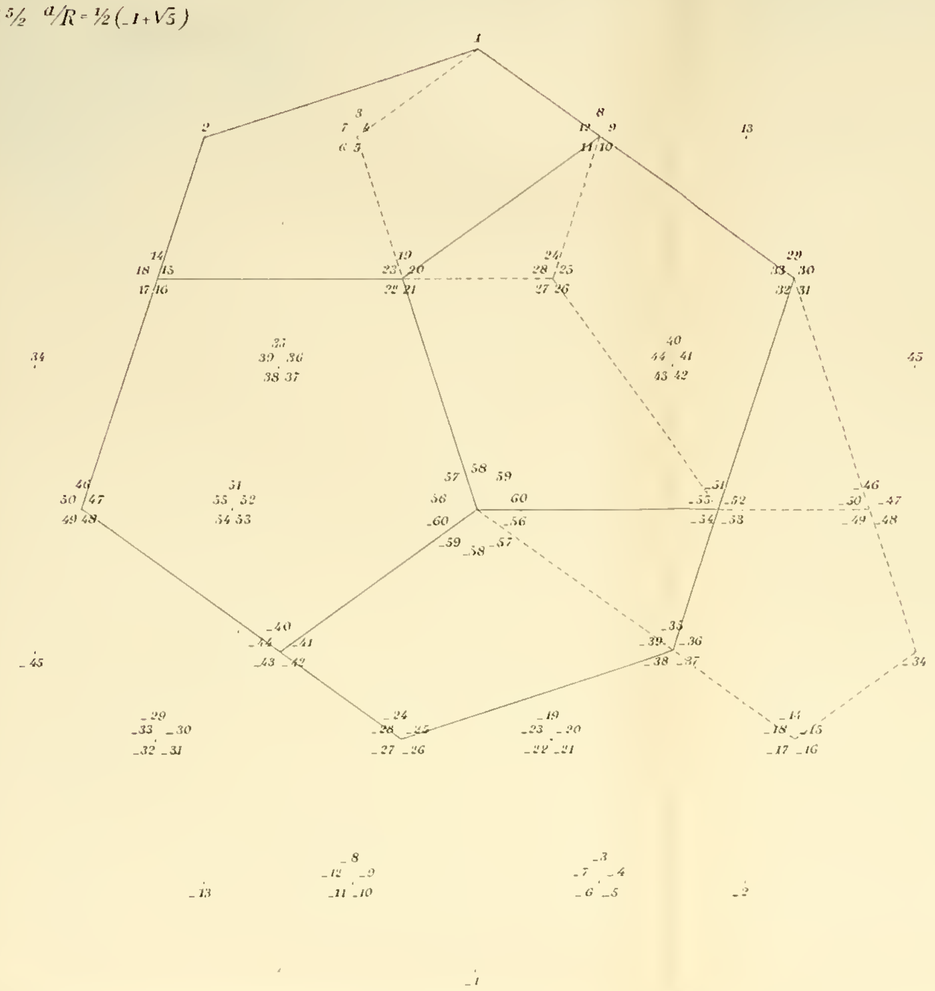
$J\text{-}D$



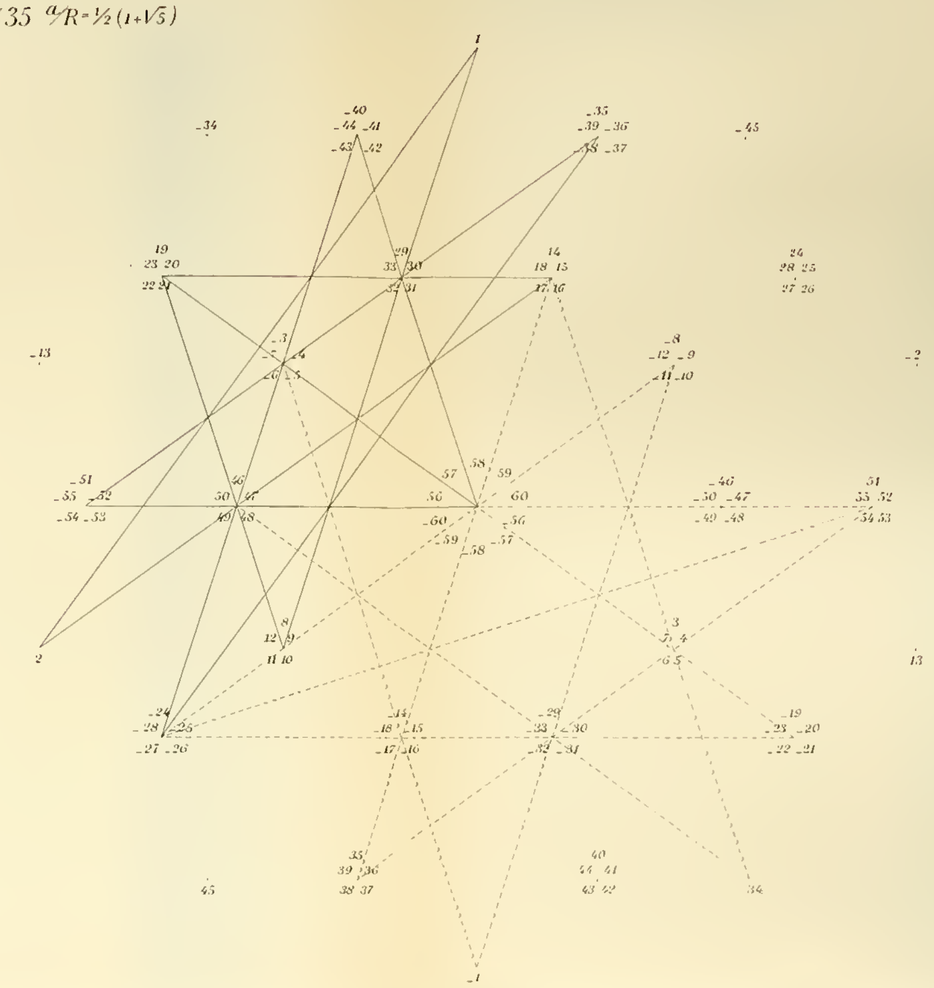


J. Eytel lith. P. J. Mulder & Zn. uitgv. Leiden

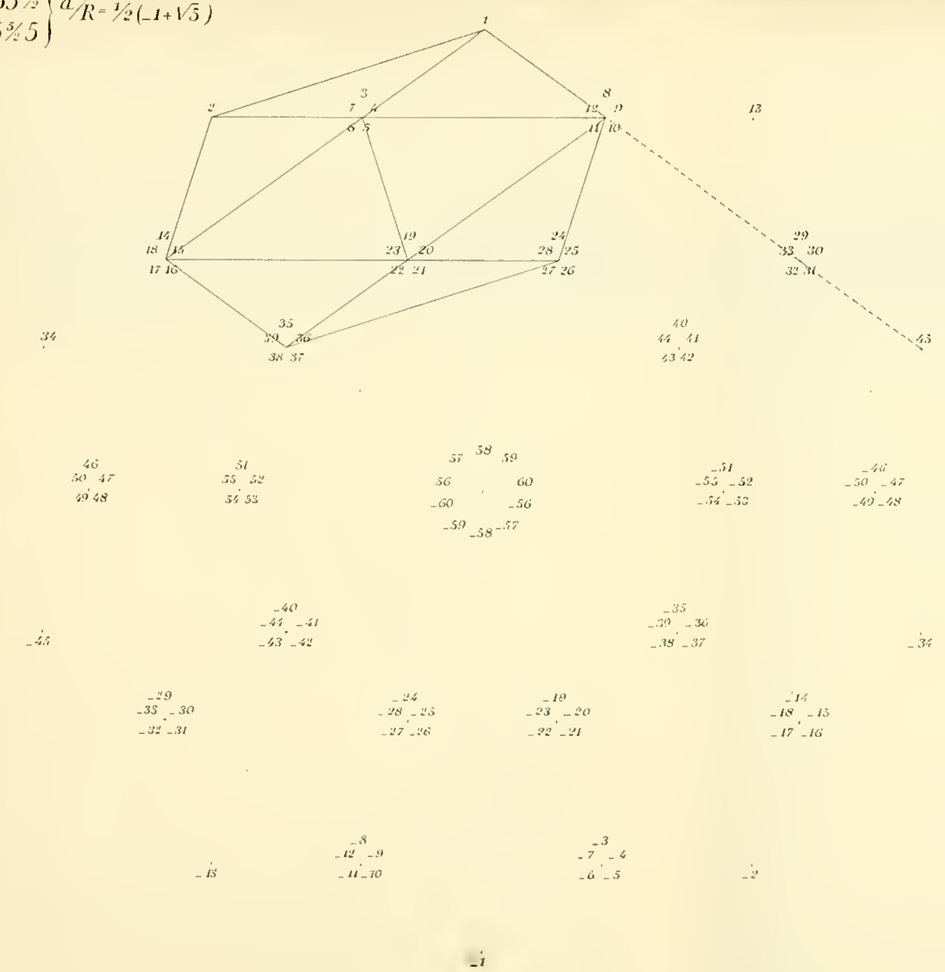
$53\frac{1}{2}$ $a/R = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$



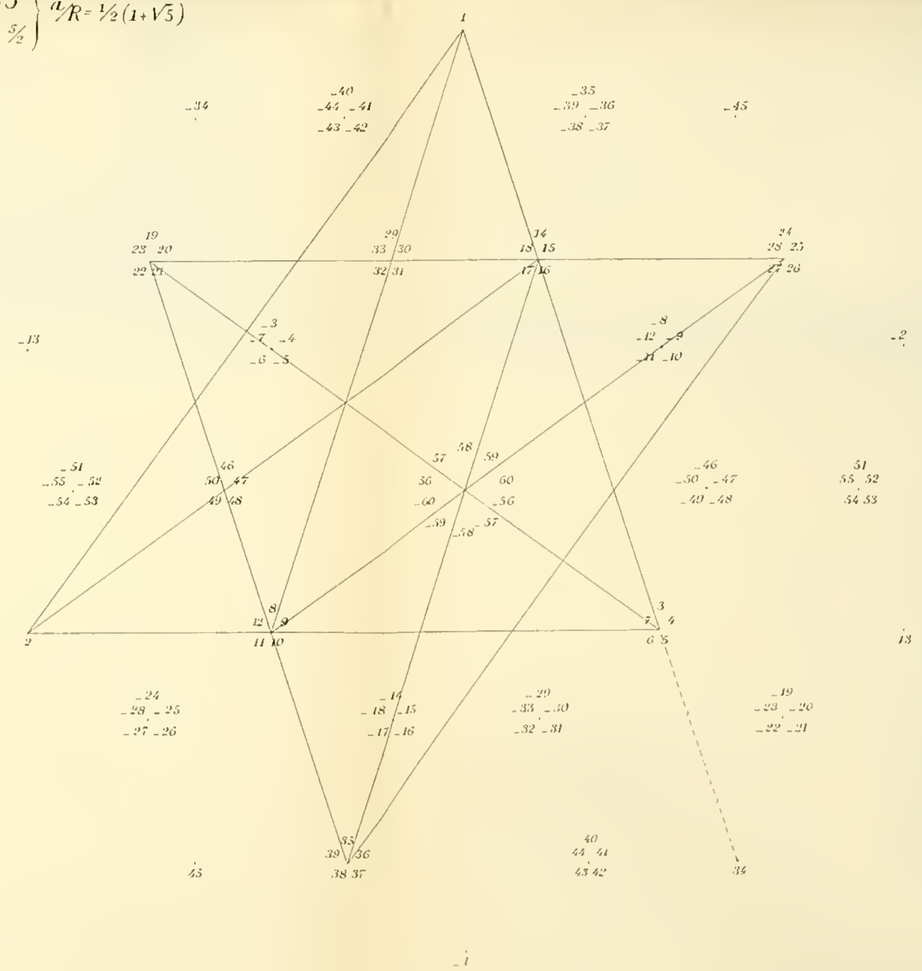
$\frac{5}{2}35$ $a/R = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$



$35\frac{5}{2}$
$5\frac{5}{2}5$ $a/R = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$

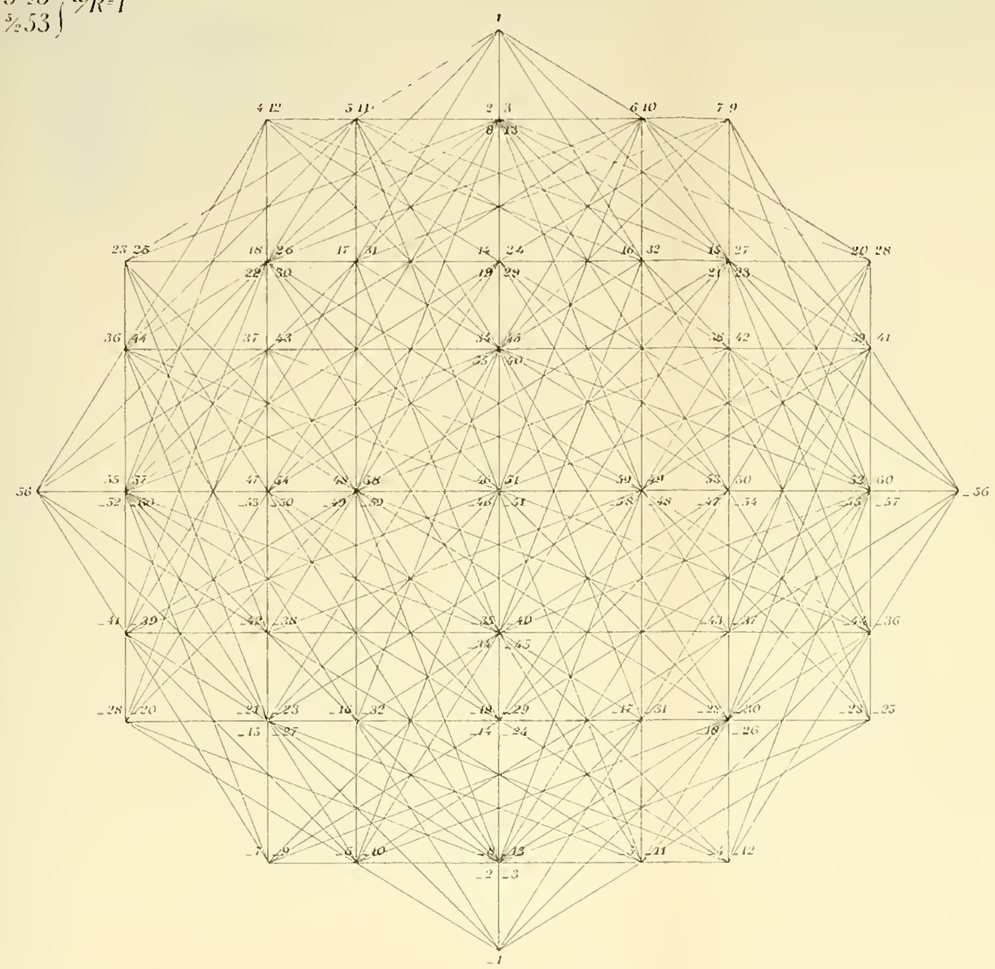


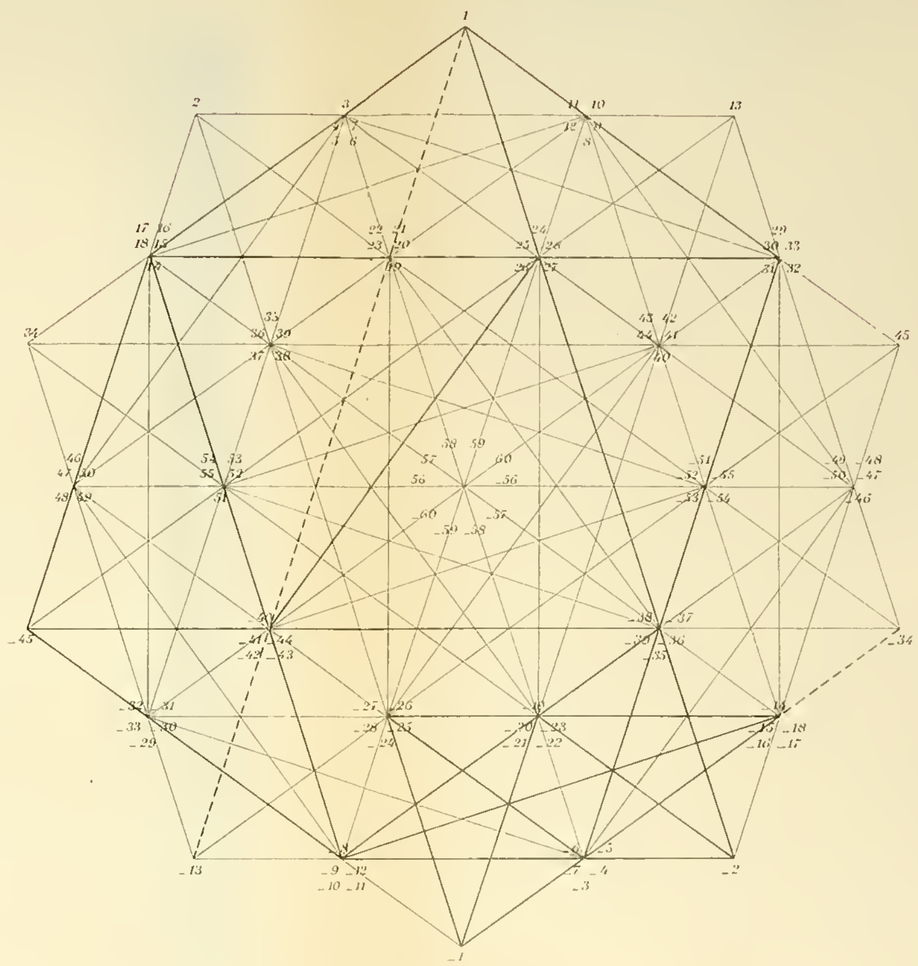
$3\frac{5}{2}5$
$\frac{5}{2}5\frac{5}{2}$ $a/R = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

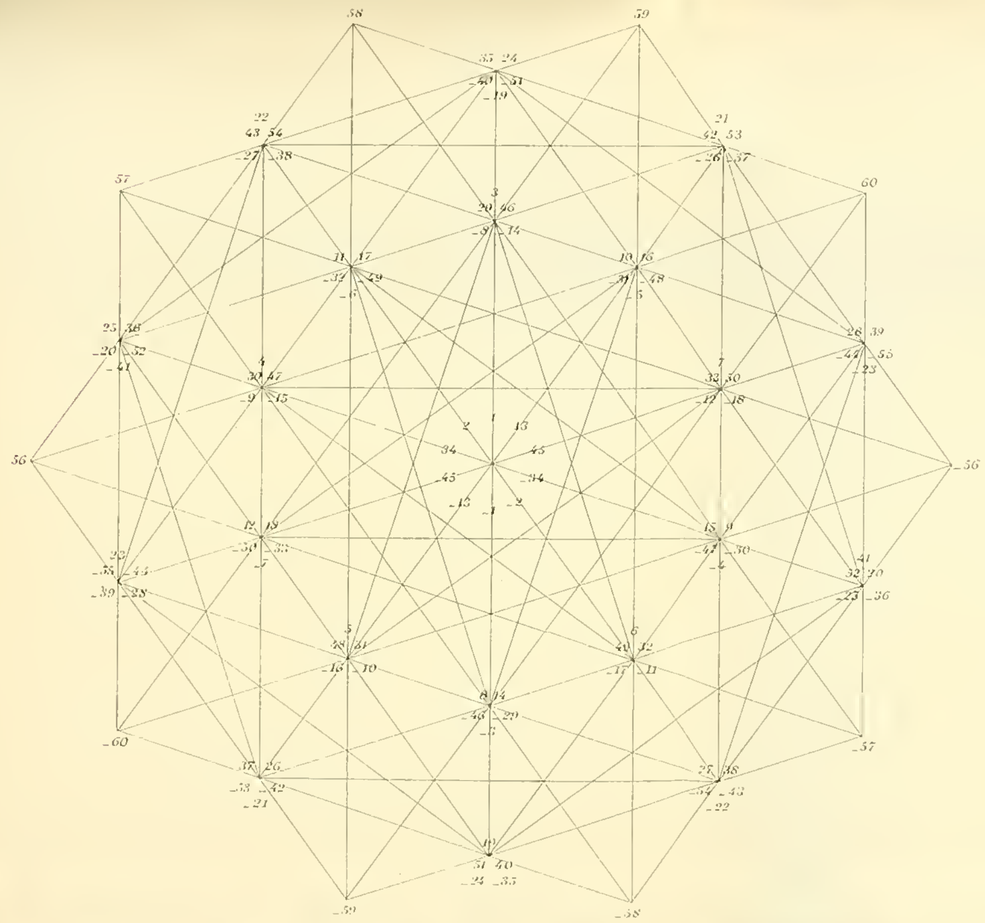


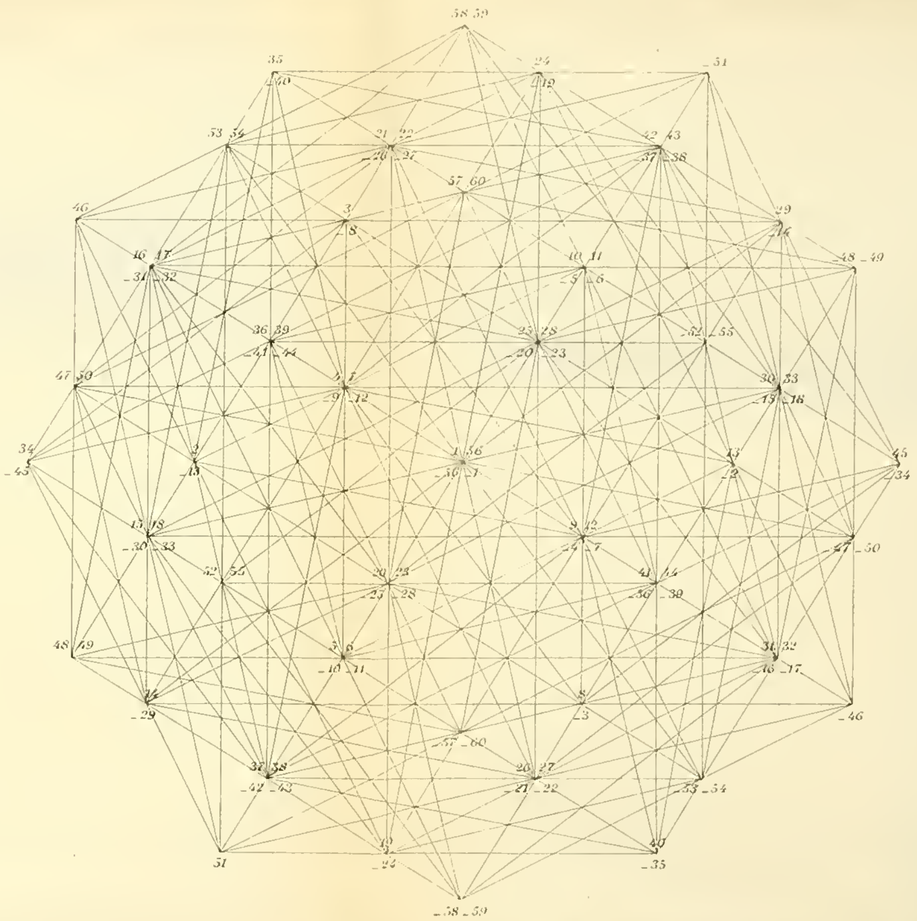
J. Zijtl lith. P.J. Mulder & Zn. impr. Leiden

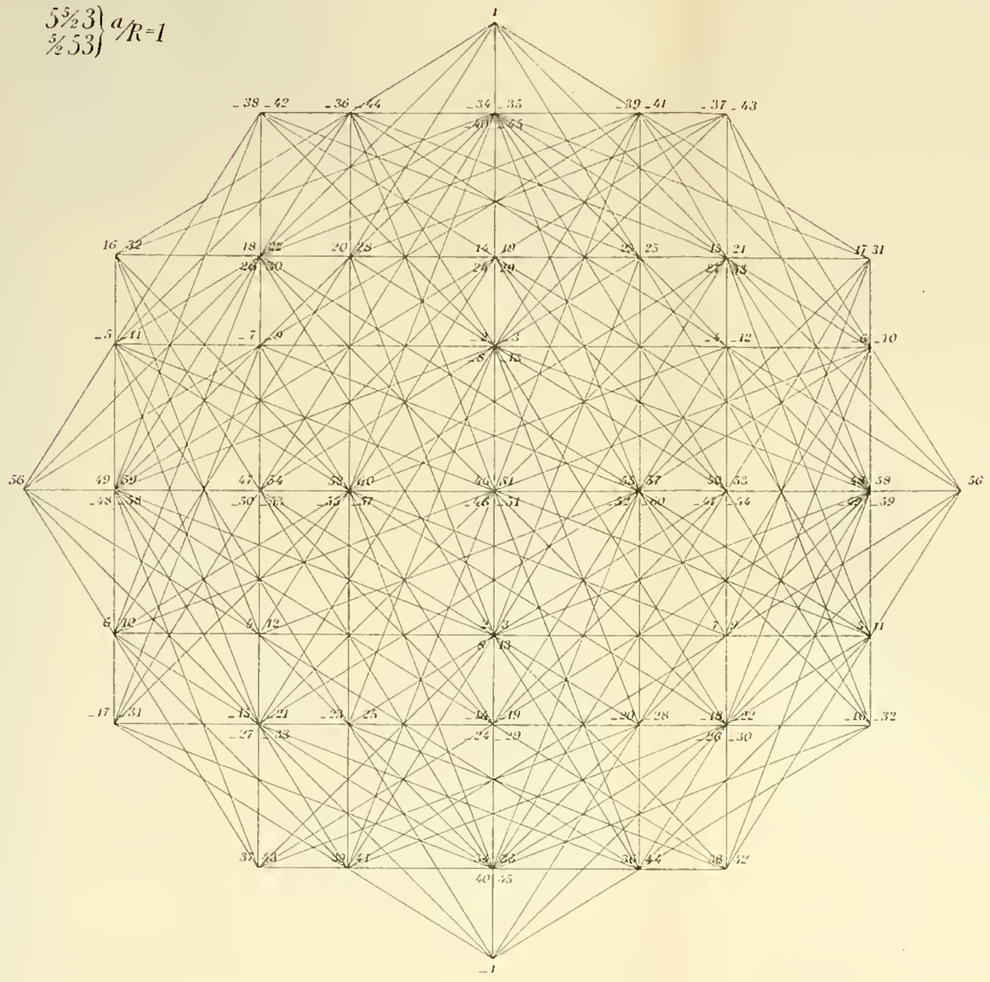
$\left.\begin{matrix} 5^5_2 3 \\ 5_2 53 \end{matrix}\right\}$ a/R=1

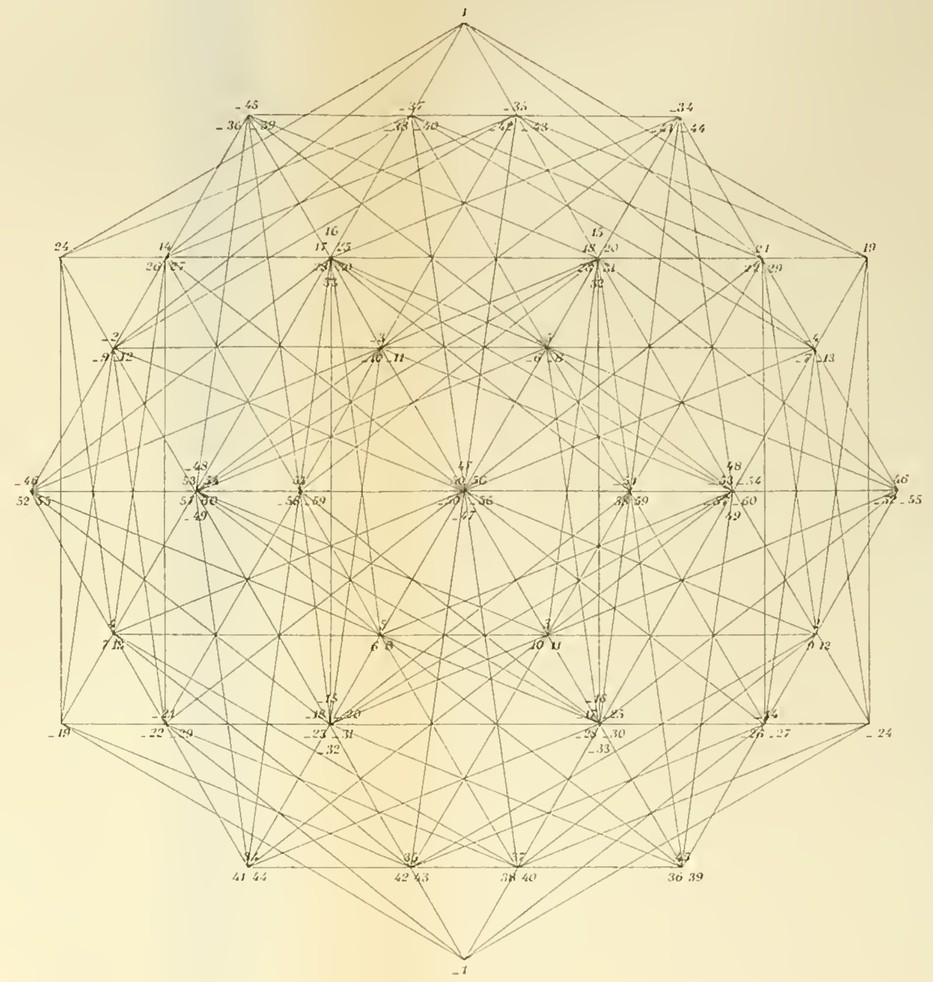


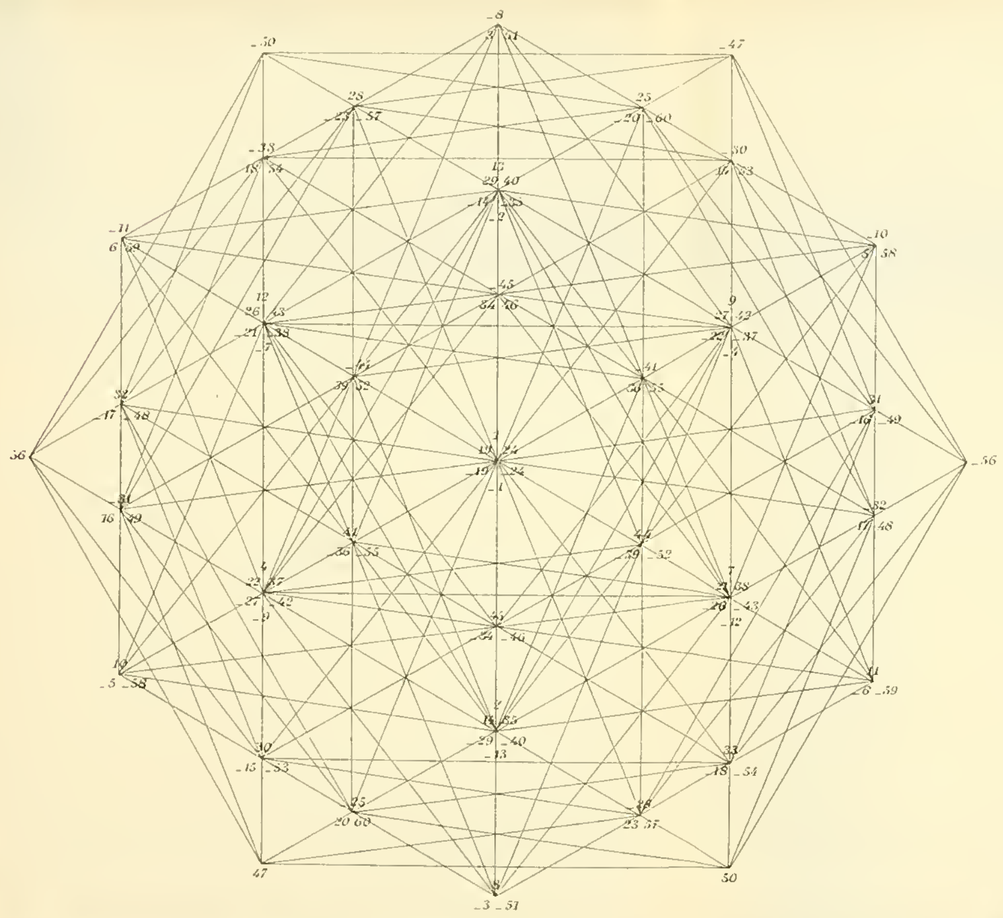


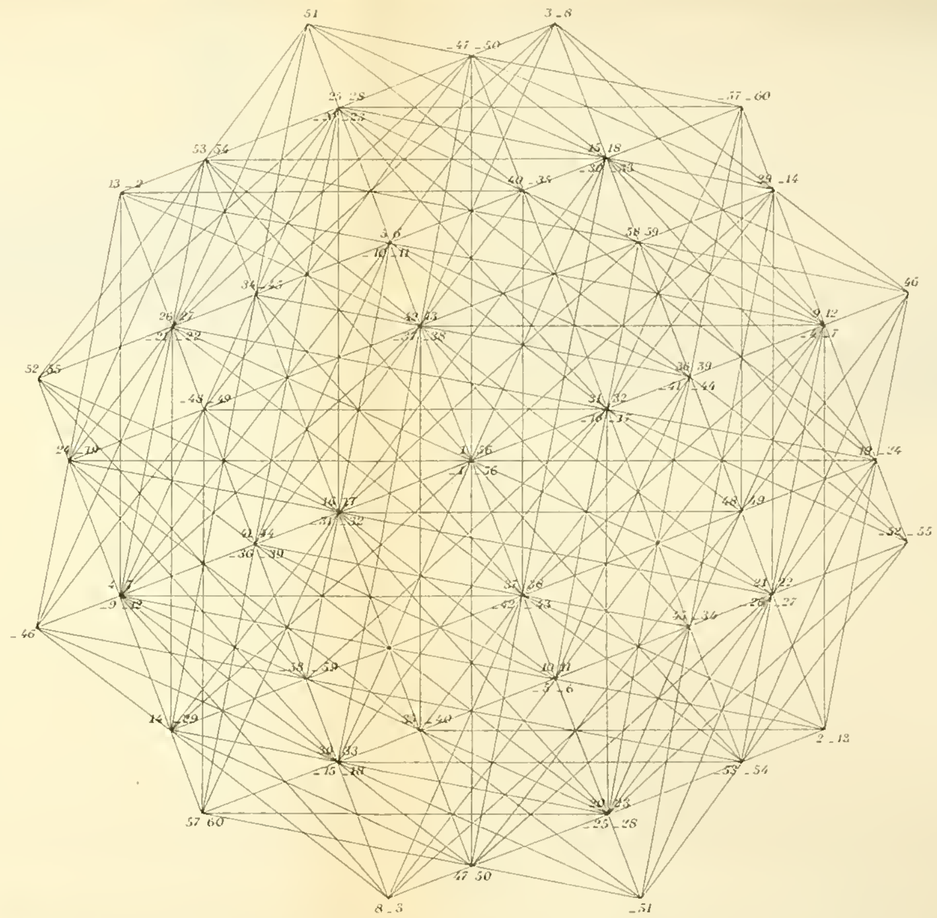












J. Bytel lith. P. J. Mulder & Zn. impr. Leiden

Analytical treatment of the polytopes regularly derived from the regular polytopes.

(Section V)

BY

THE LATE PROF. P. H. SCHOUTE,

PUBLISHED BY

PROF. J. CARDINAAL.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

DEEL XII. N°. 2.

AMSTERDAM.

JOHANNES MÜLLER

April 1916.

DEC 1 1919

Analytical treatment of the polytopes regularly derived from the regular polytopes.

(Section V)

BY

THE LATE PROF. P. H. SCHOUTE,

PUBLISHED BY

PROF. J. CARDINAAL.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

DEEL XII. N°. 2.

AMSTERDAM.

JOHANNES MÜLLER.

1916.

PREFACE.

Section I—IV of Dr. P. H. Schoute's great treatise on this subject have been inserted in the transactions of the Academy Vol XI—3 and 5. He was engaged in finishing it by writing out the fifth and last section when his sudden and much lamented death prevented him from giving the final touch to his creation.

Fortunately the manuscript was found amidst the deceased's papers. Though it bore the character of a concept, still the plan was quite ready and it revealed the rigor and lucidity which characterise all Schoute's scientific works. So it might well serve for the final redaction.

In the meeting of the Academy of Jan. 29, 1916 I gave a short account of the manner in which this redaction was performed and of the great part that Dr. W. A. Wythoff had in it; so I now have only to repeat my thanks to him.

J. CARDINAAL.

Analytical treatment of the polytopes regularly derived from the regular polytopes.

Section V: Polytopes derived from the extra polytopes.

A. *Introduction.*

114. We remember, that in the general introduction of this series of memoirs a classification in five sections was given. According to the author's intention the fifth section should have to deal with the extra regular polyhedra and polytopes. Hence the object of this section will be to investigate the polyhedra deduced from the icosahedron (or dodecahedron) and the fourdimensional polytopes deduced from C_{24} and from C_{600} (or C_{120}).

As to the nets that can be deduced from C_{24}, since these nets can be deduced at the same time from the cross polytope C_{16}, we refer to Section III, *E*, art 78—84 and Table VII.

Now a difficulty is arising in consequence of the want of a general theorem relating to the symbols used for the coordinates, as we are compelled to use more than one symbol for the same polytope. Obviously it is a priori not impossible to find a method which allows us to find the condition necessary for the symbolical representation of a polytope by two, three or even more symbols. Yet, as a satisfactory result of these attempts is dubious, we prefer a method which follows closely the geometrical operations, by means of which the polytopes are defined.

B. *The Icosahedron-family.*

115. The following table contains the symbols of the polyhedra of this family considered as deduced from the Icosahedron, *I*, and from the Dodecahedron, *D*, the symbols used by Mrs. Stott and the characteristic numbers (numbers of vertices, edges and faces):

Symbols	Characteristic numbers.		
	(vertices)	(edges)	(faces)
$I = ce_2\ D = I$	12	30	20
$e_1\ I = ce_1\ e_2\ D = II$	60	90	32
$e_2\ I = e_2\ D = RID$	60	120	62
$e_1\ e_2\ I = e_1\ e_2\ D = IID$	120	180	62
$ce_1\ I = ce_1\ D = ID$	30	60	32
$ce_2\ I = D = D$	20	30	12
$ce_1\ e_2\ I = e_1\ D = ID$	60	90	32

116. We prefer the isocahedron to the dodecahedron to deduce the other polyhedra of the family, as its coordinates can be represented by a single symbol. When the length of the edge is supposed to be $= 4$, this symbol is

$$[2,\ 1+e,\ 0]:\ 2\qquad,$$

where e is written for $\sqrt{5}$ and : 2 indicates, that all the *even* permutations of the coordinates must be written, each of them successively with positive and with negative sign (pentagonal hemiedry).

All the polyhedra of the family have the symmetry of the icosahedron, from which they are deducible, and thence will have coordinate-symbols of the form [ ] : 2. Only if two of the coordinates be equal, the indication : 2 may be omitted.

The coordinates of the vertices of $e_1\ I$, $e_2\ I$ and $e_1\ e_2\ I$ are obtained from those of I by adding to them the components of the prescribed displacements along the axes of coordinates. These displacements have in the case of e_1 for each vertex the directions from the origin of coordinates to the middle-points of the adjacent edges, in the case of e_2 to the centres of the adjacent faces.

The coordinates of the vertices of a contracted form, $ce_1\ I$, $ce_2\ I$ or $ce_1\ e_2\ I$, are obtained from those of the uncontracted form by substracting from the coordinates of each vertex those of the icosahedronvertex from which it was deduced by expansion.

Hence the polyhedra I, $ce_1\ I$ and $ce_2\ I$ may be considered to be the primitive forms of the family. From these the others are obtained by composition, i.e. by suitable addition of the coordinates of the vertices of two or three of them. So $e_1\ I$ is obtained from $ce_1\ I$ and I, $e_2\ I$ from $ce_2\ I$ and I, $ce_1\ e_2\ I$ from $ce_2\ I$ and $ce_1\ I$, $e_1\ e_2\ I$ from $ce_2\ I$, $ce_1\ I$ and I.

117. The polyhedron $ce_1\ I$ is similar to the convex polyhedron whose vertices are the middle-points of the edges of the original icosahedron. This polyhedron must be enlarged in such a ratio that the length of its edges becomes equal to that of the edges of the original icosahedron. Now the distance of the middle-points of two adjacent edges of an icosahedron is half the length of an edge, and the coordinates of the middle-point of an edge are obtained by dividing the sum of the corresponding coordinates of the two terminal-points by 2. Hence the coordinates of the vertices of $ce_1\ I$ are obtained by simply adding the corresponding coordinates of the terminal-points of all the edges of I [1]).

In this manner two symbols of coordinates of $ee_1\ I$ are found corresponding with the two types of edges of I with respect to the system of coordinates. We may determine only one vertex of each type and deduce from it a coordinate-symbol according to the rule of pentagonal hemiedry.

The computation of the coordinate-symbols now becomes:

$$\begin{array}{lll} I & 2\ ,\ 1+e\ ,\ 0 & \\ I & -2\ ,\ 1+e\ ,\ 0 & \\ ce_1\ I & [0\ ,\ 2+2e\ ,\ 0] & \ldots\ldots\ 6 \text{ vertices;} \\ I & 2\ ,\ 1+e\ ,\ 0 & \\ I & 0\ ,\ 2\ ,\ 1+e & \\ ce_1\ I & [2\ ,\ 3+e\ ,\ 1+e] & :\ 2\ldots\ 24\ \text{„}\ ; \\ & & \text{Total}\ldots\ 30 \text{ vertices.} \end{array}$$

The total number of vertices may be controlled by means of the table of art. 115.

118. The polyhedron $ce_2\ I$ is similar to the convex polyhedron whose vertices are the centres of the faces of I. This polyhedron must be enlarged in such a ratio, that the distance between two adjacent vertices becomes equal to the length of the edges of the icosahedron, i. e. $= 4$.

The coordinates of the centre of a face of I are obtained by adding the corresponding coordinates of the vertices of the face

[1]) The same rule holds to find the ce_1-form of any polytope whose faces are triangles. More generally the coordinates of the vertices of the ce_n-form of a polytope, whose limits l_{n+1} are simplexes, are obtained by adding the corresponding coordinates of the vertices of all the limits l_n of the polytope.

and dividing the sums by 3. It is clear, that, in order to get a polyhedron similar to $ce_2\,I$, the division by 3 may be omitted. The auxiliary polyhedron so defined will be specified in the following computation by $ce_2\,I'$.

First we compute the vertices of $ce_2\,I'$ (two types):

$$\begin{array}{lllll} 1^\circ. & I & 1+e\ , & 0\ , & 2 \\ & I & 0\ , & 2\ , & 1+e \\ & I & 0\ , & -2\ , & 1+e \\ \hline & ce_2\,I' & 1+e\ , & 0\ , & 4+2e\ ; \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} 2^\circ. & I & 2\ , & 1+e\ , & 0 \\ & I & 0\ , & 2\ , & 1+e \\ & I & 1+e\ , & 0\ , & 2 \\ \hline & ce_2\,I' & 3+e\ , & 3+e\ , & 3+e\ . \end{array}$$

Since the faces of I now considered have two vertices in common, the vertices of $ce_2\,I'$ deduced from them are adjacent. Their distance will be found to be $2+2e$.

Hence to obtain the coordinates of the vertices of $ce_2\,I$, those of $ce_2\,I'$ must be multiplied by

$$\frac{4}{2+2e} = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}e\,.$$

Two coordinate-symbols are found:

$$\begin{array}{lll} 1^\circ. & ce_2\,I' & 1+e\ ,\ 0\ ,\ 4+2e \\ & ce_2\,I & [\ 2\ ,\ 0\ ,\ 3+e\ ]\ :\ 2\ \ldots\ldots\ 12\ \text{vertices}; \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 2^\circ. & ce_2\,I' & 3+e\ ,\ 3+e\ ,\ 3+e \\ & ce_2\,I & [1+e\ ,\ 1+e\ ,\ 1+e\ ]\ \ldots\ldots\ 8\ \text{„}\ ; \end{array}$$

Total . . . 20 vertices.

119. To deduce $e_1\,I$ by composition of $ce_1\,I$ and I we must add to the coordinates of each of the vertices of $ce_1\,I$ those of each of the adjacent vertices of I, i. e. of each of the vertices of I from which it is obtained in art. 117. We omit however those additions which would produce a vertex included in a coordinate-symbol already obtained.

$ce_1\ I$ $\quad 0\ ,\ 2+2e\ ,\ 0$
$\quad I$ $\quad 2\ ,\ 1+e\ ,\ 0$

$e_1\ I$ $\quad [2\ ,\ 3+3e\ ,\ 0] : 2 \ldots\ldots\ldots$ 12 vertices;

$ce_1\ I$ $\quad 2\ ,\ 3+e\ ,\ 1+e$
$\quad I$ $\quad 2\ ,\ 1+e\ ,\ 0$

$e_1\ I$ $\quad [4\ ,\ 4+2e\ ,\ 1+e] : 2 \ldots\ldots$ 24 „ ;

$ce_1\ I$ $\quad 2\ ,\ 3+e\ ,\ 1+e$
$\quad I$ $\quad 0\ ,\ 2\ ,\ 1+e$

$e_1\ I$ $\quad [2\ ,\ 5+e\ ,\ 2+2e] : 2 \ldots\ldots$ 24 „ ;

Total . . . 60 vertices.

120. The deduction of $e_2\ I$ from $ce_2\ I$ and I is effected in the same manner as that of $e_1\ I$ from $ce_1\ I$ and I:

$ce_2\ I$ $\quad 2\ ,\ 0\ ,\ 3+e$
$\quad I$ $\quad 1+e\ ,\ 0\ ,\ 2$

$e_2\ I$ $\quad [3+e\ ,\ 0\ ,\ 5+e] : 2 \ldots\ldots\ldots$ 12 vertices;

$ce_2\ I$ $\quad 2\ ,\ 0\ ,\ 3+e$
$\quad I$ $\quad 0\ ,\ 2\ ,\ 1+e$

$e_2\ I$ $\quad [2\ ,\ 2\ ,\ 4+2e] \ldots\ldots\ldots$ 24 „ ;

$ce_2\ I$ $\quad 1+e\ ,\ 1+e\ ,\ 1+e$
$\quad I$ $\quad 2\ ,\ 1+e\ ,\ 0$

$e_2\ I$ $\quad [3+e\ ,\ 2+2e\ ,\ 1+e] : 2 \ldots$ 24 „ ;

Total . . . 60 vertices.

121. To obtain $ce_1\ e_2\ I$ from $ce_2\ I$ and $ce_1\ I$ we must add to the coordinates of each of the vertices of $ce_2\ I$ those of a vertex of ce_1 obtainable from two of the three vertices of I from which the vertex of $ce_2\ I$ can be formed. Instead of the coordinates of a $ce_2\ I$-vertex however we prefer to write separately the two icosahedron-vertices from which it can be obtained by addition:

$ce_2\ I$. 2 , 0 , $3+e$
I $1+e$, 0 , 2
I 0 , 2 , $1+e$
$ce_1\ e_2\ I$ $[3+e\ ,\ 2\ ,\ 6+2e] : 2$ ..... 24 vertices;

$ce_2\ I$ 2 , 0 , $3+e$
I 0 , 2 , $1+e$
I 0 , -2 , $1+e$
$ce_1\ e_2\ I$ $[2\ ,\ 0\ ,\ 5+3e] : 2$ ..... 12 „ ;

$ce_2\ I$ $1+e$, $1+e$, $1+e$
I 2 , $1+e$, 0
I 0 , 2 , $1+e$
$ce_1\ e_2\ I$ $[3+e\ ,\ 4+2e\ ,\ 2+2e] : 2$ .... 24 „ ;

Total... 60 vertices.

122. Finally the polyhedron $e_1\ e_2\ I$ is obtained by the composition of $ce_2\ I$, $ce_1\ I$ and I or, by an identic transformation, of $ce_1\ e_2\ I$ and I. For this we add to the coordinates of each of the vertices of $ce_1\ e_2\ I$ those of one of the two vertices of I used to deduce it in the preceding article.

$ce_1\ e_2\ I$ $3+e$, 2 , $6+2e$
I $1+e$, 0 , 2
$e_1\ e_2\ I$ $[4+2e\ ,\ 2\ ,\ 8+2e] : 2$ ..... 24 vertices;

$ce_1\ e_2\ I$ $3+e$, 2 , $6+2e$
I 0 , 2 , $1+e$
$e_1\ e_2\ I$ $[3+e\ ,\ 4\ ,\ 7+3e] : 2$ ..... 24 „ ;

$ce_1\ e_2\ I$ 2 , 0 , $5+3e$
I 0 , 2 , $1+e$
$e_1\ e_2\ I$ $[2\ ,\ 2\ ,\ 6+4e]$ ..... 24 „ ;

$ce_1\ e_2\ I$ $3+e$, $4+2e$, $2+2e$
I 2 , $1+e$, 0
$e_1\ e_2\ I$ $[5+e\ ,\ 5+3e\ ,\ 2+2e] : 2$ ... 24 „ ;

$ce_1\ e_2\ I$ $3+e$, $4+2e$, $2+2e$
I 0 , 2 , $1+e$
$e_1\ e_2\ I$ $[3+e\ ,\ 6+2e\ ,\ 3+3e] : 2$ ... 24 „ ;

Total... 120 vertices.

123. The following table contains the coordinate-symbols of all the polyhedra of the icosahedron-family and the numbers of vertices represented by them.

The symbols of each of the polyhedra are arranged according to the greatest commensurable part of the coordinates. The ordinate with this greatest commensurable part has been placed first in every symbol.

I	$[2, 1+e, 0]:2$	12
$ce_1\ I$	$[3+e, 1+e, 2]:2$	24
	$[2+2e, 0, 0]$	6
		30
$ce_2\ I$	$[3+e, 2, 0]:2$	12
	$[1+e, 1+e, 1+e]$	8
		20
$e_1\ I$	$[5+e, 2+2e, 2]:2$	24
	$[4+2e, 1+e, 4]:2$	24
	$[3+3e, 0, 2]:2$	12
		60
$e_2\ I$	$[5+e, 3+e, 0]:2$	12
	$[4+2e, 2, 2]$	24
	$[3+e, 2+2e, 1+e]:2$	24
		60
$ce_1\ e_2\ I$	$[6+2e, 3+e, 2]:2$	24
	$[5+3e, 2, 0]:2$	12
	$[4+2e, 2+2e, 3+e]:2$	24
		60
$e_1\ e_2\ I$	$[8+2e, 4+2e, 2]:2$	24
	$[7+3e, 3+e, 4]:2$	24
	$[6+4e, 2, 2]$	24
	$[6+2e, 3+3e, 3+e]:2$	24
	$[5+3e, 2+2e, 5+e]:2$	24
		120

C. *The characteristic numbers of the C_{24}-family.*

124. The determination of the characteristic numbers bears direct relation to the results of the researches of Mrs. STOTT contained in the list of the limiting bodies (Table I) and the incidences (Table III). We obtain the number of vertices of the new geometrical creations from the table of incidences, that of the limiting bodies and limiting faces from the list of the limiting bodies; finally the number of edges is deduced from EULER's theorem [1]).

We begin by applying the principle of expansion and then proceed to the contraction.

125. Forms $e_1\ C_{24}$, $e_2\ C_{24}$, $e_3\ C_{24}$. As the circumpolyhedron of C_{24} is the cube, it is evident, that 8 edges, 12 limiting faces, 6 limiting octahedra meet in a vertex. Accordingly the limiting bodies of vertex import of $e_1\ C_{24}$, $e_2\ C_{24}$, $e_3\ C_{24}$ are respectively C, CO, O. So the number of the vertices is 8, 12 and 6 times 24, viz. 192, 288, 144 [2]).

We deduce from the limiting bodies (24 tO and 24 C for $e_1\ C_{24}$; 24 RCO, 96 P_3 and 24 CO for $e_2\ C_{24}$; 24 O, 96 P_3, 96 P_3, 24 O for $e_3\ C_{24}$) for the numbers of limiting bodies and faces consecutively 48, 240 for $e_1\ C_{24}$; 144, 720 for $e_2\ C_{24}$; 240, 672 for $e_3\ C_{24}$. So the complete result is

C_{24}	(24 ,	96 ,	96 ,	24);
$e_1\ C_{24}$	(192 ,	384 ,	240 ,	48);
$e_2\ C_{24}$	(288 ,	864 ,	720 ,	144);
$e_3\ C_{24}$	(144 ,	576 ,	672 ,	240).

126. Forms $e_1\ e_2\ C_{24}$, $e_1\ e_3\ C_{24}$, $e_2\ e_3\ C_{24}$, $e_1\ e_2\ e_3\ C_{24}$. The number of vertices of $e_1\ e_2\ C_{24}$ is $6f = 576$; of $e_1\ e_3\ C_{24}$ $24r = 576$; of $e_2\ e_3\ C_{24}$ $24r = 576$. For $e_1\ e_2\ e_3\ C_{24}$ we obtain $48r = 1152$. For the limiting bodies and faces the numbers are respectively 144, 720 for $e_1\ e_2\ C_{24}$; 240, 1104 for $e_1\ e_3\ C_{24}$ and $e_2\ e_3\ C_{24}$ and 240, 1392 for $e_1\ e_2\ e_3\ C_{24}$. The complete result is

[1]) We remember, that the author gave in his „Mehrdimensionale Geometrie" II, art. 19—20 p. 60—64, the formula of EULER's theorem for n dimensions, and that his symbol is (e, k, f, r) for the number of vertices (e), edges (k), faces (f) and limiting bodies (r).

[2]) Another shorter expression is: for $e_1 C_{24}$ twice the number k of C_{24}; for $e_2 C_{24}$ thrice the number f; for $e_3 C_{24}$ six times r; as we see by considering the vertices of $e_1 C_{24}$ as extremities of the displaced edges of C_{24}, etc.

$$\begin{array}{rl} e_1\,e_2\,C_{24} & (\ 576\ ,\ 1152\ ,\ 720\ ,\ 144);\\ e_1\,e_3\,C_{24} \\ e_2\,e_3\,C_{24} & (\ 576\ ,\ 1440\ ,\ 1104\ ,\ 240);\\ e_1\,e_2\,e_3\,C_{24} & (1152\ ,\ 2304\ ,\ 1392\ ,\ 240). \end{array}$$

127. Forms $ce_1\,C_{24}$, $ce_2\,C_{24}$, $ce_3\,C_{24}$. In these polytopes there is coincidence of two vertices of each edge ($ce_1\,C_{24}$), three vertices of each face ($ce_2\,C_{24}$) or six vertices of each octahedron ($ce_3\,C_{24}$). So the number of vertices will be $\frac{1}{2}.\ 192$, $\frac{1}{3}.\ 288$, $\frac{1}{6}.\ 144$, viz. 96, 96, 24. This, in combination with the limiting bodies, (24 *CO*, 24 *C* for $ce_1\,C_{24}$; 24 *C*, 24 *CO* for $ce_2\,C_{24}$; 24 *O* for $ce_3\,C_{24}$) gives:

$$\begin{array}{rl} ce_1\,C_{24} \\ ce_2\,C_{24} & (96\ ,\ 288\ ,\ 240\ ,\ 48);\\ ce_3\,C_{24} & (24\ ,\ 96\ ,\ 96\ ,\ 24). \end{array}$$

128. Forms $ce_1\,e_2\,C_{24}$, $ce_1\,e_3\,C_{24}$, $ce_2\,e_3\,C_{24}$, $ce_1\,e_2\,e_3\,C_{24}$. By the application of the principle of contraction we obtain a transformation of the bodies of body-import *tCO*, *tO*, *RCO*, *tCO* into *tC*, *CO*, *C*, *tC*. Consequently $6\,f$, $24\,r$, $24\,r$, $48\,r$ are transformed into $3\,f$, $12\,r$, $8\,r$, $24\,r$, leading to 288, 288, 192, 576 vertices.

The limiting bodies enable us to complete the symbols (48 *tC* for $ce_1\,e_2\,C_{24}$; 24 *CO*, 96 P_3, 24 *RCO* for $ce_1\,e_3\,C_{24}$; 24 *C*, 24 *tO* for $ce_2\,e_3\,C_{24}$; 24 *tC*, 96 P_3, 24 *tCO* for $ce_1\,e_2\,e_3\,C_{24}$):

$$\begin{array}{rl} ce_1\,e_2\,C_{24} & (288\ ,\ 576\ ,\ 336\ ,\ 48);\\ ce_1\,e_3\,C_{24} & (288\ ,\ 864\ ,\ 720\ ,\ 144);\\ ce_2\,e_3\,C_{24} & (192\ ,\ 384\ ,\ 240\ ,\ 48);\\ ce_1\,e_2\,e_3\,C_{24} & (576\ ,\ 1152\ ,\ 720\ ,\ 144). \end{array}$$

D. *The coordinates of the C_{24}-family.*

129. The C_{24} from which the other polytopes of the family will be deduced, is supposed to be referred to a rectangular system of coordinates with axes passing through the centres of opposite limiting bodies. The vertices are then represented by a single coordinate-symbol.

Let the length of the edge be $= 2\sqrt{2}$; then this symbol is found to be

$$[2\ ,\ 2\ ,\ 0\ ,\ 0].$$

The primitive polytopes of the family, from which the others may be deduced by composition (cf. art. 116) are C_{24}, $ce_1\,C_{24}$, $ce_2\,C_{24}$ and $ce_3\,C_{24}$; the latter three being respectively similar to the convex polytopes whose vertices are the middle-points of the edges, the centres of the faces and those of the limiting bodies of C_{24}.

As a consequence of the self-reciproeity of the C_{24} we know, that $ce_3\,C_{24}$ is again a C_{24}, placed however in another position to the system of coordinates than the C_{24} from which we started.

Denoting by C'_{24} this second C_{24} we have the identities:

$$\begin{aligned} C'_{24} &= ce_3\,C'_{24} \quad ; \\ ce_1\,C'_{24} &= ce_2\,C'_{24} \quad ; \\ ce_2\,C'_{24} &= ce_1\,C'_{24} \quad ; \\ ce_3\,C'_{24} &= C'_{24} \quad . \end{aligned}$$

Similar identities exist between the polytopes deducible from these by composition.

Three of these polytopes are deduced from the primitive ones by a symmetrical composition. They may be derived either from C_{24} or from C'_{24} by the same operations and will be obtained but once in the following investigations. They are

$$\begin{aligned} e_3\,C'_{24} &= e_3\,C_{24} \text{ , deducible by composition from } C_{24} \text{ and } ce_3\,C_{24} \text{ ;} \\ ce_1\,e_2\,C_{24} &= ce_1\,e_2\,C_{24} \text{ , } \quad \text{,, } ce_1\,C_{24} \text{ ,, } ce_2\,C_{24} \text{ ;} \\ e_1\,e_2\,e_3\,C_{24} &= e_1\,e_2\,e_3\,C_{24} \text{ , } \quad \text{,, } C_{24}\text{, } ce_1\,C_{24}\text{, } ce_2\,C_{24} \text{ and } ce_3\,C_{24}. \end{aligned}$$

Each of the other polytopes of the family is obtained in two different positions relative to the system of coordinates:

$$\begin{aligned} e_1\,C_{24} &= ce_2\,e_3\,C_{24} \text{ , from } C_{24} \text{ and } ce_1\,C_{24} \text{ ;} \\ ce_2\,e_3\,C_{24} &= e_1\,C_{24} \text{ , ,, } ce_2\,C_{24} \text{ ,, } ce_3\,C_{24} \text{ ;} \\ e_2\,C_{24} &= ce_1\,e_3\,C_{24} \text{ , ,, } C_{24} \text{ ,, } ce_2\,C_{24} \text{ ;} \\ ce_1\,e_3\,C_{24} &= e_2\,C_{24} \text{ , ,, } ce_1\,C_{24} \text{ ,, } ce_3\,C_{24} \text{ ;} \\ e_1\,e_2\,C_{24} &= ce_1\,e_2\,e_3\,C_{24} \text{ , ,, } C_{24}\text{, } ce_1\,C_{24} \text{ and } ce_2\,C_{24} \text{ ;} \\ ce_1\,e_2\,e_3\,C_{24} &= e_1\,e_2\,C_{24} \text{ , ,, } ce_1\,C_{24}\text{, } ce_2\,C_{24} \text{ ,, } ce_3\,C_{24} \text{ ;} \\ e_1\,e_3\,C_{24} &= e_2\,e_3\,C_{24} \text{ , ,, } C_{24}\text{, } ce_1\,C_{24} \text{ ,, } ce_3\,C_{24} \text{ ;} \\ e_2\,e_3\,C_{24} &= e_1\,e_3\,C_{24} \text{ , ,, } C_{24}\text{, } ce_2\,C_{24} \text{ ,, } ce_3\,C_{24} \text{ .} \end{aligned}$$

130. Since the faces of C_{24} are triangles, the coordinates of the vertiees of $ce_1\ C_{24}$ are obtained by adding the eoordinates of the extremities of each of the edges of C_{24} (ef. art. 117, footnote). So one single symbol is found representing the vertiees of $ce_1\ C_{24}$.

C_{24} 2 , 2 , 0 , 0
C_{24} 2 , 0 , 2 , 0

$ce_1\ C_{24}$ [4 , 2 , 2 , 0]..... 96 vertices.

131. We obtain the coordinate-symbols of $ce_2\ C_{24}$ by first determining the coordinates of two adjacent vertiees of an auxiliary polytope $ce_1\ C'_{24}$ obtained by adding the eorresponding coordinates of the vertices of the faees of C_{24} (cf. art. 118).

1°. C_{24} 2 , 2 , 0 , 0
C_{24} 2 , 0 , 2 , 0
C_{24} 2 , 0 , 0 , 2

$ce_2\ C'_{24}$ 6 , 2 , 2 , 2 ;

2°. C_{24} 2 , 2 , 0 , 0
C_{24} 2 , 0 , 2 , 0
C_{24} 0 , 2 , 2 , 0

$ce_2\ C'_{24}$ 4 , 4 , 4 , 0 .

The distanee of these two vertices is found to be $= 4$. Henee the coordinates of the vertices of $ce_2\ C'_{24}$ must be multiplied by $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ to obtain those of $ce_2\ C_{24}$.

Two eoordinate-symbols are found:

1°. $ce_2\ C'_{24}$ 6 , 2 , 2 , 2
$ce_2\ C_{24}$ [3$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$].. 64 vertices;

2°. $ce_2\ C'_{24}$ 4 , 4 , 4 , 0
$ce_2\ C_{24}$ [2$\sqrt{2}$, 2$\sqrt{2}$, 2$\sqrt{2}$, 0].. 32 „ ;

Total.. 96 vertices.

132. In the same way we may determine the coordinates of $ce_3\ C_{24}$ by introdueing an auxiliary polytope whose coordinates of vertiees are the sums of the corresponding coordinates of the vertices of eaeh of the limiting bodies of C_{24}. As the limiting bodies are oetahedra, however, we may take the sums of coordinates of two opposite vertices of each of them.

So we determine the following vertices of the auxiliary polytope $ce_3\ C'_{24}$:

1°.	C_{24}	2 , 2 , 0 , 0	
	C_{24}	2 , —2 , 0 , 0	
	$ce_3\ C'_{24}$	4 , 0 , 0 , 0	;
2°.	C_{24}	2 , 2 , 0 , 0	
	C_{24}	0 , 0 , 2 , 2	
	$ce_3\ C'_{24}$	2 , 2 , 2 , 2	.

The vertices of the two octahedra used here are:

1°. (2 , 2 , 0 , 0) , (2 , —2 , 0 , 0) , (2, 0 , 2 , 0) , (2 , 0 , —2 , 0) , (2 , 0 , 0 , 2) , (2 , 0 , 0 , —2) ;

2°. (2 , 2 , 0 , 0) , (0 , 0 , 2 , 2) , (2 , 0 , 2 , 0) , (0 , 2 , 0 , 2) , (2 , 0 , 0 , 2) , (0 , 2 , 2 , 0).

They have the face (2 , 2 , 0 , 0) (2 , 0 , 2 , 0) (2 , 0 , 0 , 2) in common. Hence they are adjacent limiting bodies of C_{24}, and the vertices deduced from them are adjacent vertices of $ce_3\ C'_{24}$.

As their distance is found to be $= 4$, the coordinates must be multiplied by $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ to obtain those of $ce_3\ C'_{24}$.

Two coordinate-symbols are found:

1°.	$ce_3\ C''_{24}$	4 , 0 , 0 , 0	
	$ce_3\ C_{24}$	$[2\sqrt{2}$, 0 , 0 , 0].....	8 vertices;
2°.	$ce_3\ C'_{24}$	2 , 2 , 2 , 2	
	$ce_3\ C_{24}$	$[\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}]$.....	16 „ ;
		Total...	24 vertices.

133. We now proceed to the further deduction of the coordinate-symbols of the polytopes of the C_{24}family.

The polytope $e_1\ C_{24}$ is obtained by composition of $ce_1\ C_{24}$ and C_{24} (one symbol):

$ce_1\ C_{24}$	4 , 2 , 2 , 0	
C_{24}	2 , 2 , 0 , 0	
$e_1\ C_{24}$	[6 , 4 , 2 , 0].....	192 vertices.

134. The polytope $e_2\,C_{24}$ is obtained by composition of $ce_2\,C_{24}$ and C_{24}:

$ce_2\,C_{24}$	$3\sqrt{2}$	,	$\sqrt{2}$	, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$	
C_{24}	2	,	2	, 0 , 0	
$e_2\,C_{24}$	$[2+3\sqrt{2}$	,	$2+\sqrt{2}$	, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}]$	... 192 vertices;

$ce_2\,C_{24}$	$2\sqrt{2}$	,	$2\sqrt{2}$	, $2\sqrt{2}$, 0	
C_{24}	2	,	2	, 0 , 0	
$e_2\,C_{24}$	$[2+2\sqrt{2}$	,	$2+2\sqrt{2}$	, $2\sqrt{2}$, 0]	... 96 „ ;

Total ... 288 vertices.

135. The polytope $ce_1\,e_2\,C_{24}$ is obtained by composition of $ce_2\,C_{24}$ and $ce_1\,C_{24}$. Instead of a $ce_1\,C_{24}$-vertex however we make use of the two C_{24}-vertices from which it can be obtained by addition.

$ce_2\,C_{24}$	$3\sqrt{2}$	,	$\sqrt{2}$	, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$	
C_{24}	2	,	2	, 0 , 0	
C_{24}	2	,	0	, 2 , 0	
$ce_1\,e_2\,C_{24}$	$[4+3\sqrt{2}$	,	$2+\sqrt{2}$	, $2+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}]$	.. 192 vertices;

$ce_2\,C_{24}$	$2\sqrt{2}$	,	$2\sqrt{2}$	, $2\sqrt{2}$, 0	
C_{24}	2	,	2	, 0 , 0	
C_{24}	2	,	0	, 2 , 0	
$ce_1\,e_2\,C_{24}$	$[4+2\sqrt{2}$	,	$2+2\sqrt{2}$	, $2+2\sqrt{2}$, 0]	.. 96 „ ;

Total ... 288 vertices.

136. The polytope $e_1\,e_2\,C_{24}$ is obtained by composition of $ce_1\,e_2\,C_{24}$ and C_{24} (or $ce_1\,C_{24}$, $ce_2\,C_{24}$ and C_{24}, cf. art. 122).

$ce_1\,e_2\,C_{24}$	$4+3\sqrt{2}$	,	$2+\sqrt{2}$	, $2+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$	
C_{24}	2	,	2	, 0 , 0	
$e_1\,e_2\,C_{24}$	$[6+3\sqrt{2}$	,	$4+\sqrt{2}$	, $2+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}]$	.. 384 vertices;

$ce_1\,e_2\,C_{24}$	$4+2\sqrt{2}$	,	$2+2\sqrt{2}$	, $2+2\sqrt{2}$, 0	
C_{24}	2	,	2	, 0 , 0	
$e_1\,e_2\,C_{24}$	$[6+2\sqrt{2}$	,	$4+2\sqrt{2}$	, $2+2\sqrt{2}$, 0]	.. 192 „ ;

Total ... 576 vertices.

137. The polytope $e_3\,C_{24}$ is obtained by composition of $ce_3\,C_{24}$ and C_{24}:

$ce_3\,C_{24}$	$2\sqrt{2}$	,	0	, 0 ,	0	
C_{24}	2	,	2	, 0 ,	0	
$e_3\,C_{24}$	$[2+2\sqrt{2}$	,	2	, 0 ,	0]. . . .	48 vertices;
$ce_3\,C_{24}$	$\sqrt{2}$	,	$\sqrt{2}$	, $\sqrt{2}$,	$\sqrt{2}$	
C_{24}	2	,	2	, 0 ,	0	
$e_3\,C_{24}$	$[2+\sqrt{2}$	,	$2+\sqrt{2}$	, $\sqrt{2}$,	$\sqrt{2}]$. . . .	96 „ ;

Total . . . 144 vertices.

138. The polytope $ce_1\,e_3\,C_{24}$ is obtained by composition of $ce_3\,C_{24}$ and $ce_1\,C_{24}$. The coordinates of the $ce_1\,C_{24}$-vertex are again replaced by those of the C_{24}, from which they can be obtained by addition.

$ce_3\,C_{24}$	$2\sqrt{2}$	,	0	, 0 ,	0	
C_{24}	2	,	2	, 0 ,	0	
C_{24}	2	,	0	, 2 ,	0	
$ce_1\,e_3\,C_{24}$	$[4+2\sqrt{2}$	,	2	, 2 ,	0]. .	96 vertices;
$ce_3\,C_{24}$	$\sqrt{2}$	,	$\sqrt{2}$	, $\sqrt{2}$,	$\sqrt{2}$	
C_{24}	2	,	2	, 0 ,	0	
C_{24}	2	,	0	, 2 ,	0	
$ce_1\,e_3\,C_{24}$	$[4+\sqrt{2}$	,	$2+\sqrt{2}$	, $2+\sqrt{2}$,	$\sqrt{2}]$. .	192 „ ;

Total . . . 288 vertices.

139. The polytope $e_1\,e_3\,C_{24}$ is obtained by composition of $ce_1\,e_3\,C_{24}$ and C_{24}.

$ce_1\,e_3\,C_{24}$	$4+2\sqrt{2}$	,	2	, 2 ,	0	
C_{24}	2	,	2	, 0 ,	0	
$e_1\,e_3\,C_{24}$	$[6+2\sqrt{2}$	,	4	, 2 ,	0]. .	192 vertices;
$ce_1\,e_3\,C_{24}$	$4+\sqrt{2}$	,	$2+\sqrt{2}$	, $2+\sqrt{2}$,	$\sqrt{2}$	
C_{24}	2	,	2	, 0 ,	0	
$e_1\,e_3\,C_{24}$	$[6+\sqrt{2}$	,	$4+\sqrt{2}$	, $2+\sqrt{2}$,	$\sqrt{2}]$. .	384 „ ;

Total . . . 576 vertices.

140. The polytope $ce_2\,e_3\,C_{24}$ is obtained by composition of $ce_3\,C_{24}$ and $ce_2\,C_{24}$:

$ce_3\,C_{24}$	$2\sqrt{2}$,	0 ,	0 , 0
$ce_2\,C_{24}$	$3\sqrt{2}$,	$\sqrt{2}$,	$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$
$ce_2\,e_3\,C_{24}$	$[5\sqrt{2}$,	$\sqrt{2}$,	$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}]$ ..... 64 vertices;
$ce_3\,C_{24}$	$\sqrt{2}$,	$\sqrt{2}$,	$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$
$ce_2\,C_{24}$	$3\sqrt{2}$,	$\sqrt{2}$,	$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$
$ce_2\,e_3\,C_{24}$	$[4\sqrt{2}$,	$2\sqrt{2}$,	$2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}]$ ..... 64 „ ;
$ce_3\,C_{24}$	$\sqrt{2}$,	$\sqrt{2}$,	$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$
$ce_2\,C_{24}$	$2\sqrt{2}$,	$2\sqrt{2}$,	$2\sqrt{2}$, 0
$ce_2\,e_3\,C_{24}$	$[3\sqrt{2}$,	$3\sqrt{2}$,	$3\sqrt{2}$, $\sqrt{2}]$ ..... 64 „ ;

Total ... 192 vertices.

141. The polytope $e_2\,e_3\,C_{24}$ is obtained by composition of $ce_2\,e_3\,C_{24}$ and C_{24}:

$ce_2\,e_3\,C_{24}$	$5\sqrt{2}$,	$\sqrt{2}$,	$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$
C_{24}	2 ,	2 ,	0 , 0
$e_2\,e_3\,C_{24}$	$[2+5\sqrt{2}$,	$2+\sqrt{2}$,	$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}]$ .. 192 vertices;
$ce_2\,e_3\,C_{24}$	$4\sqrt{2}$,	$2\sqrt{2}$,	$2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$
C_{24}	2 ,	2 ,	0 , 0
$e_2\,e_3\,C_{24}$	$[2+4\sqrt{2}$,	$2+2\sqrt{2}$,	$2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}]$ .. 192 „ ;
$ce_2\,e_3\,C_{24}$	$3\sqrt{2}$,	$3\sqrt{2}$,	$3\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$
C_{24}	2 ,	2 ,	0 , 0
$e_2\,e_3\,C_{24}$	$[2+3\sqrt{2}$,	$2+3\sqrt{2}$,	$3\sqrt{2}$, $\sqrt{2}]$ .. 192 „ ;

Total ... 576 vertices.

142. The polytope $ce_1\,e_2\,e_3\,C_{24}$ is obtained by composition of $ce_2\,e_3\,C_{24}$ and $ce_1\,C_{24}$. The coordinates of the $ce_1\,C_{24}$-vertex may be replaced by the two C_{24}-vertices, from which it can be obtained.

$ce_2e_3C_{24}$	$5\sqrt{2}$	, $\sqrt{2}$	, $\sqrt{2}$	, $\sqrt{2}$	
C_{24}	2	, 2	, 0	, 0	
C_{24}	2	, 0	, 2	, 0	
$ce_1e_2e_3C_{24}$	$[4+5\sqrt{2}$	, $2+\sqrt{2}$	, $2+\sqrt{2}$	, $\sqrt{2}]$	.. 192 vertices;

$ce_2e_3C_{24}$	$4\sqrt{2}$	, $2\sqrt{2}$	, $2\sqrt{2}$	, $2\sqrt{2}$	
C_{24}	2	, 2	, 0	, 0	
C_{24}	2	, 0	, 2	, 0	
$ce_1e_2e_3C_{24}$	$[4+4\sqrt{2}$	, $2+2\sqrt{2}$	, $2+2\sqrt{2}$	, $2\sqrt{2}]$	.. 192 „ ;

$ce_2e_3C_{24}$	$3\sqrt{2}$	, $3\sqrt{2}$	, $3\sqrt{2}$	, $\sqrt{2}$	
C_{24}	2	, 2	, 0	, 0	
C_{24}	2	, 0	, 2	, 0	
$ce_1e_2e_3C_{24}$	$[4+3\sqrt{2}$	, $2+3\sqrt{2}$	, $2+3\sqrt{2}$	, $\sqrt{2}]$	.. 192 „ ;

Total . . . 576 vertices.

143. The polytope $e_1e_2e_3C_{24}$ is obtained by composition of $ce_1e_2e_3C_{24}$ and C_{24}.

$ce_1e_2e_3C_{24}$	$4+5\sqrt{2}$	, $2+\sqrt{2}$	, $2+\sqrt{2}$	, $\sqrt{2}$	
C_{24}	2	, 2	, 0	, 0	
$e_1e_2e_3C_{24}$	$[6+5\sqrt{2}$	, $4+\sqrt{2}$	, $2+\sqrt{2}$	, $\sqrt{2}]$	. 384 vertices;

$ce_1e_2e_3C_{24}$	$4+4\sqrt{2}$	, $2+2\sqrt{2}$	, $2+2\sqrt{2}$	, $2\sqrt{2}$	
C_{24}	2	, 2	, 0	, 0	
$e_1e_2e_3C_{24}$	$[6+4\sqrt{2}$	, $4+2\sqrt{2}$	, $2+2\sqrt{2}$	, $2\sqrt{2}]$	. 384 „ ;

$ce_1e_2e_3C_{24}$	$4+3\sqrt{2}$	, $2+3\sqrt{2}$	, $2+3\sqrt{2}$	, $\sqrt{2}$	
C_{24}	2	, 2	, 0	, 0	
$e_1e_2e_3C_{24}$	$[6+3\sqrt{2}$	, $4+3\sqrt{2}$	, $2+3\sqrt{2}$	, $\sqrt{2}]$	. 384 „ ;

Total . . . 1152 vertices.

144. The following table contains the coordinate-symbols of the polytopes of the C_{24}-family and the numbers of vertices represented by each of them.

C_{24}	[2 , 2 , 0 , 0]	24
$ce_1\ C_{24}$	[4 , 2 , 2 , 0]	96
$ce_2\ C_{24}$	[$3\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$]	64
	[$2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, 0]	32
		96
$ce_3\ C_{24}$	[$2\sqrt{2}$, 0 , 0 , 0]	8
	[$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$]	16
		24
$e_1\ C_{24}$	[6 , 4 , 2 , 0]	192
$e_2\ C_{24}$	[$2+3\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$]	192
	[$2+2\sqrt{2}$, $2+2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, 0]	96
		288
$ce_1\ e_2\ C_{24}$	[$4+3\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$]	192
	[$4+2\sqrt{2}$, $2+2\sqrt{2}$, $2+2\sqrt{2}$, 0]	96
		288
$e_1\ e_2\ C_{24}$	[$6+3\sqrt{2}$, $4+\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$]	384
	[$6+2\sqrt{2}$, $4+2\sqrt{2}$, $2+2\sqrt{2}$, 0]	192
		576
$e_3\ C_{24}$	[$2+2\sqrt{2}$, 2 , 0 , 0]	48
	[$2+\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$]	96
		144
$ce_1\ e_3\ C_{24}$	[$4+2\sqrt{2}$, 2 , 2 , 0]	96
	[$4+\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$]	192
		288
$e_1\ e_3\ C_{24}$	[$6+2\sqrt{2}$, 4 , 2 , 0]	192
	[$6+\sqrt{2}$, $4+\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$]	384
		576

$ce_2\,e_3\,C_{24}$	$[5\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}]$	64
	$[4\sqrt{2}\ ,\ 2\sqrt{2}\ ,\ 2\sqrt{2}\ ,\ 2\sqrt{2}]$	64
	$[3\sqrt{2}\ ,\ 3\sqrt{2}\ ,\ 3\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}]$	64
		192
$e_2\,e_3\,C_{24}$	$[2+5\sqrt{2}\ ,\ 2+2\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}]$	192
	$[2+4\sqrt{2}\ ,\ 2+2\sqrt{2}\ ,\ 2\sqrt{2}\ ,\ 2\sqrt{2}]$	192
	$[2+3\sqrt{2}\ ,\ 2+3\sqrt{2}\ ,\ 3\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}]$	192
		576
$ce_1\,e_2\,e_3\,C_{24}$	$[4+5\sqrt{2}\ ,\ 2+\sqrt{2}\ ,\ 2+\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}]$	192
	$[4+4\sqrt{2}\ ,\ 2+2\sqrt{2}\ ,\ 2+2\sqrt{2}\ ,\ 2\sqrt{2}]$	192
	$[4+3\sqrt{2}\ ,\ 2+3\sqrt{2}\ ,\ 2+3\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}]$	192
		576
$e_1\,e_2\,e_3\,C_{24}$	$[6+5\sqrt{2}\ ,\ 4+\sqrt{2}\ ,\ 2+\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}]$	384
	$[6+4\sqrt{2}\ ,\ 4+2\sqrt{2}\ ,\ 2+2\sqrt{2}\ ,\ 2\sqrt{2}]$	384
	$[6+3\sqrt{2}\ ,\ 4+3\sqrt{2}\ ,\ 2+3\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}]$	384
		1152

E. *The characteristic numbers of the C_{600}-family.*

145. Forms $e_1\,C_{600}$, $e_2\,C_{600}$, $e_3\,C_{600}$. The number of vertices is consecutively $2k$, $3f$, $4r$, viz. 1440, 3600, 2400. After this we consider the limiting bodies (600 *tT*, 120 *I* for $e_1\,C_{600}$; 600 *CO*, 720 P_5, 120 *ID* for $e_2\,C_{600}$; 600 *T*, 1200 P_3, 720 P_5, 120 *D* for $e_3\,C_{600}$) and obtain for limiting bodies and faces 720, 3600 for $e_1\,C_{600}$; 1440, 8640 for $e_2\,C_{600}$; 2640, 7440 for $e_3\,C_{600}$. This gives

C_{600}	(120 ,	720 ,	1200 ,	600) ;
$e_1\,C_{600}$	(1440 ,	4320 ,	3600 ,	720) ;
$e_2\,C_{600}$	(3600 ,	10800 ,	8640 ,	1440) ;
$e_3\,C_{600}$	(2400 ,	7200 ,	7440 ,	2640) .

146. Forms $e_1\,e_2\,C_{600}$, $e_1\,e_3\,C_{600}$, $e_2\,e_3\,C_{600}$, $e_1\,e_2\,e_3\,C_{600}$. The number of vertices is given by the relations $6f$, $12r$, $12r$, $24r$, viz. 7200, 7200, 7200, 14400. By the consideration of the limiting bodies (600 *tO*, 720 P_5, 120 *tI* for $e_1\,e_2\,C_{600}$; 600 *tT*, 1200 P_6, 720 P_5, 120 *RID* for $e_1\,e_3\,C_{600}$; 600 *CO*, 1200 P_3,

720 P_{10}, 120 $/D$ for $e_2 e_3 C_{600}$; 600 $/O$, 1200 P_6, 720 P_{10}, 120 $/\!/D$ for $e_1 e_2 e_3 C_{600}$) we obtain consecutively for the limiting bodies 1440, 2640, 2640, 2640 and for the faces 8640, 13440, 13440, 17040. This gives

$$\begin{array}{rl} e_1 e_2 C_{600} & (\ 7200\ ,\ 14400\ ,\ 8640\ ,\ 1440)\ ; \\ e_1 e_3 C_{600} & (\ 7200\ ,\ 18000\ ,\ 13440\ ,\ 2640)\ ; \\ e_2 e_3 C_{600} & (\ 7200\ ,\ 18000\ ,\ 13440\ ,\ 2640)\ ; \\ e_1 e_2 e_3 C_{600} & (14400\ ,\ 28800\ ,\ 17040\ ,\ 2640)\ . \end{array}$$

147. Forms $ce_1 C_{600}$, $ce_2 C_{600}$, $ce_3 C_{600}$. The numbers of vertices are $\frac{1}{2}\cdot 1440$, $\frac{1}{3}\cdot 3600$, $\frac{1}{4}\cdot 2400$, viz. 720, 1200, 600. By the consideration of the limiting bodies (600 O, 120 I for $ce_1 C_{600}$; 600 T, 120 $/D$ for $ce_2 C_{600}$; 120 D for $ce_3 C_{600}$) we obtain for the limiting bodies 720, 720, 120 and for the limiting faces 3600, 3120, 720. This gives

$$\begin{array}{rl} ce_1 C_{600} & (\ 720\ ,\ 3600\ ,\ 3600\ ,\ 720)\ ; \\ ce_2 C_{600} & (1200\ ,\ 3600\ ,\ 3120\ ,\ 720)\ ; \\ ce_3 C_{600} & (\ 600\ ,\ 1200\ ,\ 720\ ,\ 120)\ . \end{array}$$

148. Forms $ce_1 e_2 C_{600}$, $ce_1 e_3 C_{600}$, $ce_2 e_3 C_{600}$, $ce_1 e_2 e_3 C_{600}$. By the c-operation the bodies of body-import $/O$, $/T$, CO, $/O$, are transformed into $/T$, O, T, $/T$, and accordingly $6f$, $12r$, $12r$, $24r$ become $3f$, $6r$, $4r$, $12r$ leading to 3600, 3600, 2400, 7200 vertices. By the consideration of the limiting bodies (600 $/T$, 120 $/I$ for $ce_1 e_2 C_{600}$; 600 O, 1200 P_3, 120 RID for $ce_1 e_3 C_{600}$; 600 T, 120 $/D$ for $ce_2 e_3 C_{600}$; 600 $/T$, 1200 P_3, 120 $/\!/D$ for $ce_1 e_2 e_3 C_{600}$) we obtain for the limiting bodies 720, 1920, 720, 1920 and for the limiting faces 4320, 9120, 3120, 9120. This gives

$$\begin{array}{rl} ce_1 e_2 C_{600} & (3600\ ,\ 7200\ ,\ 4320\ ,\ 720)\ ; \\ ce_1 e_3 C_{600} & (3600\ ,\ 10800\ ,\ 9120\ ,\ 1920)\ ; \\ ce_2 e_3 C_{600} & (2400\ ,\ 4800\ ,\ 3120\ ,\ 720)\ ; \\ ce_1 e_2 e_3 C_{600} & (7200\ ,\ 11400\ ,\ 9120\ ,\ 1920)\ . \end{array}$$

F. *The coordinates of the C_{600}-family.*

149. To deduce the coordinate-symbols of the polytopes of the C_{600}-family we may choose as the „patriarch" (art. 18) of the

family either the C_{600} or the C_{120}, neither of which however can be represented by a single coordinate-symbol. We choose the C_{600}, as it seems to be the simplest one.

When the length of the edge is assumed to be $= 4$, the C_{600} can be represented by three coordinate-symbols [1])

$[2+2e, 0, 0, 0]$		8
$[3+e, 1+e, 2, 0]$	: 2	96
$[1+e, 1+e, 1+e, 1+e]$		16
		120

where $e = \sqrt{5}$ and : 2 denotes pentagonal hemiedry (cf. art. 116). The numbers on the right side are the numbers of vertices represented by each of the symbols.

150. From C_{600} we first deduce the other primitive forms of the family $ce_1\ C_{600}$, $ce_2\ C_{600}$ and $ce_3\ C_{600} = C_{120}$.

Since the faces of C_{600} are triangles, the coordinates of the vertices of $ce_1\ C_{600}$ are obtained by adding those of two adjacent vertices of C_{600} (see art. 117, foot-note).

Six coordinate symbols are obtained. [2])

C_{600}	$2+2e, 0, 0, 0$		
C_{600}	$3+e, 1+e, 2, 0$		
$ce_1\ C_{600}$	$[5+3e, 1+e, 2, 0]$	: 2	96
C_{600}	$3+e, 1+e, 2, 0$		
C_{600}	$3+e, 1+e, -2, 0$		
$ce_1\ C_{600}$	$[6+2e, 2+2e, 0, 0]$		48
C_{600}	$3+e, 1+e, 2, 0$		
C_{600}	$3+e, 0, 1+e, 2$		
$ce_1\ C_{600}$	$[6+2e, 1+e, 3+e, 2]$	: 2	192

[1]) P. H. Schoute. Mehrdimensionale Geometrie II, § 7, art. 69, p. 209.

P. H. Schoute. Regelmässige Schnitte und Projectionen des Hundertzwanzigzelles und Sechshundertzelles im vierdimensionalen Raume. Verh. der Kon. Akad. v. W. te Amsterdam. Eerste sectie. Deel II, n°. 7. Tabelle I A.

E. L. Elte. The semiregular Polytopes of the hyperspaces (Dissertation, Groningen 1912) § 15, p. 23; Table E, p. 28 (multiplied by $\frac{1}{2}(5+e)$).

[2]) Elte. Diss. § 15, p. 24, Table A; § 16, p. 31 Table H, the last six symbols (multiplied by $5+e$).

C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0	
C_{600}	$1+e$, $3+e$, 0 , 2	
$ce_1\ C_{600}$	$[4+2e$, $4+2e$, 2 , $2\ ]$	96
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0	
C_{600}	2 , $3+e$, $1+e$, 0	
$ce_1\ C_{600}$	$[5+e$, $4+2e$, $3+e$, $0\ ] : 2$	96
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0	
C_{600}	$1+e$, $1+e$, $1+e$, $1+e$	
$ce_1\ C_{600}$	$[4+2e$, $2+2e$, $3+e$, $1+e] : 2$	192
		720

151. In the same manner, the limiting bodies of C_{600} being tetrahedra, we find the coordinates of the vertices of $ce_2\ C_{600}$ by adding those of three adjacent vertices of C_{600} (vertices of a same face) (see art. 117 foot-note).

Ten coordinate-symbols are obtained. [1])

C_{600}	$2+2e$, 0 , 0 , 0	
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0	
C_{600}	$3+e$, $1+e$, -2 , 0	
$ce_2\ C_{600}$	$[8+4e$, $2+2e$, 0 , $0\ ]$	48
C_{600}	$2+2e$, 0 , 0 , 0	
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0	
C_{600}	$3+e$, 2 , 0 , $1+e$	
$ce_2\ C_{600}$	$[8+4e$, $3+e$, 2 , $1+e] : 2$	192
C_{600}	$1+e$, $1+e$, $1+e$, $1+e$	
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0	
C_{600}	$3+e$, 0 , $1+e$, 2	
$ce_2\ C_{600}$	$[7+3e$, $2+2e$, $4+2e$, $3+e] : 2$	192

[1]) Elte. Diss. § 15, p. 26, the first ten symbols of Table C (multiplied by 2); § 16, p. 29, Table F.

C_{600}	$1+e$, $1+e$, $1+e$, $1+e$	
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0	
C_{600}	$1+e$, $3+e$, 0 , 2	
$ce_2\ C_{600}$	$[5+3e$, $5+3e$, $3+e$, $3+e]$	96
C_{600}	$1+e$, $1+e$, $1+e$, $1+e$	
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0	
C_{600}	2 , $3+e$, $1+e$, 0	
$ce_2\ C'_{600}$	$[6+2e$, $5+3e$, $4+2e$, $1+e] : 2$	192
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0	
C_{600}	$3+e$, $1+e$, -2 , 0	
C'_{600}	$3+e$, 2 , 0 , $1+e$	
$ce_2\ C'_{600}$	$[9+3e$, $4+2e$, 0 , $1+e] : 2$	96
C'_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0	
C'_{600}	$3+e$, 0 , $1+e$, 2	
C'_{600}	$3+e$, 2 , 0 , $1+e$	
$ce_2\ C'_{600}$	$[9+3e$, $3+e$, $3+e$, $3+e]$	64
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0	
C'_{600}	$3+e$, $1+e$, -2 , 0	
C'_{600}	$1+e$, $3+e$, 0 , 2	
$ce_2\ C'_{600}$	$[7+3e$, $5+3e$, 0 , $2\ ] : 2$	96
C'_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0	
C'_{600}	$3+e$, 0 , $1+e$, 2	
C'_{600}	$1+e$, 2 , $3+e$, 0	
$ce_2\ C'_{600}$	$[7+3e$, $3+e$, $6+2e$, $2\ ] : 2$	192
C'_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0	
C'_{600}	2 , $3+e$, $1+e$, 0	
C'_{600}	$1+e$, 2 , $3+e$, 0	
$ce_2\ C'_{600}$	$[6+2e$, $6+2e$, $6+2e$, $0\ ]$	32
		1200

152. To obtain the coordinate-symbols of $ce_3\ C_{600}$ we first deduce an auxiliary polytope, $ce_3\ C'_{600}$, whose vertex-coordinates are obtained

by adding those of four adjacent vertices of C_{600} (vertices of a same limiting tetrahedron).

The coordinates of the vertices of $ce_3\ C'_{600}$ are to be multiplied by such a number that the edge of it acquires the length 4. The length of the edge of $ce_3\ C'_{600}$ (= distance of the first and the second vertex of $ce_3\ C'_{600}$ in the following computation) is found to be $= 2 + 2e$. Hence the multiplier required is $\frac{1}{2}(e - 1)$.

Seven coordinate-symbols are obtained. [1])

C_{600}	$2 + 2e\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0$	
C_{600}	$3 + e\ ,\ 1 + e\ ,\ 2\ ,\ 0$	
C_{600}	$3 + e\ ,\ 0\ ,\ 1 + e\ ,\ 2$	
C_{600}	$3 + e\ ,\ 2\ ,\ 0\ ,\ 1 + e$	
$ce_3\ C'_{600}$	$11 + 5e\ ,\ 3 + e\ ,\ 3 + e\ ,\ 3 + e$	
$ce_3\ C_{600}$	$[\ 7 + 3e\ ,\ 1 + e\ ,\ 1 + e\ ,\ 1 + e\ ]$	64
C_{600}	$2 + 2e\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0$	
C_{600}	$3 + e\ ,\ 1 + e\ ,\ 2\ ,\ 0$	
C_{600}	$3 + e\ ,\ 0\ ,\ 1 + e\ ,\ 2$	
C_{600}	$3 + e\ ,\ 0\ ,\ 1 + e\ ,\ -2$	
$ce_3\ C'_{600}$	$11 + 5e\ ,\ 1 + e\ ,\ 4 + 2e\ ,\ 0$	
$ce_3\ C_{600}$	$[\ 7 + 3e\ ,\ 2\ ,\ 3 + e\ ,\ 0\ ]\ :\ 2$	96
C'_{600}	$1 + e\ ,\ 1 + e\ ,\ 1 + e\ ,\ 1 + e$	
C'_{600}	$3 + e\ ,\ 1 + e\ ,\ 2\ ,\ 0$	
C'_{600}	$3 + e\ ,\ 0\ ,\ 1 + e\ ,\ 2$	
C'_{600}	$3 + e\ ,\ 2\ ,\ 0\ ,\ 1 + e$	
$ce_3\ C'_{600}$	$10 + 4e\ ,\ 4 + 2e\ ,\ 4 + 2e\ ,\ 4 + 2e$	
$ce_3\ C'_{600}$	$[\ 5 + 3e\ ,\ 3 + e\ ,\ 3 + e\ ,\ 3 + e\ ]$	64
C_{600}	$1 + e\ ,\ 1 + e\ ,\ 1 + e\ ,\ 1 + e$	
C_{600}	$3 + e\ ,\ 1 + e\ ,\ 2\ ,\ 0$	
C_{600}	$2\ ,\ 3 + e\ ,\ 1 + e\ ,\ 0$	
C_{600}	$1 + e\ ,\ 2\ ,\ 3 + e\ ,\ 0$	
$ce_3\ C'_{600}$	$7 + 3e\ ,\ 7 + 3e\ ,\ 7 + 3e\ ,\ 1 + e$	
$ce_3\ C_{600}$	$[\ 4 + 2e\ ,\ 4 + 2e\ ,\ 4 + 2e\ ,\ 2\ ]$	64

[1]) P. H. Schoute. Regelmässige Schnitte und Projectionen, Tabelle III, C ($ce_3\ C'_{600}$). Elte, Diss., § 15, p. 27, Table D; § 16, p. 32, Table K ($ce_3\ C'_{600}$).

C_{600}	$1+e$, $1+e$, $1+e$, $1+e$		
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0		
C_{600}	$1+e$, $3+e$, 0 , 2		
C_{600}	2 , $3+e$, $1+e$, 0		
$ce_3\ C'_{600}$	$7+3e$, $8+4e$, $4+2e$, $3+e$		
$ce_3\ C_{600}$	$[\ 4+2e$, $6+2e$, $3+e$, $1+e\ ]$	: 2	192
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0		
C_{600}	$3+e$, 0 , $1+e$, 2		
C_{600}	$3+e$, 0 , $1+e$, -2		
C_{600}	$1+e$, 2 , $3+e$, 0		
$ce_3\ C'_{600}$	$10+4e$, $3+e$, $7+3e$, 0		
$ce_3\ C_{600}$	$[\ 5+3e$, $1+e$, $4+2e$, $0\ ]$	: 2	96
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0		
C_{600}	$3+e$, $1+e$, -2 , 0		
C_{600}	$1+e$, $3+e$, 0 , 2		
C_{600}	$1+e$, $3+e$, 0 , -2		
$ce_3\ C'_{600}$	$8+4e$, $8+4e$, 0 , 0		
$ce_3\ C_{600}$	$[\ 6+2e$, $6+2e$, 0 , $0\ ]$		24
			600

153. We now proceed to deduce the coordinate-symbols of the other polytopes of the family by composition of the primitive ones.

Deduction of $e_1\ C_{600}$ by composition of $ce_1\ C_{600}$ and C_{600}.

$ce_1\ C_{600}$	$5+3e$, $1+e$, 2 , 0		
C_{600}	$2+2e$, 0 , 0 , 0		
$e_1\ C_{600}$	$[7+5e$, $1+e$, 2 , $0\ ]$	: 2	96
$ce_1\ C_{600}$	$5+3e$, $1+e$, 2 , 0		
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0		
$e_1\ C_{600}$	$[8+4e$, $2+2e$, 4 , $0\ ]$	: 2	96
$ce_1\ C_{600}$	$6+2e$, $2+2e$, 0 , 0		
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0		
$e_1\ C_{600}$	$[9+3e$, $3+3e$, 2 , $0\ ]$	: 2	96

$ce_1\ C_{600}$	$6+2e$, $1+e$, $3+e$, 2		
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0		
$e_1\ C_{600}$	$[9+3e$, $2+2e$, $5+e$, $2\ ]$	: 2	192
$ce_1\ C_{600}$	$6+2e$, $1+e$, $3+e$, 2		
C_{600}	$3+e$, 0 , $1+e$, 2		
$e_1\ C_{600}$	$[9+3e$, $1+e$, $4+2e$, $4\ ]$	: 2	192
$ce_1\ C_{600}$	$4+2e$, $4+2e$, 2 , 2		
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0		
$e_1\ C_{600}$	$[7+3e$, $5+3e$, 4 , $2\ ]$	: 2	192
$ce_1\ C_{600}$	$5+e$, $4+2e$, $3+e$, 0		
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0		
$e_1\ C_{600}$	$[8+2e$, $5+3e$, $5+e$, $0\ ]$	: 2	96
$ce_1\ C_{600}$	$5+e$, $4+2e$, $3+e$, 0		
C_{600}	2 , $3+e$, $1+e$, 0		
$e_1\ C_{600}$	$[7+e$, $7+3e$, $4+2e$, $0\ ]$	: 2	96
$ce_1\ C_{600}$	$4+2e$, $2+2e$, $3+e$, $1+e$		
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0		
$e_1\ C_{600}$	$[7+3e$, $3+3e$, $5+e$, $1+e\ ]$	: 2	192
$ce_1\ C_{600}$	$4+2e$, $2+2e$, $3+e$, $1+e$		
C_{600}	$1+e$, $1+e$, $1+e$, $1+e$		
$e_1\ C_{600}$	$[5+3e$, $3+3e$, $4+2e$, $2+2e]$	: 2	192
			1440

154. Deduction of $e_2\ C_{600}$ by composition of $ce_2\ C_{600}$ and C_{600}. [1])

$ce_2\ C_{600}$	$8+4e$, $2+2e$, 0 , 0		
C_{600}	$2+2e$, 0 , 0 , 0		
$e_2\ C_{600}$	$[10+6e$, $2+2e$, 0 , $0\ ]$		48
$ce_2\ C_{600}$	$8+4e$, $2+2e$, 0 , 0		
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0		
$e_2\ C_{600}$	$[11+5e$, $3+3e$, 2 , $0\ ]$	: 2	96

[1]) Elte, Diss. § 15, p. 25, Table B.

$ce_2\ C_{600}$	$8+4e\ ,\ 3+e\ ,\ 2\ ,\ 1+e$		
C_{600}	$2+2e\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0$		
$e_2\ C_{600}$	$[10+6e\ ,\ 3+e\ ,\ 2\ ,\ 1+e\ ]$	: 2	192

$ce_2\ C_{600}$	$8+4e\ ,\ 3+e\ ,\ 2\ ,\ 1+e$		
C_{600}	$3+e\ ,\ 1+e\ ,\ 2\ ,\ 0$		
$e_2\ C_{600}$	$[11+5e\ ,\ 4+2e\ ,\ 4\ ,\ 1+e\ ]$	: 2	192

$ce_2\ C_{600}$	$8+4e\ ,\ 3+e\ ,\ 2\ ,\ 1+e$		
C_{600}	$3+e\ ,\ 2\ ,\ 0\ ,\ 1+e$		
$e_2\ C_{600}$	$[11+5e\ ,\ 5+e\ ,\ 2\ ,\ 2+2e]$	: 2	192

$ce_2\ C'_{600}$	$7+3e\ ,\ 2+2e\ ,\ 4+2e\ ,\ 3+e$		
C'_{600}	$1+e\ ,\ 1+e\ ,\ 1+e\ ,\ 1+e$		
$e_2\ C'_{600}$	$[\ 8+4e\ ,\ 3+3e\ ,\ 5+3e\ ,\ 4+2e]$	: 2	192

$ce_2\ C'_{600}$	$7+3e\ ,\ 2+2e\ ,\ 4+2e\ ,\ 3+e$		
C'_{600}	$3+e\ ,\ 1+e\ ,\ 2\ ,\ 0$		
$e_2\ C_{600}$	$[10+4e\ ,\ 3+3e\ ,\ 6+2e\ ,\ 3+e\ ]$	: 2	192

$ce_2\ C_{600}$	$7+3e\ ,\ 2+2e\ ,\ 4+2e\ ,\ 3+e$		
C'_{600}	$3+e\ ,\ 0\ ,\ 1+e\ ,\ 2$		
$e_2\ C'_{600}$	$[10+4e\ ,\ 2+2e\ ,\ 5+3e\ ,\ 5+e\ ]$	: 2	192

$ce_2\ C_{600}$	$5+3e\ ,\ 5+3e\ ,\ 3+e\ ,\ 3+e$		
C_{600}	$1+e\ ,\ 1+e\ ,\ 1+e\ ,\ 1+e$		
$e_2\ C_{600}$	$[\ 6+4e\ ,\ 6+4e\ ,\ 4+2e\ ,\ 4+2e]$		96

$ce_2\ C_{600}$	$5+3e\ ,\ 5+3e\ ,\ 3+e\ ,\ 3+e$		
C_{600}	$3+e\ ,\ 1+e\ ,\ 2\ ,\ 0$		
$e_2\ C'_{600}$	$[\ 8+4e\ ,\ 6+4e\ ,\ 5+e\ ,\ 3+e\ ]$	: 2	192

$ce_2\ C_{600}$	$6+2e\ ,\ 5+3e\ ,\ 4+2e\ ,\ 1+e$		
C'_{600}	$1+e\ ,\ 1+e\ ,\ 1+e\ ,\ 1+e$		
$e_2\ C'_{600}$	$[\ 7+3e\ ,\ 6+4e\ ,\ 5+3e\ ,\ 2+2e]$	: 2	192

$ce_2\ C_{600}$	$6+2e$, $5+3e$, $4+2e$, $1+e$		
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0		
$e_2\ C_{600}$	$[\ 9+3e$, $6+4e$, $6+2e$, $1+e\ ]$	: 2	192

$ce_2\ C_{600}$	$6+2e$, $5+3e$, $4+2e$, $1+e$		
C_{600}	2 , $3+e$, $1+e$, 0		
$e_2\ C_{600}$	$[\ 8+2e$, $8+4e$, $5+3e$, $1+e\ ]$	: 2	192

$ce_2\ C_{600}$	$9+3e$, $4+2e$, 0 , $1+e$		
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0		
$e_2\ C_{600}$	$[12+4e$, $5+3e$, 2 , $1+e\ ]$	: 2	192

$ce_2\ C_{600}$	$9+3e$, $4+2e$, 0 , $1+e$		
C_{600}	$3+e$, 2 , 0 , $1+e$		
$e_2\ C_{600}$	$[12+4e$, $6+2e$, 0 , $2+2e]$	: 2	96

$ce_2\ C_{600}$	$9+3e$, $3+e$, $3+e$, $3+e$		
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0		
$e_2\ C_{600}$	$[12+4e$, $4+2e$, $5+e$, $3+e\ ]$	: 2	192

$ce_2\ C_{600}$	$7+3e$, $5+3e$, 0 , 2		
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0		
$e_2\ C_{600}$	$[10+4e$, $6+4e$, 2 , $2\ ]$		192

$ce_2\ C_{600}$	$7+3e$, $5+3e$, 0 , 2		
C_{600}	$1+e$, $3+e$, 0 , 2		
$e_2\ C_{600}$	$[\ 8+4e$, $8+4e$, 0 , $4\ ]$		96

$ce_2\ C_{600}$	$7+3e$, $3+e$, $6+2e$, 2		
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0		
$e_2\ C_{600}$	$[10+4e$, $4+2e$, $8+2e$, $2\ ]$	: 2	192

$ce_2\ C_{600}$	$7+3e$, $3+e$, $6+2e$, 2		
C_{600}	$3+e$, 0 , $1+e$, 2		
$e_2\ C_{600}$	$[10+4e$, $3+e$, $7+3e$, $4\ ]$	: 2	192

$ce_2\ C_{600}$	$7+3e$, $3+e$, $6+2e$, 2		
C_{600}	$1+e$, 2 , $3+e$, 0		
$e_2\ C_{600}$	$[\ 8+4e$, $5+e$, $9+3e$, $2\ ]$	: 2	192
$ce_2\ C_{600}$	$6+2e$, $6+2e$, $6+2e$, 0		
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0		
$e_2\ C_{600}$	$[\ 9+3e$, $7+3e$, $8+2e$, $0\ ]$	: 2	96
			3600

155. Deduction of $ce_1\ e_2\ C_{600}$ by composition of $ce_2\ C_{600}$ and $ce_1\ C_{600}$ and of $e_1\ e_2\ C_{600}$ by composition of $ce_1\ e_2\ C_{600}$ and C_{600}.

In the addition applied to find a coordinate-symbol of $ce_1\ e_2\ C_{600}$ we replace the vertex of $ce_1\ C_{600}$ by the two vertices of C_{600} from which it can be deduced, and after that we again add the coordinates of each of these two vertices successively to obtain the coordinate-symbols of $e_1\ e_2\ C_{600}$.

$ce_2\ C_{600}$	$8+4e$, $2+2e$, 0 , 0		
C_{600}	$2+2e$, 0 , 0 , 0		
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0		
$ce_1\ e_2\ C_{600}$	$[13+7e$, $3+3e$, 2 , $0\ ]$	: 2	96
$\boldsymbol{e_1\ e_2\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[15+9e}$, $\boldsymbol{3+3e}$, $\boldsymbol{2}$, $\boldsymbol{0\ ]}$	**: 2**	**96**
$\boldsymbol{e_1\ e_2\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[16+8e}$, $\boldsymbol{4+4e}$, $\boldsymbol{4}$, $\boldsymbol{0\ ]}$	**: 2**	**96**
$ce_2\ C_{600}$	$8+4e$, $2+2e$, 0 , 0		
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0		
C_{600}	$3+e$, $1+e$, -2 , 0		
$ce_1\ e_2\ C_{600}$	$[14+6e$, $4+4e$, 0 , $0\ ]$		48
$\boldsymbol{e_1\ e_2\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[17+7e}$, $\boldsymbol{5+5e}$, $\boldsymbol{2}$, $\boldsymbol{0\ ]}$	**: 2**	**96**
$ce_2\ C_{600}$	$8+4e$, $3+e$, 2 , $1+e$		
C_{600}	$2+2e$, 0 , 0 , 0		
C_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0		
$ce_1\ e_2\ C_{600}$	$[13+7e$, $4+2e$, 4 , $1+e\ ]$	: 2	192
$\boldsymbol{e_1\ e_2\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[15+9e}$, $\boldsymbol{4+2e}$, $\boldsymbol{4}$, $\boldsymbol{1+e\ ]}$	**: 2**	**192**
$\boldsymbol{e_1\ e_2\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[16+8e}$, $\boldsymbol{5+3e}$, $\boldsymbol{6}$, $\boldsymbol{1+e\ ]}$	**: 2**	**192**

$ce_2\, C_{600}$	$8+4e$,	$3+e$,	2 ,	$1+e$		
C_{600}	$2+2e$,	0 ,	0 ,	0		
C_{600}	$3+e$,	2 ,	0 ,	$1+e$		
$ce_1\, e_2\, C_{600}$	$[13+7e$,	$5+e$,	2 ,	$2+2e]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1\, e_2\, C_{600}}$	$\boldsymbol{[15+9e}$,	$\boldsymbol{5+e}$,	$\boldsymbol{2}$,	$\boldsymbol{2+2e]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_1\, e_2\, C'_{600}}$	$\boldsymbol{[16+8e}$,	$\boldsymbol{7+e}$,	$\boldsymbol{2}$,	$\boldsymbol{3+3e]:2}$		**192**

$ce_2\, C_{600}$	$8+4e$,	$3+e$,	2 ,	$1+e$		
C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0		
C_{600}	$3+e$,	2 ,	0 ,	$1+e$		
$ce_1\, e_2\, C_{600}$	$[14+6e$,	$6+2e$,	4 ,	$2+2e]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1\, e_2\, C_{600}}$	$\boldsymbol{[17+7e}$,	$\boldsymbol{7+3e}$,	$\boldsymbol{6}$,	$\boldsymbol{2+2e]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_1\, e_2\, C_{600}}$	$\boldsymbol{[17+7e}$,	$\boldsymbol{8+2e}$,	$\boldsymbol{4}$,	$\boldsymbol{3+3e]:2}$		**192**

$ce_2\, C_{600}$	$7+3e$,	$2+2e$,	$4+2e$,	$3+e$		
C_{600}	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$		
C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0		
$ce_1\, e_2\, C_{600}$	$[11+5e$,	$4+4e$,	$7+3e$,	$4+2e]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1\, e_2\, C_{600}}$	$\boldsymbol{[12+6e}$,	$\boldsymbol{5+5e}$,	$\boldsymbol{8+4e}$,	$\boldsymbol{5+3e]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_1\, e_2\, C_{600}}$	$\boldsymbol{[14+6e}$,	$\boldsymbol{5+5e}$,	$\boldsymbol{9+3e}$,	$\boldsymbol{4+2e]:2}$		**192**

$ce_2\, C_{600}$	$7+3e$,	$2+2e$,	$4+2e$,	$3+e$		
C_{600}	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$		
C_{600}	$3+e$,	0 ,	$1+e$,	2		
$ce_1\, e_2\, C_{600}$	$[11+5e$,	$3+3e$,	$6+4e$,	$6+2e]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1\, e_2\, C_{600}}$	$\boldsymbol{[12+6e}$,	$\boldsymbol{4+4e}$,	$\boldsymbol{7+5e}$,	$\boldsymbol{7+3e]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_1\, e_2\, C_{600}}$	$\boldsymbol{[14+6e}$,	$\boldsymbol{3+3e}$,	$\boldsymbol{7+5e}$,	$\boldsymbol{8+2e]:2}$		**192**

$ce_2\, C_{600}$	$7+3e$,	$2+2e$,	$4+2e$,	$3+e$		
C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0		
C_{600}	$3+e$,	0 ,	$1+e$,	2		
$ce_1\, e_2\, C_{600}$	$[13+5e$,	$3+3e$,	$7+3e$,	$5+e\ ]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1\, e_2\, C_{600}}$	$\boldsymbol{[16+6e}$,	$\boldsymbol{4+4e}$,	$\boldsymbol{9+3e}$,	$\boldsymbol{5+e\ ]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_1\, e_2\, C_{600}}$	$\boldsymbol{[16+6e}$,	$\boldsymbol{3+3e}$,	$\boldsymbol{8+4e}$,	$\boldsymbol{7+e\ ]:2}$		**192**

$ce_2\ C_{600}$	$5+3e$,	$5+3e$,	$3+e$,	$3+e$		
C_{600}	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$		
C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0		
$ce_1\ e_2\ C_{600}$	$[\ 9+5e$,	$7+5e$,	$6+2e$,	$4+2e\ ]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1\ e_2\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[10+6e}$,	$\boldsymbol{8+6e}$,	$\boldsymbol{7+3e}$,	$\boldsymbol{5+3e]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_1\ e_2\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[12+6e}$,	$\boldsymbol{8+6e}$,	$\boldsymbol{8+2e}$,	$\boldsymbol{4+2e]:2}$		**192**

$ce_2\ C_{600}$	$5+3e$,	$5+3e$,	$3+e$,	$3+e$		
C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0		
C_{600}	$1+e$,	$3+e$,	0 ,	2		
$ce_1\ e_2\ C_{600}$	$[\ 9+5e$,	$9+5e$,	$5+e$,	$5+e\ ]$	96	
$\boldsymbol{e_1\ e_2\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[12+6e}$,	$\boldsymbol{10+6e}$,	$\boldsymbol{7+e}$,	$\boldsymbol{5+e\ ]:2}$		**192**

$ce_2\ C_{600}$	$6+2e$,	$5+3e$,	$4+2e$,	$1+e$		
C_{600}	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$		
C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0		
$ce_1\ e_2\ C_{600}$	$[10+4e$,	$7+5e$,	$7+3e$,	$2+2e\ ]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1\ e_2\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[11+5e}$,	$\boldsymbol{8+6e}$,	$\boldsymbol{8+4e}$,	$\boldsymbol{3+3e]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_1\ e_2\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[13+5e}$,	$\boldsymbol{8+6e}$,	$\boldsymbol{9+3e}$,	$\boldsymbol{2+2e]:2}$		**192**

$ce_2\ C_{600}$	$6+2e$,	$5+3e$,	$4+2e$,	$1+e$		
C_{600}	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$		
C_{600}	2 ,	$3+e$,	$1+e$,	0		
$ce_1\ e_2\ C_{600}$	$[\ 9+3e$,	$9+5e$,	$6+4e$,	$2+2e\ ]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1\ e_2\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[10+4e}$,	$\boldsymbol{10+6e}$,	$\boldsymbol{7+5e}$,	$\boldsymbol{3+3e]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_1\ e_2\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[11+3e}$,	$\boldsymbol{12+6e}$,	$\boldsymbol{7+5e}$,	$\boldsymbol{2+2e]:2}$		**192**

$ce_2\ C_{600}$	$6+2e$,	$5+3e$,	$4+2e$,	$1+e$		
C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0		
C_{600}	2 ,	$3+e$,	$1+e$,	0		
$ce_1\ e_2\ C_{600}$	$[11+3e$,	$9+5e$,	$7+3e$,	$1+e\ ]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1\ e_2\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[14+4e}$,	$\boldsymbol{10+6e}$,	$\boldsymbol{9+3e}$,	$\boldsymbol{1+e\ ]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_1\ e_2\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[13+3e}$,	$\boldsymbol{12+6e}$,	$\boldsymbol{8+4e}$,	$\boldsymbol{1+e\ ]:2}$		**192**

$ce_2\ C_{600}$	$9+3e$,	$4+2e$,	0	, $1+e$		
C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2	, 0		
C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	-2	, 0		
$ce_1\ e_2\ C_{600}$	$[15+5e$,	$6+4e$,	0	, $1+e\ ]$: 2	96	
$\boldsymbol{e_1\ e_2\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[18+6e}$,	$\boldsymbol{7+5e}$,	$\boldsymbol{2}$	, $\boldsymbol{1+e\ ]}$: **2**		**192**
$ce_2\ C_{600}$	$9+3e$,	$4+2e$,	0	, $1+e$		
C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2	, 0		
C_{600}	$3+e$,	2 ,	0	, $1+e$		
$ce_1\ e_2\ C_{600}$	$[15+5e$,	$7+3e$,	2	, $2+2e\ ]$: 2	192	
$\boldsymbol{e_1\ e_2\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[18+6e}$,	$\boldsymbol{8+4e}$,	$\boldsymbol{4}$	, $\boldsymbol{2+2e]}$: **2**		**192**
$\boldsymbol{e_1\ e_2\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[18+6e}$,	$\boldsymbol{9+3e}$,	$\boldsymbol{2}$	, $\boldsymbol{3+3e]}$: **2**		**192**
$ce_2\ C_{600}$	$9+3e$,	$3+e$,	$3+e$	, $3+e$		
C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2	, 0		
C_{600}	$3+e$,	0 ,	$1+e$	, 2		
$ce_1\ e_2\ C_{600}$	$[15+5e$,	$4+2e$,	$6+2e$	, $5+e\ ]$: 2	192	
$\boldsymbol{e_1\ e_2\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[18+6e}$,	$\boldsymbol{5+3e}$,	$\boldsymbol{8+2e}$	, $\boldsymbol{5+e\ ]}$: **2**		**192**
$\boldsymbol{e_1\ e_2\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[18+6e}$,	$\boldsymbol{4+2e}$,	$\boldsymbol{7+3e}$	, $\boldsymbol{7+e\ ]}$: **2**		**192**
$ce_2\ C_{600}$	$7+3e$,	$5+3e$,	0	, 2		
C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2	, 0		
C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	-2	, 0		
$ce_1\ e_2\ C_{600}$	$[13+5e$,	$7+5e$,	0	, $2\ ]$: 2	96	
$\boldsymbol{e_1\ e_2\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[16+6e}$,	$\boldsymbol{8+6e}$,	$\boldsymbol{2}$	, $\boldsymbol{2\ ]}$		**192**
$ce_2\ C_{600}$	$7+3e$,	$5+3e$,	0	, 2		
C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2	, 0		
C_{600}	$1+e$,	$3+e$,	0	, 2		
$ce_1\ e_2\ C_{600}$	$[11+5e$,	$9+5e$,	2	, $4\ ]$: 2	192	
$\boldsymbol{e_1\ e_2\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[14+6e}$,	$\boldsymbol{10+6e}$,	$\boldsymbol{4}$	, $\boldsymbol{4\ ]}$		**192**
$\boldsymbol{e_1\ e_2\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[12+6e}$,	$\boldsymbol{12+6e}$,	$\boldsymbol{2}$	, $\boldsymbol{6\ ]}$		**192**

$ce_2\,C_{600}$	$7+3e$,	$3+e$,	$6+2e$,	2			
C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0			
C_{600}	$3+e$,	0 ,	$1+e$,	2			
$ce_1\,e_2\,C_{600}$	$[13+5e$,	$4+2e$,	$9+3e$,	4	$]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1\,e_2\,C_{600}}$	$\boldsymbol{[16+6e}$,	$\boldsymbol{5+3e}$,	$\boldsymbol{11+3e}$,	$\boldsymbol{4}$	$\boldsymbol{]:2}$		$\boldsymbol{192}$
$\boldsymbol{e_1\,e_2\,C_{600}}$	$\boldsymbol{[16+6e}$,	$\boldsymbol{4+2e}$,	$\boldsymbol{10+4e}$,	$\boldsymbol{6}$	$\boldsymbol{]:2}$		$\boldsymbol{192}$
$ce_2\,C_{600}$	$7+3e$,	$3+e$,	$6+2e$,	2			
C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0			
C_{600}	$1+e$,	2 ,	$3+e$,	0			
$ce_1\,e_2\,C_{600}$	$[11+5e$,	$6+2e$,	$11+3e$,	2	$]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1\,e_2\,C_{600}}$	$\boldsymbol{[14+6e}$,	$\boldsymbol{7+3e}$,	$\boldsymbol{13+3e}$,	$\boldsymbol{2}$	$\boldsymbol{]:2}$		$\boldsymbol{192}$
$\boldsymbol{e_1\,e_2\,C_{600}}$	$\boldsymbol{[12+6e}$,	$\boldsymbol{8+2e}$,	$\boldsymbol{14+4e}$,	$\boldsymbol{2}$	$\boldsymbol{]:2}$		$\boldsymbol{192}$
$ce_2\,C_{600}$	$7+3e$,	$3+e$,	$6+2e$,	2			
C_{600}	$3+e$,	0 ,	$1+e$,	2			
C_{600}	$1+e$,	2 ,	$3+e$,	0			
$ce_1\,e_2\,C_{600}$	$[11+5e$,	$5+e$,	$10+4e$,	4	$]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1\,e_2\,C_{600}}$	$\boldsymbol{[14+6e}$,	$\boldsymbol{5+e}$,	$\boldsymbol{11+5e}$,	$\boldsymbol{6}$	$\boldsymbol{]:2}$		$\boldsymbol{192}$
$\boldsymbol{e_1\,e_2\,C_{600}}$	$\boldsymbol{[12+6e}$,	$\boldsymbol{7+e}$,	$\boldsymbol{13+5e}$,	$\boldsymbol{4}$	$\boldsymbol{]:2}$		$\boldsymbol{192}$
$ce_2\,C_{600}$	$6+2e$,	$6+2e$,	$6+2e$,	0			
C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0			
C_{600}	2 ,	$3+e$,	$1+e$,	0			
$ce_1\,e_2\,C_{600}$	$[11+3e$,	$10+4e$,	$9+3e$,	0	$]:2$	96	
$\boldsymbol{e_1\,e_2\,C_{600}}$	$\boldsymbol{[14+4e}$,	$\boldsymbol{11+5e}$,	$\boldsymbol{11+3e}$,	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{]:2}$		$\boldsymbol{96}$
$\boldsymbol{e_1\,e_2\,C_{600}}$	$\boldsymbol{[13+3e}$,	$\boldsymbol{13+5e}$,	$\boldsymbol{10+4e}$,	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{]:2}$		$\boldsymbol{96}$
						3600	$\boldsymbol{7200}$

156. Deduction of $e_3\,C_{600}$ by composition of $ce_3\,C_{600}$ and C_{600}.

$ce_3\,C_{600}$	$7+3e$,	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$	
C_{600}	$2+2e$,	0 ,	0 ,	0	
$e_3\,C_{600}$	$[\ 9+5e$,	$1+e$,	$1+e$,	$1+e\ ]$	64

$ce_3\, C'_{600}$	$7+3e$, $1+e$, $1+e$, $1+e$	
C'_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0	
$e_3\, C'_{600}$	$[10+4e$, $2+2e$, $3+e$, $1+e\,] : 2$	192

$ce_3\, C'_{600}$	$7+3e$, 2 , $3+e$, 0	
C'_{600}	$2+2e$, 0 , 0 , 0	
$e_3\, C'_{600}$	$[\,9+5e$, 2 , $3+e$, $0\,] : 2$	96

$ce_3\, C'_{600}$	$7+3e$, 2 , $3+e$, 0	
C'_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0	
$e_3\, C'_{600}$	$[10+4e$, $3+e$, $5+e$, $0\,] : 2$	96

$ce_3\, C'_{600}$	$7+3e$, 2 , $3+e$, 0	
C'_{600}	$3+e$, 0 , $1+e$, 2	
$e_3\, C'_{600}$	$[10+4e$, 2 , $4+2e$, $2\,]$	192

$ce_3\, C'_{600}$	$5+3e$, $3+e$, $3+e$, $3+e$	
C'_{600}	$1+e$, $1+e$, $1+e$, $1+e$	
$e_3\, C'_{600}$	$[\,6+4e$, $4+2e$, $4+2e$, $4+2e]$	64

$ce_3\, C'_{600}$	$5+3e$, $3+e$, $3+e$, $3+e$	
C'_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0	
$e_3\, C'_{600}$	$[\,8+4e$, $4+2e$, $5+e$, $3+e\,] : 2$	192

$ce_3\, C'_{600}$	$4+2e$, $4+2e$, $4+2e$, 2	
C'_{600}	$1+e$, $1+e$, $1+e$, $1+e$	
$e_3\, C'_{600}$	$[\,5+3e$, $5+3e$, $5+3e$, $3+e\,]$	64

$ce_3\, C'_{600}$	$4+2e$, $4+2e$, $4+2e$, 2	
C'_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0	
$e_3\, C'_{600}$	$[\,7+3e$, $5+3e$, $6+2e$, $2\,] : 2$	192

$ce_3\, C'_{600}$	$4+2e$, $6+2e$, $3+e$, $1+e$	
C'_{600}	$1+e$, $1+e$, $1+e$, $1+e$	
$e_3\, C'_{600}$	$[\,5+3e$, $7+3e$, $4+2e$, $2+2e] : 2$	192

$ce_3\, C'_{600}$	$4+2e$, $6+2e$, $3+e$, $1+e$	
C'_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0	
$e_3\, C'_{600}$	$[\ 7+3e$, $7+3e$, $5+e$, $1+e\ ]$	192

$ce_3\, C'_{600}$	$4+2e$, $6+2e$, $3+e$, $1+e$	
C'_{600}	$1+e$, $3+e$, 0 , 2	
$e_3\, C'_{600}$	$[\ 5+3e$, $9+3e$, $3+e$, $3+e\ ]$	192

$ce_3\, C'_{600}$	$4+2e$, $6+2e$, $3+e$, $1+e$	
C'_{600}	2 , $3+e$, $1+e$, 0	
$e_3\, C'_{600}$	$[\ 6+2e$, $9+3e$, $4+2e$, $1+e\ ] : 2$	192

$ce_3\, C'_{600}$	$5+3e$, $1+e$, $4+2e$, 0	
C'_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0	
$e_3\, C'_{600}$	$[\ 8+4e$, $2+2e$, $6+2e$, $0\ ] : 2$	96

$ce_3\, C_{600}$	$5+3e$, $1+e$, $4+2e$, 0	
C'_{600}	$3+e$, 0 , $1+e$, 2	
$e_3\, C'_{600}$	$[\ 8+4e$, $1+e$, $5+3e$, $2\ ] : 2$	192

$ce_3\, C_{600}$	$5+3e$, $1+e$, $4+2e$, 0	
C'_{600}	$1+e$, 2 , $3+e$, 0	
$e_3\, C_{600}$	$[\ 6+4e$, $3+e$, $7+3e$, $0\ ] : 2$	96

$ce_3\, C_{600}$	$6+2e$, $6+2e$, 0 , 0	
C'_{600}	$3+e$, $1+e$, 2 , 0	
$e_3\, C_{600}$	$[\ 9+3e$, $7+3e$, 2 , $0\ ] : 2$	96
		2400

157. Deduction of $ce_1\, e_3\, C_{600}$ by composition of $ce_3\, C_{600}$ and $ce_1\, C_{600}$ and of $e_1\, e_3\, C_{600}$ by composition of $ce_1\, e_3\, C_{600}$ and C_{600}. The arrangement of the computation is the same as that of the deduction of $ce_1\, e_2\, C_{600}$ and $e_1\, e_2\, C_{600}$ (art. 155).

ce_3	C_{600}	$7+3e$,	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$		
	C_{600}	$2+2e$,	0 ,	0 ,	0		
	C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0		
$ce_1\ e_3$	C_{600}	$[12+6e$,	$2+2e$,	$3+e$,	$1+e\ ]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1\ e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$\mathbf{[14+8e}$,	$\mathbf{2+2e}$,	$\mathbf{3+e}$,	$\mathbf{1+e\ ]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_1\ e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$\mathbf{[15+7e}$,	$\mathbf{3+3e}$,	$\mathbf{5+e}$,	$\mathbf{1+e\ ]:2}$		**192**
ce_3	C_{600}	$7+3e$,	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$		
	C_{600}	$3+e$,	0 ,	$1+e$,	2		
	C_{600}	$3+e$,	2 ,	0 ,	$1+e$		
$ce_1\ e_3$	C_{600}	$[13+5e$,	$3+e$,	$2+2e$,	$4+2e\ ]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1\ e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$\mathbf{[16+6e}$,	$\mathbf{3+e}$,	$\mathbf{3+3e}$,	$\mathbf{6+2e]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_1\ e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$\mathbf{[16+6e}$,	$\mathbf{5+e}$,	$\mathbf{2+2e}$,	$\mathbf{5+3e]:2}$		**192**
ce_3	C_{600}	$7+3e$,	2 ,	$3+e$,	0		
	C_{600}	$2+2e$,	0 ,	0 ,	0		
	C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0		
$ce_1\ e_3$	C_{600}	$[12+6e$,	$3+e$,	$5+e$,	$0\ ]:2$	96	
$\boldsymbol{e_1\ e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$\mathbf{[14+8e}$,	$\mathbf{3+e}$,	$\mathbf{5+e}$,	$\mathbf{0\ ]:2}$		**96**
$\boldsymbol{e_1\ e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$\mathbf{[15+7e}$,	$\mathbf{4+2e}$,	$\mathbf{7+e}$,	$\mathbf{0\ ]:2}$		**96**
ce_3	C_{600}	$7+3e$,	2 ,	$3+e$,	0		
	C_{600}	$3+e$,	0 ,	$1+e$,	2		
	C_{600}	$3+e$,	0 ,	$1+e$,	-2		
$ce_1\ e_3$	C_{600}	$[13+5e$,	2 ,	$5+3e$,	$0\ ]:2$	96	
$\boldsymbol{e_1\ e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$\mathbf{[16+6e}$,	$\mathbf{2}$,	$\mathbf{6+4e}$,	$\mathbf{2\ ]}$		**192**
ce_3	C_{600}	$7+3e$,	2 ,	$3+e$,	0		
	C_{600}	$2+2e$,	0 ,	0 ,	0		
	C_{600}	$3+e$,	0 ,	$1+e$,	2		
$ce_1\ e_3$	C_{600}	$[12+6e$,	2 ,	$4+2e$,	$2\ ]$	192	
$\boldsymbol{e_1\ e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$\mathbf{[14+8e}$,	$\mathbf{2}$,	$\mathbf{4+2e}$,	$\mathbf{2\ ]}$		**192**
$\boldsymbol{e_1\ e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$\mathbf{[15+7e}$,	$\mathbf{2}$,	$\mathbf{5+3e}$,	$\mathbf{4\ ]:2}$		**192**

$ce_3\ C_{600}$	$7+3e$	2	$3+e$	0			
C_{600}	$3+e$	$1+e$	2	0			
C_{600}	$3+e$	0	$1+e$	2			
$ce_1\ e_3\ C_{600}$	$[13+5e$	$3+e$	$6+2e$	$2\ ]:2$	192		
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[16+6e}$	$\boldsymbol{4+2e}$	$\boldsymbol{8+2e}$	$\boldsymbol{2\ ]:2}$			**192**
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[16+6e}$	$\boldsymbol{3+e}$	$\boldsymbol{7+3e}$	$\boldsymbol{4\ ]:2}$			**192**

$ce_3\ C_{600}$	$5+3e$	$3+e$	$3+e$	$3+e$			
C_{600}	$1+e$	$1+e$	$1+e$	$1+e$			
C_{600}	$3+e$	$1+e$	2	0			
$ce_1\ e_3\ C_{600}$	$[9+5e$	$5+3e$	$6+2e$	$4+2e\ ]:2$	192		
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[10+6e}$	$\boldsymbol{6+4e}$	$\boldsymbol{7+3e}$	$\boldsymbol{5+3e]:2}$			**192**
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[12+6e}$	$\boldsymbol{6+4e}$	$\boldsymbol{8+2e}$	$\boldsymbol{4+2e]:2}$			**192**

$ce_3\ C_{600}$	$5+3e$	$3+e$	$3+e$	$3+e$			
C_{600}	$3+e$	0	$1+e$	2			
C_{600}	$3+e$	2	0	$1+e$			
$ce_1\ e_3\ C_{600}$	$[11+5e$	$5+e$	$4+2e$	$6+2e]:2$	192		
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[14+6e}$	$\boldsymbol{5+e}$	$\boldsymbol{5+3e}$	$\boldsymbol{8+2e]:2}$			**192**
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[14+6e}$	$\boldsymbol{7+e}$	$\boldsymbol{4+2e}$	$\boldsymbol{7+3e]:2}$			**192**

$ce_3\ C_{600}$	$4+2e$	$4+2e$	$4+2e$	2			
C_{600}	$1+e$	$1+e$	$1+e$	$1+e$			
C_{600}	$3+e$	$1+e$	2	0			
$ce_1\ e_3\ C_{600}$	$[8+4e$	$6+4e$	$7+3e$	$3+e\ ]:2$	192		
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[9+5e}$	$\boldsymbol{7+5e}$	$\boldsymbol{8+4e}$	$\boldsymbol{4+2e]:2}$			**192**
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[11+5e}$	$\boldsymbol{7+5e}$	$\boldsymbol{9+3e}$	$\boldsymbol{3+e\ ]:2}$			**192**

$ce_3\ C_{600}$	$4+2e$	$4+2e$	$4+2e$	2			
C_{600}	2	$3+e$	$1+e$	0			
C_{600}	$1+e$	2	$3+e$	0			
$ce_1\ e_3\ C_{600}$	$[7+3e$	$9+3e$	$8+4e$	$2\ ]:2$	192		
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[9+3e}$	$\boldsymbol{12+4e}$	$\boldsymbol{9+5e}$	$\boldsymbol{2\ ]:2}$			**192**
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[8+4e}$	$\boldsymbol{11+3e}$	$\boldsymbol{11+5e}$	$\boldsymbol{2\ ]:2}$			**192**

$ce_3\ C_{600}$	$4+2e$,	$6+2e$,	$3+e$,	$1+e$	
C_{600}	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$	
C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0	
$ce_1\ e_3\ C_{600}$	$[\ 8+4e$,	$8+4e$,	$6+2e$,	$2+2e\ ]$	192
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[\ 9+5e}$,	$\boldsymbol{9+5e}$,	$\boldsymbol{7+3e}$,	$\boldsymbol{3+3e}\ ]$	**192**
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[11+5e}$,	$\boldsymbol{9+5e}$,	$\boldsymbol{8+2e}$,	$\boldsymbol{2+2e}\ ]:2$	**192**

$ce_3\ C_{600}$	$4+2e$,	$6+2e$,	$3+e$,	$1+e$	
C_{600}	$1+e$,	$3+e$,	0 ,	2	
C_{600}	2 ,	$3+e$,	$1+e$,	0	
$ce_1\ e_3\ C_{600}$	$[\ 7+3e$,	$12+4e$,	$4+2e$,	$3+e\ ]:2$	192
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[\ 8+4e}$,	$\boldsymbol{15+5e}$,	$\boldsymbol{4+2e}$,	$\boldsymbol{5+e}\ ]:2$	**192**
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[\ 9+3e}$,	$\boldsymbol{15+5e}$,	$\boldsymbol{5+3e}$,	$\boldsymbol{3+e}\ ]:2$	**192**

$ce_3\ C_{600}$	$4+2e$,	$6+2e$,	$3+e$,	$1+e$	
C_{600}	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$	
C_{600}	$1+e$,	$3+e$,	0 ,	2	
$ce_1\ e_3\ C_{600}$	$[\ 6+4e$,	$10+4e$,	$4+2e$,	$4+2e\ ]$	192
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[\ 7+5e}$,	$\boldsymbol{11+5e}$,	$\boldsymbol{5+3e}$,	$\boldsymbol{5+3e}\ ]$	**192**
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[\ 7+5e}$,	$\boldsymbol{13+5e}$,	$\boldsymbol{4+2e}$,	$\boldsymbol{6+2e}\ ]:2$	**192**

$ce_3\ C'_{600}$	$4+2e$,	$6+2e$,	$3+e$,	$1+e$	
C'_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0	
C'_{600}	2 ,	$3+e$,	$1+e$,	0	
$ce_1\ e_3\ C'_{600}$	$[\ 9+3e$,	$10+4e$,	$6+2e$,	$1+e\ ]:2$	192
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[12+4e}$,	$\boldsymbol{11+5e}$,	$\boldsymbol{8+2e}$,	$\boldsymbol{1+e}\ ]:2$	**192**
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[11+3e}$,	$\boldsymbol{13+5e}$,	$\boldsymbol{7+3e}$,	$\boldsymbol{1+e}\ ]:2$	**192**

$ce_3\ C'_{600}$	$4+2e$,	$6+2e$,	$3+e$,	$1+e$	
C'_{600}	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$	
C'_{600}	2 ,	$3+e$,	$1+e$,	0	
$ce_1\ e_3\ C'_{600}$	$[\ 7+3e$,	$10+4e$,	$5+3e$,	$2+2e\ ]:2$	192
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[\ 8+4e}$,	$\boldsymbol{11+5e}$,	$\boldsymbol{6+4e}$,	$\boldsymbol{3+3e}\ ]:2$	**192**
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[\ 9+3e}$,	$\boldsymbol{13+5e}$,	$\boldsymbol{6+4e}$,	$\boldsymbol{2+2e}\ ]:2$	**192**

$ce_3\ C'_{600}$	$4+2e$	$6+2e$	$3+e$	$1+e$			
C'_{600}	$3+e$	$1+e$	2	0			
C'_{600}	$1+e$	$3+e$	0	2			
$ce_1\ e_3\ C'_{600}$	$[\ 8+4e$	$10+4e$	$5+e$	$3+e\ ]:2$		192	
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[11+5e}$	$\boldsymbol{11+5e}$	$\boldsymbol{7+e}$	$\boldsymbol{3+e\ ]}$			$\mathbf{192}$
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[\ 9+5e}$	$\boldsymbol{13+5e}$	$\boldsymbol{5+e}$	$\boldsymbol{5+e\ ]}$			$\mathbf{192}$
$ce_3\ C'_{600}$	$5+3e$	$1+e$	$4+2e$	0			
C'_{600}	$3+e$	$1+e$	2	0			
C'_{600}	$3+e$	0	$1+e$	2			
$ce_1\ e_3\ C'_{600}$	$[11+5e$	$2+2e$	$7+3e$	$2\ ]:2$		192	
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[14+6e}$	$\boldsymbol{3+3e}$	$\boldsymbol{9+3e}$	$\boldsymbol{2\ ]:2}$			$\mathbf{192}$
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[14+6e}$	$\boldsymbol{2+2e}$	$\boldsymbol{8+4e}$	$\boldsymbol{4\ ]:2}$			$\mathbf{192}$
$ce_3\ C'_{600}$	$5+3e$	$1+e$	$1+2e$	0			
C'_{600}	$3+e$	0	$1+e$	2			
C'_{600}	$1+e$	2	$3+e$	0			
$ce_1\ e_3\ C'_{600}$	$[\ 9+5e$	$3+e$	$8+4e$	$2\ ]:2$		192	
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[12+6e}$	$\boldsymbol{3+e}$	$\boldsymbol{9+5e}$	$\boldsymbol{4\ ]:2}$			$\mathbf{192}$
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[10+6e}$	$\boldsymbol{5+e}$	$\boldsymbol{11+5e}$	$\boldsymbol{2\ ]:2}$			$\mathbf{192}$
$ce_3\ C'_{600}$	$5+3e$	$1+e$	$4+2e$	0			
C'_{600}	$3+e$	$1+e$	2	0			
C'_{600}	$1+e$	2	$3+e$	0			
$ce_1\ e_3\ C'_{600}$	$[\ 9+5e$	$4+2e$	$9+3e$	$0\ ]:2$		96	
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[12+6e}$	$\boldsymbol{5+3e}$	$\boldsymbol{11+3e}$	$\boldsymbol{0\ ]:2}$			$\mathbf{96}$
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[10+6e}$	$\boldsymbol{6+2e}$	$\boldsymbol{12+4e}$	$\boldsymbol{0\ ]:2}$			$\mathbf{96}$
$ce_3\ C'_{600}$	$5+3e$	$1+e$	$4+2e$	0			
C'_{600}	$3+e$	0	$1+e$	2			
C'_{600}	$3+e$	0	$1+e$	-2			
$ce_1\ e_3\ C'_{600}$	$[11+5e$	$1+e$	$6+4e$	$0\ ]:2$		96	
$\boldsymbol{e_1\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[14+6e}$	$\boldsymbol{1+e}$	$\boldsymbol{7+5e}$	$\boldsymbol{2\ ]:2}$			$\mathbf{192}$

$ce_3\, C_{600}$	$6+2e$,	$6+2e$,	0	, 0		
C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2	, 0		
C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	-2	, 0		
$ce_1\, e_3\, C_{600}$	$[12+4e$,	$8+4e$,	0	, 0]	48	
$\boldsymbol{e_1\, e_3\, C_{600}}$	$\boldsymbol{[15+5e}$,	$\boldsymbol{9+5e}$,	$\boldsymbol{2}$	, $\boldsymbol{0}$] : 2		**96**
$ce_3\, C'_{600}$	$6+2e$,	$6+2e$,	0	, 0		
C'_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2	, 0		
C'_{600}	$1+e$,	$3+e$,	0	, 2		
$ce_1\, e_3\, C'_{600}$	$[10+4e$,	$10+4e$,	2	, 2]	96	
$\boldsymbol{e_1\, e_3\, C'_{600}}$	$\boldsymbol{[13+5e}$,	$\boldsymbol{11+5e}$,	$\boldsymbol{4}$	, $\boldsymbol{2}$] : 2		**192**
					3600	**7200**

158. Deduction of $ce_2\, e_3\, C'_{600}$ by composition of $ce_3\, C'_{600}$ and $ce_2\, C'_{600}$ and of $e_2\, e_3\, C'_{600}$ by composition of $ce_2\, e_3\, C'_{600}$ and C'_{600}.

$ce_3\, C'_{600}$	$7+3e$,	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$		
C'_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2	, 0		
C'_{600}	$3+e$,	0	$1+e$,	2		
C'_{600}	$3+e$,	2	, 0	, $1+e$		
$ce_2\, e_3\, C'_{600}$	$[16+6e$,	$4+2e$,	$4+2e$,	$4+2e]$	64	
$\boldsymbol{e_2\, e_3\, C'_{600}}$	$\boldsymbol{[19+7e}$,	$\boldsymbol{5+3e}$,	$\boldsymbol{6+2e}$,	$\boldsymbol{4+2e]}$: 2		**192**
$ce_3\, C'_{600}$	$7+3e$,	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$		
C'_{600}	$2+2e$,	0	, 0	, 0		
C'_{600}	$3+e$,	0	, $1+e$	, 2		
C'_{600}	$3+e$,	2	, 0	, $1+e$		
$ce_2\, e_3\, C'_{600}$	$[15+7e$,	$3+e$,	$2+2e$,	$4+2e]$: 2	192	
$\boldsymbol{e_2\, e_3\, C'_{600}}$	$\boldsymbol{[17+9e}$,	$\boldsymbol{3+e}$,	$\boldsymbol{2+2e}$,	$\boldsymbol{4+2e]}$: 2		**192**
$\boldsymbol{e_2\, e_3\, C'_{600}}$	$\boldsymbol{[18+8e}$,	$\boldsymbol{3+e}$,	$\boldsymbol{3+3e}$,	$\boldsymbol{6+2e]}$: 2		**192**
$\boldsymbol{e_2\, e_3\, C'_{600}}$	$\boldsymbol{[18+8e}$,	$\boldsymbol{5+e}$,	$\boldsymbol{2+2e}$,	$\boldsymbol{5+3e]}$: 2		**192**

ce_3	C_{600}	$7+3e$,	2 ,	$3+e$,	0		
	C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0		
	C_{600}	$3+e$,	0 ,	$1+e$,	2		
	C_{600}	$3+e$,	0 ,	$1+e$,	-2		
$ce_2\ e_3$	C_{600}	$[16+6e$,	$3+e$,	$7+3e$,	0	$]:2$	96
$\boldsymbol{e_2\ e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$\mathbf{[19+7e}$,	$\mathbf{4+2e}$,	$\mathbf{9+3e}$,	$\mathbf{0}$	$]:\mathbf{2}$	**96**
$\boldsymbol{e_2\ e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$\mathbf{[19+7e}$,	$\mathbf{3+e}$,	$\mathbf{8+4e}$,	$\mathbf{2}$	$]:\mathbf{2}$	**192**
ce_3	C_{600}	$7+3e$,	2 ,	$3+e$,	0		
	C_{600}	$2+2e$,	0 ,	0 ,	0		
	C_{600}	$3+e$,	0 ,	$1+e$,	2		
	C_{600}	$3+e$,	0 ,	$1+e$,	-2		
$ce_2\ e_3$	C_{600}	$[15+7e$,	2 ,	$5+3e$,	0	$]:2$	96
$\boldsymbol{e_2\ e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$\mathbf{[17+9e}$,	$\mathbf{2}$,	$\mathbf{5+3e}$,	$\mathbf{0}$	$]:\mathbf{2}$	**96**
$\boldsymbol{e_2\ e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$\mathbf{[18+8e}$,	$\mathbf{2}$,	$\mathbf{6+4e}$,	$\mathbf{2}$	$]$	**192**
ce_3	C'_{600}	$7+3e$,	2 ,	$3+e$,	0		
	C'_{600}	$2+2e$,	0 ,	0 ,	0		
	C'_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0		
	C'_{600}	$3+e$,	0 ,	$1+e$,	2		
$ce_2\ e_3$	C'_{600}	$[15+7e$,	$3+e$,	$6+2e$,	2	$]:2$	192
$\boldsymbol{e_2\ e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$\mathbf{[17+9e}$,	$\mathbf{3+e}$,	$\mathbf{6+2e}$,	$\mathbf{2}$	$]:\mathbf{2}$	**192**
$\boldsymbol{e_2\ e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$\mathbf{[18+8e}$,	$\mathbf{4+2e}$,	$\mathbf{8+2e}$,	$\mathbf{2}$	$]:\mathbf{2}$	**192**
$\boldsymbol{e_2\ e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$\mathbf{[18+8e}$,	$\mathbf{3+e}$,	$\mathbf{7+3e}$,	$\mathbf{4}$	$]:\mathbf{2}$	**192**
ce_3	C'_{600}	$5+3e$,	$3+e$,	$3+e$,	$3+e$		
	C'_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0		
	C'_{600}	$3+e$,	0 ,	$1+e$,	2		
	C'_{600}	$3+e$,	2 ,	0 ,	$1+e$		
$ce_2\ e_3$	C'_{600}	$[14+6e$,	$6+2e$,	$6+2e$,	$6+2e]$		64
$\boldsymbol{e_2\ e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$\mathbf{[17+7e}$,	$\mathbf{7+3e}$,	$\mathbf{8+2e}$,	$\mathbf{6+2e}]:\mathbf{2}$		**192**

$ce_3\ C'_{600}$	$5+3e$,	$3+e$,	$3+e$,	$3+e$		
C'_{600}	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$		
C'_{600}	$3+e$,	0 ,	$1+e$,	2		
C'_{600}	$3+e$,	2 ,	0 ,	$1+e$		
$ce_2\ e_3\ C'_{600}$	$[12+6e$,	$6+2e$,	$5+3e$,	$7+3e]:2$	192	
$\boldsymbol{e_2\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[13+7e}$,	$\boldsymbol{7+3e}$,	$\boldsymbol{6+4e}$,	$\boldsymbol{8+4e]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_2\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[15+7e}$,	$\boldsymbol{6+2e}$,	$\boldsymbol{6+4e}$,	$\boldsymbol{9+3e]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_2\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[15+7e}$,	$\boldsymbol{8+2e}$,	$\boldsymbol{5+3e}$,	$\boldsymbol{8+4e]:2}$		**192**
$ce_3\ C'_{600}$	$4+2e$,	$4+2e$,	$4+2e$,	2		
C'_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0		
C'_{600}	2 ,	$3+e$,	$1+e$,	0		
C'_{600}	$1+e$,	2 ,	$3+e$,	0		
$ce_2\ e_3\ C'_{600}$	$[10+4e$,	$10+4e$,	$10+4e$,	$2\ ]$	64	
$\boldsymbol{e_2\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[13+5e}$,	$\boldsymbol{11+5e}$,	$\boldsymbol{12+4e}$,	$\boldsymbol{2\ ]:2}$		**192**
$ce_3\ C'_{600}$	$4+2e$,	$4+2e$,	$4+2e$,	2		
C'_{600}	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$		
C'_{600}	2 ,	$3+e$,	$1+e$,	0		
C'_{600}	$1+e$,	2 ,	$3+e$,	0		
$ce_2\ e_3\ C'_{600}$	$[\ 8+4e$,	$10+4e$,	$9+5e$,	$3+e\ ]:2$	192	
$\boldsymbol{e_2\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[\ 9+5e}$,	$\boldsymbol{11+5e}$,	$\boldsymbol{10+6e}$,	$\boldsymbol{4+2e]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_2\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[10+4e}$,	$\boldsymbol{13+5e}$,	$\boldsymbol{10+6e}$,	$\boldsymbol{3+e\ ]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_2\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[\ 9+5e}$,	$\boldsymbol{12+4e}$,	$\boldsymbol{12+6e}$,	$\boldsymbol{3+e\ ]:2}$		**192**
$ce_3\ C'_{600}$	$4+2e$,	$6+2e$,	$3+e$,	$1+e$		
C'_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0		
C'_{600}	$1+e$,	$3+e$,	0 ,	2		
C'_{600}	2 ,	$3+e$,	$1+e$,	0		
$ce_2\ e_3\ C'_{600}$	$[10+4e$,	$13+5e$,	$6+2e$,	$3+e\ ]:2$	192	
$\boldsymbol{e_2\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[13+5e}$,	$\boldsymbol{14+6e}$,	$\boldsymbol{8+2e}$,	$\boldsymbol{3+e\ ]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_2\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[11+5e}$,	$\boldsymbol{16+6e}$,	$\boldsymbol{6+2e}$,	$\boldsymbol{5+e\ ]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_2\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[12+4e}$,	$\boldsymbol{16+6e}$,	$\boldsymbol{7+3e}$,	$\boldsymbol{3+e\ ]:2}$		**192**

ce_3	C_{600}	$4+2e$,	$6+2e$,	$3+e$,	$1+e$	
	C_{600}	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$	
	C_{600}	$1+e$,	$3+e$,	0 ,	2	
	C_{600}	2 ,	$3+e$,	$1+e$,	0	
$ce_2\,e_3$	C_{600}	$[\ 8+4e$,	$13+5e$,	$5+3e$,	$4+2e\ ]:2$	192

$\boldsymbol{e_2\,e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$[\ \mathbf{9+5e}$,	$\mathbf{14+6e}$,	$\mathbf{6+4e}$,	$\mathbf{5+3e}\ ]:2$	**192**
$\boldsymbol{e_2\,e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$[\ \mathbf{9+5e}$,	$\mathbf{16+6e}$,	$\mathbf{5+3e}$,	$\mathbf{6+2e}\ ]:2$	**192**
$\boldsymbol{e_2\,e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$[\mathbf{10+4e}$,	$\mathbf{16+6e}$,	$\mathbf{6+4e}$,	$\mathbf{4+2e}\ ]:2$	**192**

ce_3	C_{600}	$4+2e$,	$6+2e$,	$3+e$,	$1+e$	
	C_{600}	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$	
	C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0	
	C_{600}	2 ,	$3+e$,	$1+e$,	0	
$ce_2\,e_3$	C_{600}	$[10+4e$,	$11+5e$,	$7+3e$,	$2+2e\ ]:2$	192

$\boldsymbol{e_2\,e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$[\mathbf{11+5e}$,	$\mathbf{12+6e}$,	$\mathbf{8+4e}$,	$\mathbf{3+3e}\ ]:2$	**192**
$\boldsymbol{e_2\,e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$[\mathbf{13+5e}$,	$\mathbf{12+6e}$,	$\mathbf{9+3e}$,	$\mathbf{2+2e}\ ]:2$	**192**
$\boldsymbol{e_2\,e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$[\mathbf{12+4e}$,	$\mathbf{14+6e}$,	$\mathbf{8+4e}$,	$\mathbf{2+2e}\ ]:2$	**192**

ce_3	C_{600}	$4+2e$,	$6+2e$,	$3+e$,	$1+e$	
	C_{600}	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$,	$1+e$	
	C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0	
	C_{600}	$1+e$,	$3+e$,	0 ,	2	
$ce_2\,e_3$	C_{600}	$[\ 9+5e$,	$11+5e$,	$6+2e$,	$4+2e\ ]:2$	192

$\boldsymbol{e_2\,e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$[\mathbf{10+6e}$,	$\mathbf{12+6e}$,	$\mathbf{7+3e}$,	$\mathbf{5+3e}\ ]:2$	**192**
$\boldsymbol{e_2\,e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$[\mathbf{12+6e}$,	$\mathbf{12+6e}$,	$\mathbf{8+2e}$,	$\mathbf{4+2e}]$	**192**
$\boldsymbol{e_2\,e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$[\mathbf{10+6e}$,	$\mathbf{14+6e}$,	$\mathbf{6+2e}$,	$\mathbf{6+2e}]$	**192**

ce_3	C_{600}	$5+3e$,	$1+e$,	$4+2e$,	0	
	C_{600}	$3+e$,	0 ,	$1+e$,	2	
	C_{600}	$3+e$,	0 ,	$1+e$,	-2	
	C_{600}	$1+e$,	2 ,	$3+e$,	0	
$ce_2\,e_3$	C_{600}	$[12+6e$,	$3+e$,	$9+5e$,	$0\ ]:2$	96

$\boldsymbol{e_2\,e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$[\mathbf{15+7e}$,	$\mathbf{3+e}$,	$\mathbf{10+6e}$,	$\mathbf{2}\ ]:2$	**192**
$\boldsymbol{e_2\,e_3}$	$\boldsymbol{C_{600}}$	$[\mathbf{13+7e}$,	$\mathbf{5+e}$,	$\mathbf{12+6e}$,	$\mathbf{0}\ ]:2$	**96**

$ce_3\ C_{600}$	$5+3e$,	$1+e$,	$4+2e$,	0			
C_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0			
C_{600}	$3+e$,	0 ,	$1+e$,	2			
C'_{600}	$1+e$,	2 ,	$3+e$,	0			
$ce_2\ e_3\ C_{600}$	$[12+6e$,	$4+2e$,	$10+4e$,	2	$]:2$	192	
$\boldsymbol{e_2\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[15+7e}$,	$\boldsymbol{5+3e}$,	$\boldsymbol{12+4e}$,	$\boldsymbol{2}$	$\boldsymbol{]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_2\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[15+7e}$,	$\boldsymbol{4+2e}$,	$\boldsymbol{11+5e}$,	$\boldsymbol{4}$	$\boldsymbol{]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_2\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[13+7e}$,	$\boldsymbol{6+2e}$,	$\boldsymbol{13+5e}$,	$\boldsymbol{2}$	$\boldsymbol{]:2}$		**192**
$ce_3\ C'_{600}$	$5+3e$,	$1+e$,	$4+2e$,	0			
C'_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0			
C'_{600}	$3+e$,	0 ,	$1+e$,	2			
C'_{600}	$3+e$,	0 ,	$1+e$,	-2			
$ce_2\ e_3\ C'_{600}$	$[14+6e$,	$2+2e$,	$8+4e$,	0	$]:2$	96	
$\boldsymbol{e_2\ e_3\ C'_{600}}$	$\boldsymbol{[17+7e}$,	$\boldsymbol{3+3e}$,	$\boldsymbol{10+4e}$,	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{]:2}$		**96**
$\boldsymbol{e_2\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[17+7e}$,	$\boldsymbol{2+2e}$,	$\boldsymbol{9+5e}$,	$\boldsymbol{2}$	$\boldsymbol{]:2}$		**192**
$ce_3\ C'_{600}$	$6+2e$,	$6+2e$,	0 ,	0			
C'_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0			
C'_{600}	$1+e$,	$3+e$,	0 ,	2			
C'_{600}	$1+e$,	$3+e$,	0 ,	-2			
$ce_2\ e_3\ C'_{600}$	$[11+5e$,	$13+5e$,	2 ,	0	$]:2$	96	
$\boldsymbol{e_2\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[14+6e}$,	$\boldsymbol{14+6e}$,	$\boldsymbol{4}$,	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{]}$		**96**
$\boldsymbol{e_2\ e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[12+6e}$,	$\boldsymbol{16+6e}$,	$\boldsymbol{2}$,	$\boldsymbol{2}$	$\boldsymbol{]}$		**192**
						2400	**7200**

159. Deduction of $ce_1\ e_2\ e_3\ C'_{600}$ by composition of $ce_2\ e_3\ C'_{600}$ and $ce_1\ C'_{600}$ and of $e_1\ e_2\ e_3\ C'_{600}$ by composition of $ce_1\ e_2\ e_3\ C'_{600}$ and C'_{600}.

$ce_2\ e_3\ C'_{600}$	$16+6e$,	$4+2e$,	$4+2e$,	$4+2e$			
C'_{600}	$3+e$,	$1+e$,	2 ,	0			
C'_{600}	$3+e$,	0 ,	$1+e$,	2			
$ce_1\ e_2\ e_3\ C'_{600}$	$[22+8e$,	$5+3e$,	$7+3e$,	$6+2e]$	$:2$	192	
$\boldsymbol{e_1 e_2 e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[25+9e}$,	$\boldsymbol{6+4e}$,	$\boldsymbol{9+3e}$,	$\boldsymbol{6+2e]}$	$\boldsymbol{:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_1 e_2 e_3\ C_{600}}$	$\boldsymbol{[25+9e}$,	$\boldsymbol{5+3e}$,	$\boldsymbol{8+4e}$,	$\boldsymbol{8+2e]}$	$\boldsymbol{:2}$		**192**

$ce_2e_3C_{600}$	$15+7e$	, $3+e$	, $2+2e$	, $4+2e$			
C_{600}	$2+2e$	, 0	, 0	, 0			
C_{600}	$3+e$	, 0	, $1+e$	, 2			
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[20+10e$	, $3+e$	, $3+3e$	, $6+2e]:2$		192	
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[22+12e}$	, $\boldsymbol{3+e}$	, $\boldsymbol{3+3e}$	, $\boldsymbol{6+2e]:2}$			**192**
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[23+11e}$	, $\boldsymbol{3+e}$	, $\boldsymbol{4+4e}$	, $\boldsymbol{8+2e]:2}$			**192**
$ce_2e_3C_{600}$	$15+7e$	, $3+e$	, $2+2e$	, $4+2e$			
C_{600}	$2+2e$	, 0	, 0	, 0			
C_{600}	$3+e$	, 2	, 0	, $1+e$			
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[20+10e$	, $5+e$	, $2+2e$	, $5+3e]:2$		192	
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[22+12e}$	, $\boldsymbol{5+e}$	, $\boldsymbol{2+2e}$	, $\boldsymbol{5+3e]:2}$			**192**
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[23+11e}$	, $\boldsymbol{7+e}$	, $\boldsymbol{2+2e}$	, $\boldsymbol{6+4e]:2}$			**192**
$ce_2e_3C_{600}$	$15+7e$	, $3+e$	, $2+2e$	, $4+2e$			
C_{600}	$3+e$	, 0	, $1+e$	, 2			
C_{600}	$3+e$	, 2	, 0	, $1+e$			
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[21+9e$	, $5+e$	, $3+3e$	, $7+3e]:2$		192	
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[24+10e}$	, $\boldsymbol{5+e}$	, $\boldsymbol{4+4e}$	, $\boldsymbol{9+3e]:2}$			**192**
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[24+10e}$	, $\boldsymbol{7+e}$	, $\boldsymbol{3+3e}$	, $\boldsymbol{8+4e]:2}$			**192**
$ce_2e_3C_{600}$	$16+6e$	, $3+e$	, $7+3e$	, 0			
C_{600}	$3+e$	, $1+e$	, 2	, 0			
C_{600}	$3+e$	, 0	, $1+e$	, 2			
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[22+8e$	, $4+2e$	, $10+4e$	, 2	$]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[25+9e}$	, $\boldsymbol{5+3e}$	, $\boldsymbol{12+4e}$	, $\boldsymbol{2}$	$\boldsymbol{]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[25+9e}$	, $\boldsymbol{4+2e}$	, $\boldsymbol{11+5e}$	, $\boldsymbol{4}$	$\boldsymbol{]:2}$		**192**
$ce_2e_3C_{600}$	$16+6e$	, $3+e$	, $7+3e$	, 0			
C_{600}	$3+e$	, 0	, $1+e$	, 2			
C_{600}	$3+e$	, 0	, $1+e$	, -2			
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[22+8e$	, $3+e$	, $9+5e$	, 0	$]:2$	96	
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[25+9e}$	, $\boldsymbol{3+e}$	, $\boldsymbol{10+6e}$	, $\boldsymbol{2}$	$\boldsymbol{]:2}$		**192**

$ce_2e_3C_{600}$	$15+7e$	2	$5+3e$	0			
C_{600}	$2+2e$	0	0	0			
C_{600}	$3+e$	0	$1+e$	2			
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[20+10e$	2	$6+4e$	2	$]$	192	
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\mathbf{[22+12e}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{6+4e}$	$\mathbf{2}$	$]$		$\mathbf{192}$
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\mathbf{[23+11e}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{7+5e}$	$\mathbf{4}$	$]:2$		$\mathbf{192}$

$ce_2e_3C_{600}$	$15+7e$	2	$5+3e$	0			
C_{600}	$3+e$	0	$1+e$	2			
C_{600}	$3+e$	0	$1+e$	-2			
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[21+9e$	2	$7+5e$	0	$]:2$	96	
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\mathbf{[24+10e}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{8+6e}$	$\mathbf{2}$	$]$		$\mathbf{192}$

$ce_2e_3C_{600}$	$15+7e$	$3+e$	$6+2e$	2			
C_{600}	$2+2e$	0	0	0			
C_{600}	$3+e$	$1+e$	2	0			
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[20+10e$	$4+2e$	$8+2e$	2	$]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\mathbf{[22+12e}$	$\mathbf{4+2e}$	$\mathbf{8+2e}$	$\mathbf{2}$	$]:2$		$\mathbf{192}$
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\mathbf{[23+11e}$	$\mathbf{5+3e}$	$\mathbf{10+2e}$	$\mathbf{2}$	$]:2$		$\mathbf{192}$

$ce_2e_3C_{600}$	$15+7e$	$3+e$	$6+2e$	2			
C_{600}	$2+2e$	0	0	0			
C_{600}	$3+e$	0	$1+e$	2			
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[20+10e$	$3+e$	$7+3e$	4	$]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\mathbf{[22+12e}$	$\mathbf{3+e}$	$\mathbf{7+3e}$	$\mathbf{4}$	$]:2$		$\mathbf{192}$
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\mathbf{[23+11e}$	$\mathbf{3+e}$	$\mathbf{8+4e}$	$\mathbf{6}$	$]:2$		$\mathbf{192}$

$ce_2e_3C_{600}$	$15+7e$	$3+e$	$6+2e$	2			
C_{600}	$3+e$	$1+e$	2	0			
C_{600}	$3+e$	0	$1+e$	2			
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[21+9e$	$4+2e$	$9+3e$	4	$]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\mathbf{[24+10e}$	$\mathbf{5+3e}$	$\mathbf{11+3e}$	$\mathbf{4}$	$]:2$		$\mathbf{192}$
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\mathbf{[24+10e}$	$\mathbf{4+2e}$	$\mathbf{10+4e}$	$\mathbf{6}$	$]:2$		$\mathbf{192}$

$$
\begin{array}{lllll}
ce_2e_3C'_{600} & 14+6e\ , & 6+2e\ , & 6+2e\ , & 6+2e \\
C'_{600} & 3+e\ , & 1+e\ , & 2\ , & 0 \\
C'_{600} & 3+e\ , & 0\ , & 1+e\ , & 2 \\
\hline
ce_1e_2e_3C'_{600} & [20+8e\ , & 7+3e\ , & 9+3e\ , & 8+2e]:2 \quad 192
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}} & \boldsymbol{[23+9e\ ,} & \boldsymbol{8+4e\ ,} & \boldsymbol{11+3e\ ,} & \boldsymbol{8+2e]:2} \quad \boldsymbol{192} \\
\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}} & \boldsymbol{[23+9e\ ,} & \boldsymbol{7+3e\ ,} & \boldsymbol{10+4e\ ,} & \boldsymbol{10+2e]:2} \quad \boldsymbol{192}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
ce_2e_3C'_{600} & 12+6e\ , & 6+2e\ , & 5+3e\ , & 7+3e \\
C'_{600} & 1+e\ , & 1+e\ , & 1+e\ , & 1+e \\
C'_{600} & 3+e\ , & 0\ , & 1+e\ , & 2 \\
\hline
ce_1e_2e_3C'_{600} & [16+8e\ , & 7+3e\ , & 7+5e\ , & 10+4e]:2 \quad 192
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}} & \boldsymbol{[17+9e\ ,} & \boldsymbol{8+4e\ ,} & \boldsymbol{8+6e\ ,} & \boldsymbol{11+5e]:2} \quad \boldsymbol{192} \\
\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}} & \boldsymbol{[19+9e\ ,} & \boldsymbol{7+3e\ ,} & \boldsymbol{8+6e\ ,} & \boldsymbol{12+4e]:2} \quad \boldsymbol{192}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
ce_2e_3C'_{600} & 12+6e\ , & 6+2e\ , & 5+3e\ , & 7+3e \\
C'_{600} & 1+e\ , & 1+e\ , & 1+e\ , & 1+e \\
C'_{600} & 3+e\ , & 2\ , & 0\ , & 1+e \\
\hline
ce_1e_2e_3C_{600} & [16+8e\ , & 9+3e\ , & 6+4e\ , & 9+5e]:2 \quad 192
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}} & \boldsymbol{[19+9e\ ,} & \boldsymbol{10+4e\ ,} & \boldsymbol{7+5e\ ,} & \boldsymbol{10+6e]:2} \quad \boldsymbol{192} \\
\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}} & \boldsymbol{[19+9e\ ,} & \boldsymbol{11+3e\ ,} & \boldsymbol{6+4e\ ,} & \boldsymbol{10+6e]:2} \quad \boldsymbol{192}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
ce_2e_3C'_{600} & 12+6e\ , & 6+2e\ , & 5+3e\ , & 7+3e \\
C'_{600} & 3+e\ , & 0\ , & 1+e\ , & 2 \\
C'_{600} & 3+e\ , & 2\ , & 0\ , & 1+e \\
\hline
ce_1e_2e_3C'_{600} & [18+8e\ , & 8+2e\ , & 6+4e\ , & 10+4e]:2 \quad 192
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}} & \boldsymbol{[21+9e\ ,} & \boldsymbol{8+2e\ ,} & \boldsymbol{7+5e\ ,} & \boldsymbol{12+4e]:2} \quad \boldsymbol{192} \\
\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}} & \boldsymbol{[21+9e\ ,} & \boldsymbol{10+2e\ ,} & \boldsymbol{6+4e\ ,} & \boldsymbol{11+5e]:2} \quad \boldsymbol{192}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
ce_2e_3C'_{600} & 10+4e\ , & 10+4e\ , & 10+4e\ , & 2 \\
C'_{600} & 3+e\ , & 1+e\ , & 2\ , & 0 \\
C'_{600} & 2\ , & 3+e\ , & 1+e\ , & 0 \\
\hline
ce_1e_2e_3C'_{600} & [15+5e\ , & 14+6e\ , & 13+5e\ , & 2\ ]:2 \quad 192
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}} & \boldsymbol{[18+6e\ ,} & \boldsymbol{15+7e\ ,} & \boldsymbol{15+5e\ ,} & \boldsymbol{2\ ]:2} \quad \boldsymbol{192} \\
\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}} & \boldsymbol{[17+5e\ ,} & \boldsymbol{17+7e\ ,} & \boldsymbol{14+6e\ ,} & \boldsymbol{2\ ]:2} \quad \boldsymbol{192}
\end{array}
$$

$ce_2e_3C_{600}$	$8+4e$	$,10+4e$	$,9+5e$	$,3+e$		
C_{600}	$1+e$	$,1+e$	$,1+e$	$,1+e$		
C_{600}	2	$,3+e$	$,1+e$	$,0$		
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[11+5e$	$,14+6e$	$,11+7e$	$,4+2e]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[12+6e}$	$\boldsymbol{,15+7e}$	$\boldsymbol{,12+8e}$	$\boldsymbol{,5+3e]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[13+5e}$	$\boldsymbol{,17+7e}$	$\boldsymbol{,12+8e}$	$\boldsymbol{,4+2e]:2}$		**192**

$ce_2e_3C_{600}$	$8+4e$	$,10+4e$	$,9+5e$	$,3+e$		
C_{600}	$1+e$	$,1+e$	$,1+e$	$,1+e$		
C_{600}	$1+e$	$,2$	$,3+e$	$,0$		
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[10+6e$	$,13+5e$	$,13+7e$	$,4+2e]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[11+7e}$	$\boldsymbol{,14+6e}$	$\boldsymbol{,14+8e}$	$\boldsymbol{,5+3e]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[11+7e}$	$\boldsymbol{,15+5e}$	$\boldsymbol{,16+8e}$	$\boldsymbol{,4+2e]:2}$		**192**

$ce_2e_3C_{600}$	$8+4e$	$,10+4e$	$,9+5e$	$,3+e$		
C_{600}	2	$,3+e$	$,1+e$	$,0$		
C_{600}	$1+e$	$,2$	$,3+e$	$,0$		
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[11+5e$	$,15+5e$	$,13+7e$	$,3+e\ ]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[13+5e}$	$\boldsymbol{,18+6e}$	$\boldsymbol{,14+8e}$	$\boldsymbol{,3+e\ ]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[12+6e}$	$\boldsymbol{,17+5e}$	$\boldsymbol{,16+8e}$	$\boldsymbol{,3+e\ ]:2}$		**192**

$ce_2e_3C_{600}$	$10+4e$	$,13+5e$	$,6+2e$	$,3+e$		
C_{600}	$3+e$	$,1+e$	$,2$	$,0$		
C_{600}	$1+e$	$,3+e$	$,0$	$,2$		
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[14+6e$	$,17+7e$	$,8+2e$	$,5+e\ ]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[17+7e}$	$\boldsymbol{,18+8e}$	$\boldsymbol{,10+2e}$	$\boldsymbol{,5+e\ ]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[15+7e}$	$\boldsymbol{,20+8e}$	$\boldsymbol{,8+2e}$	$\boldsymbol{,7+e\ ]:2}$		**192**

$ce_2e_3C_{600}$	$10+4e$	$,13+5e$	$,6+2e$	$,3+e$		
C_{600}	$3+e$	$,1+e$	$,2$	$,0$		
C_{600}	2	$,3+e$	$,1+e$	$,0$		
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[15+5e$	$,17+7e$	$,9+3e$	$,3+e\ ]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[18+6e}$	$\boldsymbol{,18+8e}$	$\boldsymbol{,11+3e}$	$\boldsymbol{,3+e\ ]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[17+5e}$	$\boldsymbol{,20+8e}$	$\boldsymbol{,10+4e}$	$\boldsymbol{,3+e\ ]:2}$		**192**

$ce_2e_3C_{600}$	$10+4e$	$13+5e$	$6+2e$	$3+e$		
C_{600}	$1+e$	$3+e$	0	2		
C_{600}	2	$3+e$	$1+e$	0		
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[13+5e$	$19+7e$	$7+3e$	$5+e]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[14+6e}$	$\boldsymbol{22+8e}$	$\boldsymbol{7+3e}$	$\boldsymbol{7+e]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[15+5e}$	$\boldsymbol{22+8e}$	$\boldsymbol{8+4e}$	$\boldsymbol{5+e]:2}$		**192**
$ce_2e_3C_{600}$	$8+4e$	$13+5e$	$5+3e$	$4+2e$		
C_{600}	$1+e$	$1+e$	$1+e$	$1+e$		
C_{600}	$1+e$	$3+e$	0	2		
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[10+6e$	$17+7e$	$6+4e$	$7+3e]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[11+7e}$	$\boldsymbol{18+8e}$	$\boldsymbol{7+5e}$	$\boldsymbol{8+4e]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[11+7e}$	$\boldsymbol{20+8e}$	$\boldsymbol{6+4e}$	$\boldsymbol{9+3e]:2}$		**192**
$ce_2e_3C_{600}$	$8+4e$	$13+5e$	$5+3e$	$4+2e$		
C_{600}	$1+e$	$1+e$	$1+e$	$1+e$		
C_{600}	2	$3+e$	$1+e$	0		
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[11+5e$	$17+7e$	$7+5e$	$5+3e]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[12+6e}$	$\boldsymbol{18+8e}$	$\boldsymbol{8+6e}$	$\boldsymbol{6+4e]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[13+5e}$	$\boldsymbol{20+8e}$	$\boldsymbol{8+6e}$	$\boldsymbol{5+3e]:2}$		**192**
$ce_2e_3C_{600}$	$8+4e$	$13+5e$	$5+3e$	$4+2e$		
C_{600}	$1+e$	$3+e$	0	2		
C_{600}	2	$3+e$	$1+e$	0		
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[11+5e$	$19+7e$	$6+4e$	$6+2e]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[12+6e}$	$\boldsymbol{22+8e}$	$\boldsymbol{6+4e}$	$\boldsymbol{8+2e]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[13+5e}$	$\boldsymbol{22+8e}$	$\boldsymbol{7+5e}$	$\boldsymbol{6+2e]:2}$		**192**
$ce_2e_3C_{600}$	$10+4e$	$11+5e$	$7+3e$	$2+2e$		
C_{600}	$1+e$	$1+e$	$1+e$	$1+e$		
C_{600}	$3+e$	$1+e$	2	0		
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[14+6e$	$13+7e$	$10+4e$	$3+3e]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[15+7e}$	$\boldsymbol{14+8e}$	$\boldsymbol{11+5e}$	$\boldsymbol{4+4e]:2}$		**192**
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[17+7e}$	$\boldsymbol{14+8e}$	$\boldsymbol{12+4e}$	$\boldsymbol{3+3e]:2}$		**192**

$$
\begin{array}{llllll}
ce_2e_3C'_{600} & 10+4e & ,11+5e, & 7+3e, & 2+2e & \\
C'_{600} & 1+e & , 1+e & , 1+e & , 1+e & \\
C'_{600} & 2 & , 3+e & , 1+e & , 0 & \\
\hline
ce_1e_2e_3C'_{600} & [13+5e & ,15+7e, & 9+5e, & 3+3e]:2 & 192
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}} & \boldsymbol{[14+6e} & \boldsymbol{,16+8e,10+6e,} & \boldsymbol{4+4e]:2} \quad \boldsymbol{192} \\
\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}} & \boldsymbol{[15+5e} & \boldsymbol{,18+8e,10+6e,} & \boldsymbol{3+3e]:2} \quad \boldsymbol{192}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
ce_2e_3C'_{600} & 10+4e & ,11+5e, & 7+3e, & 2+2e & \\
C'_{600} & 3+e & , 1+e & , 2 & , 0 & \\
C'_{600} & 2 & , 3+e & , 1+e & , 0 & \\
\hline
ce_1e_2e_3C'_{600} & [15+5e & ,15+7e, & 10+4e, & 2+2e]:2 & 192
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}} & \boldsymbol{[18+6e} & \boldsymbol{,16+8e,12+4e,} & \boldsymbol{2+2e]:2} \quad \boldsymbol{192} \\
\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}} & \boldsymbol{[17+5e} & \boldsymbol{,18+8e,11+5e,} & \boldsymbol{2+2e]:2} \quad \boldsymbol{192}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
ce_2e_3C'_{600} & 9+5e & ,11+5e, & 6+2e, & 4+2e & \\
C'_{600} & 1+e & , 1+e & , 1+e & , 1+e & \\
C'_{600} & 3+e & , 1+e & , 2 & , 0 & \\
\hline
ce_1e_2e_3C'_{600} & [13+7e & ,13+7e, & 9+3e, & 5+3e] & 192
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}} & \boldsymbol{[14+8e} & \boldsymbol{,14+8e,10+4e,} & \boldsymbol{6+4e]} \quad \boldsymbol{192} \\
\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}} & \boldsymbol{[16+8e} & \boldsymbol{,14+8e,11+3e,} & \boldsymbol{5+3e]:2} \quad \boldsymbol{192}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
ce_2e_3C'_{600} & 9+5e & ,11+5e, & 6+2e, & 4+2e & \\
C'_{600} & 1+e & , 1+e & , 1+e & , 1+e & \\
C'_{600} & 1+e & , 3+e & , 0 & , 2 & \\
\hline
ce_1e_2e_3C'_{600} & [11+7e & ,15+7e, & 7+3e, & 7+3e] & 192
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}} & \boldsymbol{[12+8e} & \boldsymbol{,16+8e,} & \boldsymbol{8+4e, 8+4e]} \quad \boldsymbol{192} \\
\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}} & \boldsymbol{[12+8e} & \boldsymbol{,18+8e,} & \boldsymbol{7+3e, 9+3e]:2} \quad \boldsymbol{192}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
ce_2e_3C'_{600} & 9+5e & ,11+5e, & 6+2e, & 4+2e & \\
C'_{600} & 3+e & , 1+e & , 2 & , 0 & \\
C'_{600} & 1+e & , 3+e & , 0 & , 2 & \\
\hline
ce_1e_2e_3C'_{600} & [13+7e & ,15+7e, & 8+2e, & 6+2e]:2 & 192
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}} & \boldsymbol{[16+8e} & \boldsymbol{,16+8e,10+2e,} & \boldsymbol{6+2e]} \quad \boldsymbol{192} \\
\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}} & \boldsymbol{[14+8e} & \boldsymbol{,18+8e,} & \boldsymbol{8+2e, 8+2e]} \quad \boldsymbol{192}
\end{array}
$$

$ce_2e_3C_{600}$	$12+6e$	$3+e$	$9+5e$	0				
C_{600}	$3+e$	0	$1+e$	2				
C_{600}	$3+e$	0	$1+e$	-2				
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[18+8e$	$3+e$	$11+7e$	0	$]:2$	96		
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[21+9e}$	$\boldsymbol{3+e}$	$\boldsymbol{12+8e}$	$\boldsymbol{2}$	$\boldsymbol{]:2}$			**192**
$ce_2e_3C_{600}$	$12+6e$	$3+e$	$9+5e$	0				
C_{600}	$3+e$	0	$1+e$	2				
C_{600}	$1+e$	2	$3+e$	0				
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[16+8e$	$5+e$	$13+7e$	2	$]:2$	192		
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[19+9e}$	$\boldsymbol{5+e}$	$\boldsymbol{14+8e}$	$\boldsymbol{4}$	$\boldsymbol{]:2}$			**192**
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[17+9e}$	$\boldsymbol{7+e}$	$\boldsymbol{16+8e}$	$\boldsymbol{2}$	$\boldsymbol{]:2}$			**192**
$ce_2e_3C_{600}$	$12+6e$	$4+2e$	$10+4e$	2				
C_{600}	$3+e$	$1+e$	2	0				
C_{600}	$3+e$	0	$1+e$	2				
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[18+8e$	$5+3e$	$13+5e$	4	$]:2$	192		
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[21+9e}$	$\boldsymbol{6+4e}$	$\boldsymbol{15+5e}$	$\boldsymbol{4}$	$\boldsymbol{]:2}$			**192**
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[21+9e}$	$\boldsymbol{5+3e}$	$\boldsymbol{14+6e}$	$\boldsymbol{6}$	$\boldsymbol{]:2}$			**192**
$ce_2e_3C_{600}$	$12+6e$	$4+2e$	$10+4e$	2				
C_{600}	$3+e$	$1+e$	2	0				
C_{600}	$1+e$	2	$3+e$	0				
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[16+8e$	$7+3e$	$15+5e$	2	$]:2$	192		
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[19+9e}$	$\boldsymbol{8+4e}$	$\boldsymbol{17+5e}$	$\boldsymbol{2}$	$\boldsymbol{]:2}$			**192**
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[17+9e}$	$\boldsymbol{9+3e}$	$\boldsymbol{18+6e}$	$\boldsymbol{2}$	$\boldsymbol{]:2}$			**192**
$ce_2e_3C_{600}$	$12+6e$	$4+2e$	$10+4e$	2				
C_{600}	$3+e$	0	$1+e$	2				
C_{600}	$1+e$	-2	$3+e$	0				
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[16+8e$	$6+2e$	$14+6e$	4	$]:2$	192		
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[19+9e}$	$\boldsymbol{6+2e}$	$\boldsymbol{15+7e}$	$\boldsymbol{6}$	$\boldsymbol{]:2}$			**192**
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[17+9e}$	$\boldsymbol{8+2e}$	$\boldsymbol{17+7e}$	$\boldsymbol{4}$	$\boldsymbol{]:2}$			**192**

$ce_2e_3C_{600}$	$14+6e$	$2+2e$	$8+4e$	0			
C_{600}	$3+e$	$1+e$	2	0			
C_{600}	$3+e$	0	$1+e$	2			
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[20+8e$	$3+3e$	$11+5e$	2	$]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[23+9e}$	$\boldsymbol{4+4e}$	$\boldsymbol{13+5e}$	$\boldsymbol{2}$	$]:2$		$\boldsymbol{192}$
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[23+9e}$	$\boldsymbol{3+3e}$	$\boldsymbol{12+6e}$	$\boldsymbol{4}$	$]:2$		$\boldsymbol{192}$
$ce_2e_3C_{600}$	$14+6e$	$2+2e$	$8+4e$	0			
C_{600}	$3+e$	0	$1+e$	2			
C_{600}	$3+e$	0	$1+e$	-2			
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[20+8e$	$2+2e$	$10+6e$	0	$]:2$	96	
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[23+9e}$	$\boldsymbol{2+2e}$	$\boldsymbol{11+7e}$	$\boldsymbol{2}$	$]:2$		$\boldsymbol{192}$
$ce_2e_3C_{600}$	$11+5e$	$13+5e$	2	0			
C_{600}	$3+e$	$1+e$	2	0			
C_{600}	$1+e$	$3+e$	0	2			
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[15+7e$	$17+7e$	4	2	$]:2$	192	
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[18+8e}$	$\boldsymbol{18+8e}$	$\boldsymbol{6}$	$\boldsymbol{2}$	$]$		$\boldsymbol{192}$
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[16+8e}$	$\boldsymbol{20+8e}$	$\boldsymbol{4}$	$\boldsymbol{4}$	$]$		$\boldsymbol{192}$
$ce_2e_3C_{600}$	$11+5e$	$13+5e$	2	0			
C_{600}	$1+e$	$3+e$	0	2			
C_{600}	$1+e$	$3+e$	0	-2			
$ce_1e_2e_3C_{600}$	$[13+7e$	$19+7e$	2	0	$]:2$	96	
$\boldsymbol{e_1e_2e_3C_{600}}$	$\boldsymbol{[14+8e}$	$\boldsymbol{22+8e}$	$\boldsymbol{2}$	$\boldsymbol{2}$	$]$		$\boldsymbol{192}$
						7200	$\boldsymbol{14400}$

160. The following table contains the coordinate-symbols of the polytopes of the C_{600}-family.

C_{600}	$[3+e$	2	0	$1+e]$	$:2$	96
	$[2+2e$	0	0	0	$]$	8
	$[1+e$	$1+e$	$1+e$	$1+e]$		16
						120

$ce_1\,C'_{600}$	$[6+2e,\ 3+e,\ 2,\ 1+e]:2$		192
	$[6+2e,\ 2+2e,\ 0,\ 0]$		48
	$[5+3e,\ 2,\ 0,\ 1+e]:2$		96
	$[5+e,\ 4+2e,\ 3+e,\ 0]:2$		96
	$[4+2e,\ 4+2e,\ 2,\ 2]$		96
	$[4+2e,\ 3+e,\ 1+e,\ 2+2e]:2$		192
			720
$ce_2\,C'_{600}$	$[9+3e,\ 4+2e,\ 0,\ 1+e]:2$		96
	$[9+3e,\ 3+e,\ 3+e,\ 3+e]$		64
	$[8+4e,\ 3+e,\ 2,\ 1+e]:2$		192
	$[8+4e,\ 2+2e,\ 0,\ 0]$		48
	$[7+3e,\ 6+2e,\ 2,\ 3+e]:2$		192
	$[7+3e,\ 5+3e,\ 0,\ 2]:2$		96
	$[7+3e,\ 4+2e,\ 3+e,\ 2+2e]:2$		192
	$[6+2e,\ 6+2e,\ 6+2e,\ 0]$		32
	$[6+2e,\ 5+3e,\ 4+2e,\ 1+e]:2$		192
	$[5+3e,\ 5+3e,\ 3+e,\ 3+e]$		96
			1200
$ce_3\,C'_{600}$	$[7+3e,\ 3+e,\ 0,\ 2]:2$		96
	$[7+3e,\ 1+e,\ 1+e,\ 1+e]$		64
	$[6+2e,\ 6+2e,\ 0,\ 0]$		24
	$[6+2e,\ 4+2e,\ 1+e,\ 3+e]:2$		192
	$[5+3e,\ 4+2e,\ 0,\ 1+e]:2$		96
	$[5+3e,\ 3+e,\ 3+e,\ 3+e]$		64
	$[4+2e,\ 4+2e,\ 4+2e,\ 2]$		64
			600
$e_1\,C'_{600}$	$[9+3e,\ 5+e,\ 2,\ 2+2e]:2$		192
	$[9+3e,\ 4+2e,\ 4,\ 1+e]:2$		192
	$[9+3e,\ 3+3e,\ 2,\ 0]:2$		96
	$[8+4e,\ 4,\ 0,\ 2+2e]:2$		96
	$[8+2e,\ 5+3e,\ 5+e,\ 0]:2$		96
	$[7+5e,\ 2,\ 0,\ 1+e]:2$		96
	$[7+3e,\ 7+e,\ 0,\ 4+2e]:2$		96
	$[7+3e,\ 5+3e,\ 4,\ 2]:2$		192
	$[7+3e,\ 5+e,\ 1+e,\ 3+3e]:2$		192
	$[5+3e,\ 4+2e,\ 2+2e,\ 3+3e]:2$		192
			1440

$e_2\,C_{600}$	$[12+4e\ ,\ 6+2e\ ,\ 0\ ,\ 2+2e]$	: 2	96
	$[12+4e\ ,\ 5+3e\ ,\ 2\ ,\ 1+e\ ]$	: 2	192
	$[12+4e\ ,\ 5+e\ ,\ 3+e\ ,\ 4+2e]$	: 2	192
	$[11+5e\ ,\ 5+e\ ,\ 2\ ,\ 2+2e]$	: 2	192
	$[11+5e\ ,\ 4+2e\ ,\ 4\ ,\ 1+e\ ]$	: 2	192
	$[11+5e\ ,\ 3+3e\ ,\ 2\ ,\ 0\ ]$	: 2	96
	$[10+6e\ ,\ 3+e\ ,\ 2\ ,\ 1+e\ ]$	: 2	192
	$[10+6e\ ,\ 2+2e\ ,\ 0\ ,\ 0\ ]$		48
	$[10+4e\ ,\ 8+2e\ ,\ 2\ ,\ 4+2e]$	: 2	192
	$[10+4e\ ,\ 7+3e\ ,\ 4\ ,\ 3+e\ ]$	: 2	192
	$[10+4e\ ,\ 6+4e\ ,\ 2\ ,\ 2\ ]$		192
	$[10+4e\ ,\ 6+2e\ ,\ 3+e\ ,\ 3+3e]$	: 2	192
	$[10+4e\ ,\ 5+3e\ ,\ 5+e\ ,\ 2+2e]$	: 2	192
	$[\ 9+3e\ ,\ 8+4e\ ,\ 5+e\ ,\ 2\ ]$	: 2	192
	$[\ 9+3e\ ,\ 8+2e\ ,\ 0\ ,\ 7+3e]$	: 2	96
	$[\ 9+3e\ ,\ 6+4e\ ,\ 6+2e\ ,\ 1+e\ ]$	: 2	192
	$[\ 8+4e\ ,\ 8+4e\ ,\ 4\ ,\ 0\ ]$		96
	$[\ 8+4e\ ,\ 8+2e\ ,\ 1+e\ ,\ 5+3e]$	: 2	192
	$[\ 8+4e\ ,\ 6+4e\ ,\ 5+e\ ,\ 3+e\ ]$	: 2	192
	$[\ 8+4e\ ,\ 5+3e\ ,\ 4+2e\ ,\ 3+3e]$	: 2	192
	$[\ 7+3e\ ,\ 6+4e\ ,\ 5+3e\ ,\ 2+2e]$	: 2	192
	$[\ 6+4e\ ,\ 6+4e\ ,\ 4+2e\ ,\ 4+2e]$		96
			3600

$ce_1\,e_2\,C_{600}$	$[15+5e\ ,\ 7+3e\ ,\ 2\ ,\ 2+2e]$	: 2	192
	$[15+5e\ ,\ 6+4e\ ,\ 0\ ,\ 1+e\ ]$	: 2	96
	$[15+5e\ ,\ 6+2e\ ,\ 5+e\ ,\ 4+2e]$	: 2	192
	$[14+6e\ ,\ 6+2e\ ,\ 4\ ,\ 2+2e]$	: 2	192
	$[14+6e\ ,\ 4+4e\ ,\ 0\ ,\ 0\ ]$		48
	$[13+7e\ ,\ 5+e\ ,\ 2\ ,\ 2+2e]$	: 2	192
	$[13+7e\ ,\ 4+2e\ ,\ 4\ ,\ 1+e\ ]$	: 2	192
	$[13+7e\ ,\ 3+3e\ ,\ 2\ ,\ 0\ ]$	: 2	96
	$[13+5e\ ,\ 9+3e\ ,\ 4\ ,\ 4+2e]$	: 2	192
	$[13+5e\ ,\ 7+5e\ ,\ 0\ ,\ 2\ ]$	: 2	96
	$[13+5e\ ,\ 7+3e\ ,\ 5+e\ ,\ 3+3e]$	: 2	192
	$[11+5e\ ,\ 11+3e\ ,\ 2\ ,\ 6+2e]$	: 2	192
	$[11+5e\ ,\ 10+4e\ ,\ 4\ ,\ 5+e\ ]$	: 2	192
	$[11+5e\ ,\ 9+5e\ ,\ 2\ ,\ 4\ ]$	: 2	192
	$[11+5e\ ,\ 7+3e\ ,\ 4+2e\ ,\ 4+4e]$	: 2	192
	$[11+5e\ ,\ 6+4e\ ,\ 6+2e\ ,\ 3+3e]$	: 2	192
	$[11+3e\ ,\ 10+4e\ ,\ 9+3e\ ,\ 0\ ]$	: 2	96

	[11+3e ,	9+5e ,	7+3e ,	1+e]	: 2	192
	[10+4e ,	7+5e ,	7+3e ,	2+2e]	: 2	192
	[9+5e ,	9+5e ,	5+e ,	5+e]		96
	[9+5e ,	9+3e ,	2+2e ,	6+4e]	: 2	192
	[9+5e ,	7+5e ,	6+2e ,	4+2e]	: 2	192
						3600
$e_1\, e_2\, C_{600}$	[18+6e ,	9+3e ,	2 ,	3+3e]	: 2	192
	[18+6e ,	8+4e ,	4 ,	2+2e]	: 2	192
	[18+6e ,	8+2e ,	5+e ,	5+3e]	: 2	192
	[18+6e ,	7+5e ,	2 ,	1+e]	: 2	192
	[18+6e ,	7+3e ,	7+e ,	4+2e]	: 2	192
	[17+7e ,	8+2e ,	4 ,	3+3e]	: 2	192
	[17+7e ,	7+3e ,	6 ,	2+2e]	: 2	192
	[17+7e ,	5+5e ,	2 ,	0]	: 2	96
	[16+8e ,	7+e ,	2 ,	3+3e]	: 2	192
	[16+8e ,	6 ,	1+e ,	5+3e]	: 2	192
	[16+8e ,	4+4e ,	4 ,	0]	: 2	96
	[16+6e ,	11+3e ,	4 ,	5+3e]	: 2	192
	[16+6e ,	10+4e ,	6 ,	4+2e]	: 2	192
	[16+6e ,	9+3e ,	5+e ,	4+4e]	: 2	192
	[16+6e ,	8+6e ,	2 ,	2]		192
	[16+6e ,	8+4e ,	7+e ,	3+3e]	: 2	192
	[15+9e ,	5+e ,	2 ,	2+2e]	: 2	192
	[15+9e ,	4+2e ,	4 ,	1+e]	: 2	192
	[15+9e ,	3+3e ,	2 ,	0]	: 2	96
	[14+6e ,	13+3e ,	2 ,	7+3e]	: 2	192
	[14+6e ,	11+5e ,	6 ,	5+e]	: 2	192
	[14+6e ,	10+6e ,	4 ,	4]		192
	[14+6e ,	9+3e ,	4+2e ,	5+5e]	: 2	192
	[14+6e ,	8+2e ,	3+3e ,	7+5e]	: 2	192
	[14+4e ,	12+6e ,	8+2e ,	2]	: 2	192
	[14+4e ,	11+5e ,	11+3e ,	0]	: 2	96
	[14+4e ,	10+6e ,	9+3e ,	1+e]	: 2	192
	[13+5e ,	13+3e ,	0 ,	10+4e]	: 2	96
	[13+5e ,	12+6e ,	7+e ,	4]	: 2	192
	[13+5e ,	9+3e ,	2+2e ,	8+6e]	: 2	192
	[13+3e ,	12+6e ,	8+4e ,	1+e]	: 2	192
	[12+6e ,	12+6e ,	6 ,	2]		192
	[12+6e ,	11+3e ,	2+2e ,	7+5e]	: 2	192
	[12+6e ,	10+6e ,	7+e ,	5+e]	: 2	192

	[12+6e , 8+6e , 8+2e , 4+2e] : 2				192
	[12+6e , 8+4e , 5+3e , 5+5e] : 2				192
	[12+6e , 7+5e , 7+3e , 4+4e] : 2				192
	[11+5e , 8+6e , 8+4e , 3+3e] : 2				192
	[10+6e , 10+4e , 3+3e , 7+5e] : 2				192
	[10+6e , 8+6e , 7+3e , 5+3e] : 2				192
					7200
$e_3\,C'_{600}$	[10+4e , 5+e , 0 , 3+e] : 2				96
	[10+4e , 4+2e , 2 , 2]				192
	[10+4e , 3+e , 1+e , 2+2e] : 2				192
	[9+5e , 3+e , 0 , 2] : 2				96
	[9+5e , 1+e , 1+e , 1+e]				64
	[9+3e , 7+3e , 2 , 0] : 2				96
	[9+3e , 6+2e , 1+e , 4+2e] : 2				192
	[9+3e , 5+3e , 3+e , 3+e]				192
	[8+4e , 6+2e , 0 , 2+2e] : 2				96
	[8+4e , 5+3e , 2 , 1+e] : 2				192
	[8+4e , 5+e , 3+e , 4+2e] : 2				192
	[7+3e , 7+3e , 5+e , 1+e]				192
	[7+3e , 6+4e , 3+e , 0] : 2				96
	[7+3e , 6+2e , 2 , 5+3e] : 2				192
	[7+3e , 5+3e , 2+2e , 4+2e] : 2				192
	[6+4e , 4+2e , 4+2e , 4+2e]				64
	[5+3e , 5+3e , 5+3e , 3+e]				64
					2400
$ce_1\,e_3\,C'_{600}$	[13+5e , 6+2e , 2 , 3+e] : 2				192
	[13+5e , 5+3e , 0 , 2] : 2				96
	[13+5e , 4+2e , 3+e , 2+2e] : 2				192
	[12+6e , 5+e , 0 , 3+e] : 2				96
	[12+6e , 4+2e , 2 , 2]				192
	[12+6e , 3+e , 1+e , 2+2e] : 2				192
	[12+4e , 8+4e , 0 , 0]				48
	[12+4e , 7+3e , 3+e , 4+2e] : 2				192
	[11+5e , 7+3e , 2 , 2+2e] : 2				192
	[11+5e , 6+4e , 0 , 1+e] : 2				96
	[11+5e , 6+2e , 5+e , 4+2e] : 2				192
	[10+4e , 10+4e , 2 , 2]				96
	[10+4e , 9+3e , 1+e , 6+2e] : 2				192
	[10+4e , 8+4e , 3+e , 5+e] : 2				192

$[10+4e,\ 7+3e,\ 2+2e,\ 5+3e] : 2$			192
$[10+4e,\ 6+4e,\ 4+2e,\ 4+2e]$			192
$[\ 9+5e,\ 9+3e,\ 0,\ 4+2e] : 2$			96
$[\ 9+5e,\ 8+4e,\ 2,\ 3+e\ ] : 2$			192
$[\ 9+5e,\ 6+2e,\ 4+2e,\ 5+3e] : 2$			192
$[\ 9+3e,\ 8+1e,\ 7+3e,\ 2\ ] : 2$			192
$[\ 8+4e,\ 8+4e,\ 6+2e,\ 2+2e]$			192
$[\ 8+4e,\ 7+3e,\ 3+e,\ 6+4e] : 2$			192
			3600
$e_1 e_3 C_{600}$	$[16+6e,\ 8+2e,\ 2,\ 4+2e] : 2$		192
	$[16+6e,\ 7+3e,\ 4,\ 3+e\ ] : 2$		192
	$[16+6e,\ 6+4e,\ 2,\ 2\ ]$		192
	$[16+6e,\ 6+2e,\ 3+e,\ 3+3e] : 2$		192
	$[16+6e,\ 5+3e,\ 5+e,\ 2+2e] : 2$		192
	$[15+7e,\ 7+e,\ 0,\ 4+2e] : 2$		96
	$[15+7e,\ 5+3e,\ 4,\ 2\ ] : 2$		192
	$[15+7e,\ 5+e,\ 1+e,\ 3+3e] : 2$		192
	$[15+5e,\ 9+5e,\ 2,\ 0\ ] : 2$		96
	$[15+5e,\ 9+3e,\ 3+e,\ 5+3e] : 2$		192
	$[15+5e,\ 8+4e,\ 5+e,\ 4+2e] : 2$		192
	$[14+8e,\ 5+e,\ 0,\ 3+e\ ] : 2$		96
	$[14+8e,\ 4+2e,\ 2,\ 2\ ]$		192
	$[14+8e,\ 3+e,\ 1+e,\ 2+2e] : 2$		192
	$[14+6e,\ 9+3e,\ 2,\ 3+3e] : 2$		192
	$[14+6e,\ 8+4e,\ 1,\ 2+2e] : 2$		192
	$[14+6e,\ 8+2e,\ 5+e,\ 5+3e] : 2$		192
	$[14+6e,\ 7+5e,\ 2,\ 1+e\ ] : 2$		192
	$[14+6e,\ 7+3e,\ 7+e,\ 1+2e] : 2$		192
	$[13+5e,\ 11+5e,\ 4,\ 2\ ] : 2$		192
	$[13+5e,\ 11+3e,\ 1+e,\ 7+3e] : 2$		192
	$[13+5e,\ 9+5e,\ 5+e,\ 5+e\ ]$		192
	$[13+5e,\ 9+3e,\ 2+2e,\ 6+4e] : 2$		192
	$[13+5e,\ 7+5e,\ 6+2e,\ 4+2e] : 2$		192
	$[12+6e,\ 11+3e,\ 0,\ 5+3e] : 2$		96
	$[12+6e,\ 9+5e,\ 4,\ 3+e\ ] : 2$		192
	$[12+6e,\ 8+2e,\ 1+2e,\ 6+4e] : 2$		192
	$[12+4e,\ 11+5e,\ 8+2e,\ 1+e\ ] : 2$		192
	$[12+4e,\ 10+6e,\ 6+2e,\ 0\ ] : 2$		96
	$[12+4e,\ 9+5e,\ 9+3e,\ 2\ ] : 2$		192
	$[11+5e,\ 11+5e,\ 7+e,\ 3+e\ ]$		192

$[11+5e\ ,\ 11+3e\ ,\ 2\ ,\ 8+4e] : 2$	192		
$[11+5e\ ,\ 10+6e\ ,\ 5+e\ ,\ 2\ ] : 2$	192		
$[11+5e\ ,\ 9+5e\ ,\ 8+2e\ ,\ 2+2e] : 2$	192		
$[11+5e\ ,\ 9+3e\ ,\ 3+e\ ,\ 7+5e] : 2$	192		
$[11+5e\ ,\ 8+4e\ ,\ 3+3e\ ,\ 6+4e] : 2$	192		
$[11+5e\ ,\ 7+5e\ ,\ 5+3e\ ,\ 5+3e]$	192		
$[10+6e\ ,\ 7+3e\ ,\ 5+3e\ ,\ 6+4e] : 2$	192		
$[\ 9+5e\ ,\ 9+5e\ ,\ 7+3e\ ,\ 3+3e]$	192		
$[\ 9+5e\ ,\ 8+4e\ ,\ 4+2e\ ,\ 7+5e] : 2$	192		
	7200		

$ce_2e_3C_{600}$	$[16+6e\ ,\ 7+3e\ ,\ 0\ ,\ 3+e\ ] : 2$	96	
	$[16+6e\ ,\ 4+2e\ ,\ 1+2e\ ,\ 4+2e]$	64	
	$[15+7e\ ,\ 6+2e\ ,\ 2\ ,\ 3+e\ ] : 2$	192	
	$[15+7e\ ,\ 5+3e\ ,\ 0\ ,\ 2\ ] : 2$	96	
	$[15+7e\ ,\ 4+2e\ ,\ 3+e\ ,\ 2+2e] : 2$	192	
	$[14+6e\ ,\ 8+4e\ ,\ 0\ ,\ 2+2e] : 2$	96	
	$[11+6e\ ,\ 6+2e\ ,\ 6+2e\ ,\ 6+2e]$	64	
	$[13+5e\ ,\ 11+5e\ ,\ 0\ ,\ 2\ ] : 2$	96	
	$[13+5e\ ,\ 10+4e\ ,\ 3+e\ ,\ 6+2e] : 2$	192	
	$[13+5e\ ,\ 8+4e\ ,\ 4+2e\ ,\ 5+3e] : 2$	192	
	$[12+6e\ ,\ 10+4e\ ,\ 2\ ,\ 4+2e] : 2$	192	
	$[12+6e\ ,\ 9+5e\ ,\ 0\ ,\ 3+e\ ] : 2$	96	
	$[12+6e\ ,\ 7+3e\ ,\ 6+2e\ ,\ 5+3e] : 2$	192	
	$[11+5e\ ,\ 10+4e\ ,\ 2+2e\ ,\ 7+3e] : 2$	192	
	$[11+5e\ ,\ 9+5e\ ,\ 4+2e\ ,\ 6+2e] : 2$	192	
	$[10+4e\ ,\ 10+4e\ ,\ 10+4e\ ,\ 2\ ]$	64	
	$[10+4e\ ,\ 9+5e\ ,\ 8+4e\ ,\ 3+e\ ] : 2$	192	
	2400		

$e_2e_3C_{600}$	$[19+7e\ ,\ 9+3e\ ,\ 0\ ,\ 4+2e] : 2$	96	
	$[19+7e\ ,\ 8+4e\ ,\ 2\ ,\ 3+e\ ] : 2$	192	
	$[19+7e\ ,\ 6+2e\ ,\ 4+2e\ ,\ 5+3e] : 2$	192	
	$[18+8e\ ,\ 8+2e\ ,\ 2\ ,\ 4+2e] : 2$	192	
	$[18+8e\ ,\ 7+3e\ ,\ 4\ ,\ 3+e\ ] : 2$	192	
	$[18+8e\ ,\ 6+4e\ ,\ 2\ ,\ 2\ ]$	192	
	$[18+8e\ ,\ 6+2e\ ,\ 3+e\ ,\ 3+3e] : 2$	192	
	$[18+8e\ ,\ 5+3e\ ,\ 5+e\ ,\ 2+2e] : 2$	192	
	$[17+9e\ ,\ 6+2e\ ,\ 2\ ,\ 3+e\ ] : 2$	192	
	$[17+9e\ ,\ 5+3e\ ,\ 0\ ,\ 2\ ] : 2$	96	
	$[17+9e\ ,\ 4+2e\ ,\ 3+e\ ,\ 2+2e] : 2$	192	

	[17+7e , 10+4e , 0 , 3+3e] : 2	96
	[17+7e , 9+5e , 2 , 2+2e] : 2	192
	[17+7e , 8+2e , 6+2e , 7+3e] : 2	192
	[16+6e , 12+6e , 2 , 2]	192
	[16+6e , 12+4e , 3+e , 7+3e] : 2	192
	[16+6e , 11+5e , 5+e , 6+2e] : 2	192
	[16+6e , 10+4e , 4+2e , 6+4e] : 2	192
	[16+6e , 9+5e , 6+2e , 5+3e] : 2	192
	[15+7e , 12+4e , 2 , 5+3e] : 2	192
	[15+7e , 11+5e , 4 , 4+2e] : 2	192
	[15+7e , 10+6e , 2 , 3+e] : 2	192
	[15+7e , 9+3e , 6+2e , 6+4e] : 2	192
	[15+7e , 8+4e , 8+2e , 5+3e] : 2	192
	[14+6e , 14+6e , 4 , 0]	96
	[14+6e , 13+5e , 3+e , 8+2e] : 2	192
	[14+6e , 12+4e , 2+2e , 8+4e] : 2	192
	[14+6e , 10+6e , 6+2e , 6+2e]	192
	[14+6e , 9+5e , 5+3e , 6+4e] : 2	192
	[13+7e , 13+5e , 2 , 6+2e] : 2	192
	[13+7e , 12+6e , 0 , 5+e] : 2	96
	[13+7e , 8+4e , 7+3e , 6+4e] : 2	192
	[13+5e , 12+6e , 9+3e , 2+2e] : 2	192
	[13+5e , 12+4e , 2 , 11+5e] : 2	192
	[13+5e , 10+6e , 10+4e , 3+e] : 2	192
	[12+6e , 12+6e , 8+2e , 4+2e]	192
	[12+6e , 12+4e , 3+e , 9+5e] : 2	192
	[12+6e , 11+5e , 3+3e , 8+4e] : 2	192
	[12+6e , 10+6e , 5+3e , 7+3e] : 2	192
	[11+5e , 10+6e , 9+5e , 4+2e] : 2	192
		7200

$ce_1e_2e_3C'_{600}$	[22+8e , 10+4e , 2 , 4+2e] : 2	192
	[22+8e , 9+5e , 0 , 3+e] : 2	96
	[22+8e , 7+3e , 6+2e , 5+3e] : 2	192
	[21+9e , 9+3e , 4 , 4+2e] : 2	192
	[21+9e , 7+5e , 0 , 2] : 2	96
	[21+9e , 7+3e , 5+e , 3+3e] : 2	192
	[20+10e , 8+2e , 2 , 4+2e] : 2	192
	[20+10e , 7+3e , 4 , 3+e] : 2	192
	[20+10e , 6+4e , 2 , 2]	192
	[20+10e , 6+2e , 3+e , 3+3e] : 2	192

	[20+10e ,	5+3e ,	5+e ,	2+2e] : 2		192
	[20+8e ,	11+5e ,	2 ,	3+3e] : 2		192
	[20+8e ,	10+6e ,	0 ,	2+2e] : 2		96
	[20+8e ,	9+3e ,	8+2e ,	7+3e] : 2		192
	[19+7e ,	13+7e ,	0 ,	2] : 2		96
	[19+7e ,	13+5e ,	5+e ,	7+3e] : 2		192
	[19+7e ,	11+5e ,	6+2e ,	6+4e] : 2		192
	[18+8e ,	13+5e ,	4 ,	5+3e] : 2		192
	[18+8e ,	11+7e ,	0 ,	3+e] : 2		96
	[18+8e ,	10+4e ,	8+2e ,	6+4e] : 2		192
	[17+7e ,	15+7e ,	2 ,	4] : 2		192
	[17+7e ,	15+5e ,	3+e ,	9+3e] : 2		192
	[17+7e ,	14+6e ,	5+e ,	8+2e] : 2		192
	[17+7e ,	11+5e ,	5+3e ,	7+5e] : 2		192
	[17+7e ,	10+6e ,	7+3e ,	6+4e] : 2		192
	[16+8e ,	15+5e ,	2 ,	7+3e] : 2		192
	[16+8e ,	14+6e ,	4 ,	6+2e] : 2		192
	[16+8e ,	13+7e ,	2 ,	5+e] : 2		192
	[16+8e ,	10+4e ,	7+3e ,	7+5e] : 2		192
	[16+8e ,	9+5e ,	9+3e ,	6+4e] : 2		192
	[15+7e ,	15+5e ,	2+2e ,	10+4e] : 2		192
	[15+7e ,	13+7e ,	6+2e ,	8+2e] : 2		192
	[15+7e ,	13+5e ,	3+3e ,	9+5e] : 2		192
	[15+7e ,	11+7e ,	7+3e ,	7+3e]		192
	[15+5e ,	14+6e ,	13+5e ,	2] : 2		192
	[15+5e ,	13+7e ,	11+5e ,	3+e] : 2		192
	[14+6e ,	13+7e ,	10+4e ,	3+3e] : 2		192
	[14+6e ,	11+7e ,	11+5e ,	4+2e] : 2		192
	[13+7e ,	13+7e ,	9+3e ,	5+3e]		192
	[13+7e ,	13+5e ,	4+2e ,	10+6e] : 2		192
						7200
$e_1 e_2 e_3 C'_{600}$	[25+9e ,	12+4e ,	2 ,	5+3e] : 2		192
	[25+9e ,	11+5e ,	4 ,	4+2e] : 2		192
	[25+9e ,	10+6e ,	2 ,	3+e] : 2		192
	[25+9e ,	9+3e ,	6+2e ,	6+4e] : 2		192
	[25+9e ,	8+4e ,	8+2e ,	5+3e] : 2		192
	[24+10e ,	11+3e ,	4 ,	5+3e] : 2		192
	[24+10e ,	10+4e ,	6 ,	4+2e] : 2		192
	[24+10e ,	9+3e ,	5+e ,	4+4e] : 2		192
	[24+10e ,	8+6e ,	2 ,	2]		192

[24+10e ,	8+4e ,	7+e ,	3+3e] :	2	192
[23+11e ,	10+2e ,	2 ,	5+3e] :	2	192
[23+11e ,	8+4e ,	6 ,	3+e] :	2	192
[23+11e ,	8+2e ,	3+e ,	4+4e] :	2	192
[23+11e ,	7+5e ,	4 ,	2] :	2	192
[23+11e ,	7+e ,	2+2e ,	6+4e] :	2	192
[23+9e ,	13+5e ,	2 ,	4+4e] :	2	192
[23+9e ,	12+6e ,	4 ,	3+3e] :	2	192
[23+9e ,	11+7e ,	2 ,	2+2e] :	2	192
[23+9e ,	11+3e ,	8+2e ,	8+4e] :	2	192
[23+9e ,	10+4e ,	10+2e ,	7+3e] :	2	192
[22+12e ,	8+2e ,	2 ,	4+2e] :	2	192
[22+12e ,	7+3e ,	4 ,	3+e] :	2	192
[22+12e ,	6+4e ,	2 ,	2]		192
[22+12e ,	6+2e ,	3+e ,	3+3e] :	2	192
[22+12e ,	5+3e ,	5+e ,	2+2e] :	2	192
[22+8e ,	15+5e ,	5+e ,	8+4e] :	2	192
[22+8e ,	14+8e ,	2 ,	2]		192
[22+8e ,	14+6e ,	7+e ,	7+3e] :	2	192
[22+8e ,	13+5e ,	6+2e ,	7+5e] :	2	192
[22+8e ,	12+6e ,	8+2e ,	6+4e] :	2	192
[21+9e ,	15+5e ,	4 ,	6+4e] :	2	192
[21+9e ,	14+6e ,	6 ,	5+3e] :	2	192
[21+9e ,	12+8e ,	2 ,	3+e] :	2	192
[21+9e ,	12+4e ,	8+2e ,	7+5e] :	2	192
[21+9e ,	11+5e ,	10+2e ,	6+4e] :	2	192
[20+8e ,	17+5e ,	3+e ,	10+4e] :	2	192
[20+8e ,	16+8e ,	4 ,	4]		192
[20+8e ,	15+7e ,	7+e ,	8+2e] :	2	192
[20+8e ,	13+5e ,	5+3e ,	8+6e] :	2	192
[20+8e ,	11+7e ,	9+3e ,	6+4e] :	2	192
[19+9e ,	17+5e ,	2 ,	8+4e] :	2	192
[19+9e ,	15+7e ,	6 ,	6+2e] :	2	192
[19+9e ,	14+8e ,	4 ,	5+e] :	2	192
[19+9e ,	12+4e ,	7+3e ,	8+6e] :	2	192
[19+9e ,	11+3e ,	6+4e ,	10+6e] :	2	192
[18+8e ,	18+8e ,	6 ,	2]		192
[18+8e ,	18+6e ,	3+e ,	11+3e] :	2	192
[18+8e ,	17+7e ,	5+e ,	10+2e] :	2	192
[18+8e ,	17+5e ,	2+2e ,	11+5e] :	2	192
[18+8e ,	15+5e ,	3+3e ,	10+6e] :	2	192
[18+8e ,	14+8e ,	8+2e ,	8+2e]		192

[18+8e ,	12+8e ,	9+3e ,	7+3e]	: 2		192
[18+8e ,	12+6e ,	6+4e ,	8+6e]	: 2		192
[18+8e ,	11+7e ,	8+4e ,	7+5e]	: 2		192
[18+6e ,	17+9e ,	9+3e ,	2]	: 2		192
[18+6e ,	16+8e ,	12+4e ,	2+2e]	: 2		192
[18+6e ,	15+7e ,	15+5e ,	2]	: 2		192
[18+6e ,	14+8e ,	13+5e ,	3+e]	: 2		192
[17+9e ,	17+7e ,	4 ,	8+2e]	: 2		192
[17+9e ,	16+8e ,	2 ,	7+e]	: 2		192
[17+9e ,	11+5e ,	8+4e ,	8+6e]	: 2		192
[17+9e ,	10+6e ,	10+4e ,	7+5e]	: 2		192
[17+7e ,	17+5e ,	2 ,	14+6e]	: 2		192
[17+7e ,	14+8e ,	12+4e ,	3+3e]	: 2		192
[17+7e ,	13+5e ,	4+2e ,	12+8e]	: 2		192
[17+5e ,	16+8e ,	12+6e ,	3+e]	: 2		192
[16+8e ,	16+8e ,	10+2e ,	6+2e]			192
[16+8e ,	15+5e ,	4+2e ,	11+7e]	: 2		192
[16+8e ,	14+8e ,	11+3e ,	5+3e]	: 2		192
[16+8e ,	14+6e ,	4+4e ,	10+6e]	: 2		192
[16+8e ,	12+8e ,	8+4e ,	8+4e]			192
[15+7e ,	14+8e ,	11+5e ,	4+4e]	: 2		192
[15+7e ,	12+8e ,	12+6e ,	5+3e]	: 2		192
[14+8e ,	14+8e ,	10+4e ,	6+4e]			192
[14+8e ,	14+6e ,	5+3e ,	11+7e]	: 2		192
						14400

SUITE

à

l'„Etude sur les formules servant à calculer des valeurs approximatives d'une intégrale définie."

(étude insérée dans les „Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 1e Sectie, Deel XI, N°. 6).

PAR

B. P. MOORS.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

DEEL XII N°. 3.

Met 2 tabellen.

AMSTERDAM,

JOHANNES MÜLLER.

Augustus 1917.

320

SUITE

à

l'„Etude sur les formules servant à calculer des valeurs approximatives d'une intégrale définie."

(étude insérée dans les „Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 1e Sectie, Deel XI, N°. 6).

PAR

B. P. MOORS.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

DEEL XII N°. 3.

Met 2 tabellen.

AMSTERDAM,

JOHANNES MÜLLER.

1917.

Suite à l'Etude sur les formules servant à calculer des valeurs approximatives d'une intégrale définie.

(ÉTUDE INSÉRÉE DANS LES MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES D'AMSTERDAM. PREMIÈRE SÉRIE. VOL. XI. N°. 6.)

SECTION IV.

Remplacement de la Table B par une nouvelle Table.

§ 29. Les Tables, destinées à servir aux mathématiciens, comme par exemple celles dont il est question ci-haut, les Tables de logarithmes et autres du même genre, doivent avoir pour qualité primordiale d'être absolument exactes, de façon à ne présenter aucune faute pouvant avoir une influence quelconque sur le résultat à calculer, ensuite elles doivent être faciles à consulter, complètes et suffisamment étendues.

On m'a remarqué que la Table B n'est pas complète, parce que elle ne contient pas de formules pour les nombres pairs d'ordonnées et parce que là où j'ai essayé (§ 19) d'augmenter l'exactitude des formules, en apportant de légères modifications aux abscisses de GAUSS, arrondies à deux décimales, il existe dans les déductions de ces corrections une lacune qui laisse dépendre quelque chose d'un choix heureux.

Reconnaissant la justesse de ces observations j'ai calculé de nouveau toutes les formules de la Table C, qui suit, en remplaçant les déductions citées (§ 19) par celles du § 30 (ci contre), en ajoutant ce qui manque à la Table B; ensuite j'ai introduit quelques modifications qui, selon moi, augmentent la valeur de la Table et favorisent la facilité de son usage.

La marche des travaux pour la composition de la nouvelle Table a été la suivante:

Pour développer les formules pour $2m$ ordonnées on a pris les m abscisses de GAUSS de la Table A, arrondies à deux décimales; de ces abscisses en deux décimales on a isolé la première et on a calculé quelle devrait être sa longueur si en conservant les autres

abscisses arrondies, on porte à zéro le premier des termes de correction appartenant à la formule d'approximation de ces $2m$ ordonnées.

La valeur de cette première abscisse est déterminée par un nombre, contenant une quantité indéterminée de décimales; mais ce nombre est également arrondi à deux décimales et forme maintenant avec les autres abscisses arrondies d'après Gauss un groupe d'abscisses que j'apelle le groupe 1.

Ensuite on isole la deuxième abscisse arrondie et on opère exactement de la même façon que pour la première; on obtiendra ainsi le groupe 2.

On agit de même pour toutes les abscisses arrondies, de sorte qu'on aura finalement pour chaque formule pour $2m$ ordonnées, m groupes d'abscisses parmi lesquelles on doit faire un choix. On prendra pour la Table C le groupe d'abscisses dont le premier des termes de correction est le plus petit.

Les abscisses arrondies de Gauss ont été prises à priori comme base du calcul, parce que si elles étaient appliquées sans restriction, les m premiers termes de correction de (19) seraient, chacun en particulier, égaux à zéro, et qu' ainsi on peut s'attendre que, si on emploie des abscisses qui diffèrent moins que 0.005 de l'unité de longueur de celles de Gauss et qu'on développe d'après ces abscisses une formule d'approximation les m premiers termes de correction de la dernière formule, bien que n'étant pas absolument égaux à zéro n'en différeront pas beaucoup et dans tous les cas moins que si l'on avait appliqué m autres abscisses arrondies à deux décimales.

La justesse de cette hypothèse a été confirmé au cours des calculs qui ont servis à établir la Table C.

Dans le développement des formules pour un nombre impair d'ordonnées on n'a pas cherché la plus grande précision, parce que ces formules ne doivent servir qu' à contrôler le résultat obtenu par la formule des $2m$ ordonnées et à déterminer le degré d'exactitude de ce résultat.

En effet pour chaque formule d'un nombre impair d'ordonnées, on a appliqué exactement les mêmes abscisses que pour la formule précédente pour $2m$ ordonnées, en y ajoutant l'abscisse $x_1 = 0$.

Une telle formule pour $(2m + 1)$ ordonnées est toujours plus exacte que la formule immédiatement précédente pour $2m$ ordonnées, de sorte que, des séries ininterrompues de figures égales, comptées de la figure des unités, que les résultats calculés d'après les deux

formules, ont en commun, on peut déduire une approximation qui est exacte jusqu' à la dernière figure.

§ 30. Etant donné, que par la nature du problème, on connait $(m-1)$ abscisses des $2m$ points de la ligne $y = f(x)$ par lesquelles doit passer une courbe parabolique approximative et qu'on est libre de donner à l'abscisse restante x_p la longueur qu'on veut, on demande de fixer la longueur de cette abscisse et les m valeurs de R, de telle façon que le premier des termes de correction de la formule d'approximation soit égal à zéro.

Solution. Il reste donc à déterminer l'abscisse x_p et les m valeurs de R, soit en tout $(m+1)$ grandeurs; nous pouvons par conséquent établir, d'après (19), $(m+1)$ termes de correction, chacun en particulier, égal à zéro et au moyen des $(m+1)$ équations ainsi formées résoudre les $(m+1)$ inconnues.

Nous avons donc les équations

$$\left.\begin{aligned}
R_1 + R_2 + \ldots + R_m &= 1 \\
x_1^2 R_1 + x_2^2 R_2 + \ldots + x_m^2 R_m &= \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2})^2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_1^{2m-4} R_1 + x_2^{2m-4} R_2 + \ldots + x_m^{2m-4} R_m &= \tfrac{1}{2m-3}(\tfrac{1}{2})^{2m-4} \\
x_1^{2m-2} R_1 + x_2^{2m-2} R_2 + \ldots + x_m^{2m-2} R_m &= \tfrac{1}{2m-1}(\tfrac{1}{2})^{2m-2} \\
x_1^{2m} R_1 + x_2^{2m} R_2 + \ldots + x_m^{2m} R_m &= \tfrac{1}{2m+1}(\tfrac{1}{2})^{2m}
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots(75)$$

Des m premières équations de (75) on peut déduire les m valeurs de R, qui sont déjà connues de (22).

Qu'on pose maintenant

S_1 = la somme des m carrés figurant en (75):

$$x_1^2,\ x_2^2, \ldots x_m^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (76)$$

S_2 = la somme des produits, deux à deux, de ces m carrés et ainsi de suite, finalement

S_m = le produit (continu) de ces mêmes m carrés;

alors ces carrés peuvent être considérés comme les racines de l'égalité

$$(x^2)^m - S_1 (x^2)^{m-1} + S_2 (x^2)^{m-2} - \ldots + (-1)^{m-1} S_{m-1} (x^2) + \\ + (-1)^m S_m = 0 \ldots\ldots (77).$$

Si nous additionnons les équations sous (75), après avoir multiplié la dernière par 1, l'avant dernière par $-S_1$, et ainsi de suite, donc la 2me par $(-1)^{m-1} S_{m-1}$, enfin la 1ère par $(-1)^m S_m$, et qu'on ajoute les termes avec le même R, on obtiendra, en relation avec (77):

$$\frac{1}{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} - \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} S_1 + \frac{1}{2m-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{m2-4} S_2 - \ldots + \\ + (-1)^{m-1}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^m S_m = 0 \ldots\ldots\ldots (78)$$

Si on isole de (76) le carré x_p^2, les autres $(m-1)$ carrés peuvent être considérés comme les racines de l'équation

$$(x^2)^{m-1} - S_{1.p}(x^2)^{m-2} + S_{2.p}(x^2)^{m-3} - \ldots + (-1)^{m-2} S_{m-2.p}\, x^2 + \\ + (-1)^{m-1} S_{m-1.p} = 0$$

et si on multiplie cette équation par $(x^2 - x_p^2)$ on aura une équation identique à (77), d'où l'on peut déduire

$$\begin{aligned} S_1 &= x_p^2 + S_{1.p} \quad , \\ S_2 &= x_p^2 . S_{1.p} + S_{2.p} \quad , \\ S_3 &= x_p^2 . S_{2.p} + S_{3.p} \quad , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{m-1} &= x_p^2 . S_{m-2.p} + S_{m-1.p} \quad , \\ S_m &= x_p^2 \; S_{m-1.p} \quad , \end{aligned}$$

Si on substitue ces valeurs des seconds membres pour S_1, S_2, ... S_m dans (78), on trouve après quelque réduction :

$$x_p^2 = \frac{\frac{1}{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} - \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} S_{1.p} + \frac{1}{2m-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-4} S_{2.p} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 S_{m-1.p}}{\frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} - \frac{1}{2m-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-4} S_{1.p} + \frac{1}{2m-5}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-6} S_{2.p} - \ldots + (-1)^{m-1} S_{m-1.p}}.$$

Par une même argmentation qu'au § 22, on trouve également

$$\begin{aligned} S_{1.p} &= \Sigma_p^{\,1} \quad , \\ 2\, S_{2.p} &= S_{1.p}\,\Sigma_p^{\,1} - \Sigma_p^{\,2} \quad , \\ 3\, S_{3.p} &= S_{2.p}\,\Sigma_p^{\,1} - S_{1.p}\,\Sigma_p^{\,2} + \Sigma_p^{\,3} \quad , \\ 4\, S_{4.p} &= S_{3.p}\,\Sigma_p^{\,1} - S_{2.p}\,\Sigma_p^{\,2} + S_{1.p}\,\Sigma_p^{\,3} - \Sigma_p^{\,4} \quad , \end{aligned}$$

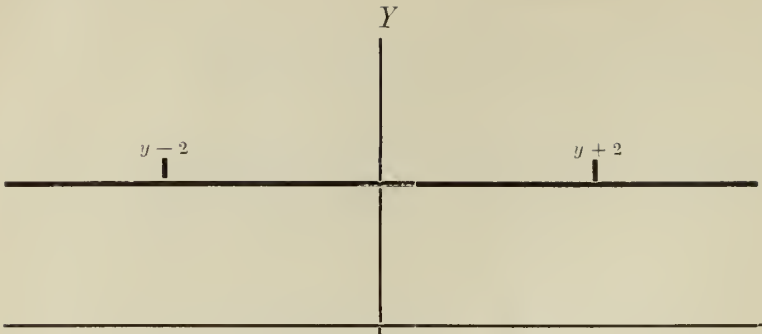
et ainsi de suite ; d'où l'on peut aisément calculer les valeurs de $S_{1.p}$, $S_{2.p}$, etc.

Quand le groupe d'abscisses, qui sera employé pour la Table C, sera connu, on calculera les m valeurs de R, pour la formule pour un nombre pair d'ordonnées, d'après (22), et pour la formule pour un nombre impair d'ordonnées d'après (25) et (26).

Finalement on aura, d'après (17) :

$$I_1 = R_1 y_1 + \tfrac{1}{2} R_2 (y_{-2} + y_{+2}) + \ldots + \tfrac{1}{2} R_m (y_{-m} + y_{+m}).$$

TABLE *C.*

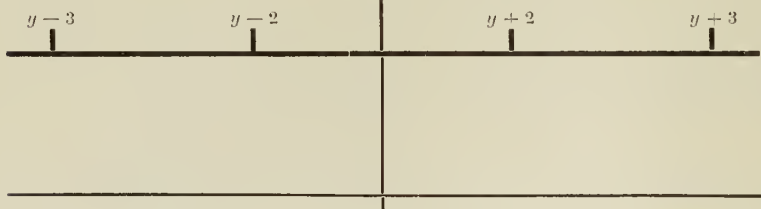


$x_2 = \mathbf{0.29.}$

$I_1 = 0.5\ (y_{-2} + y_{+2})$.

$x_1 = \mathbf{0},\ x_2 = \mathbf{0.29.}$

$I_2 = 0.0091\ 1613\ 1589\ y_1 + 0$

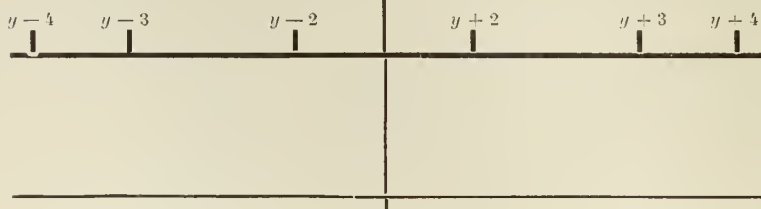


$x_2 = \mathbf{0.17},\ x_3 = \mathbf{0.43.}$

$I_1 = 0.3255\ 3418\ 8034\ 1880$ (

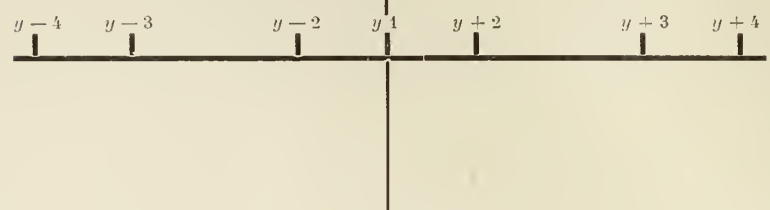
$x_1 = \mathbf{0},\ x_2 = \mathbf{0.17},\ x_3 = \mathbf{0.43.}$

$I_2 = 0.0050\ 4215\ 9389\ 1271$ y



$x_2 = \mathbf{0.11},\ x_3 = \mathbf{0.33},\ x_4 = \mathbf{0.}$

$I_1 = 0.2244\ 3965\ 1874\ 0171$ (y



$x_1 = \mathbf{0},\ x_2 = \mathbf{0.11},\ x_3 = \mathbf{0.33},$

$I_2 = -\ 0.0155\ 6618\ 4387\ 538$

$+\ 0.0802\ 8162\ 7843\ 037$

4 4193 4205 $(y_{-2} + y_{+2})$.

$+ y_{+2}) + 0.1744\ 6581\ 1965\ 8120\ (y_{-3} + y_{+3})$.

$+ 0.3225\ 4606\ 2165\ 4393\ (y_{-2} + y_{+2}) + 0.1749\ 3285\ 8139\ 9971\ (y_{-3} + y_{+3})$.

$+ y_{+2}) + 0.1957\ 1726\ 8053\ 9158\ (y_{-3} + y_{+3}) + 0.0798\ 4308\ 0072\ 0761\ (y_{-4} + y_{+4})$.

$= 0.47$.

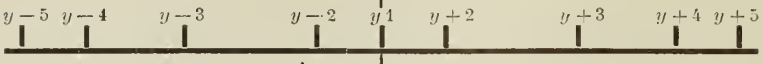
$_1 + 0.2337\ 0304\ 1236\ 1056\ (y_{-2} + y_{+2}) + 0.1937\ 9842\ 3114\ 6260\ (y_{-3} + y_{+3}) +$
$_{-4} + y_{+4})$.

TABLE *C* (suite).

$x_2 = \mathbf{0.09},\ x_3 = \mathbf{0.26},\ x_4 = 0$

$I_1 = 0.1775\ 8932\ 5131\ 9220$

$+ 0.1119\ 2905\ 5949\ 28$



$x_1 = 0,\ x_2 = \mathbf{0.09},\ x_3 = \mathbf{0.26}$

$I_2 = 0.0251\ 3676\ 3589\ 2752$

$+ 0.1649\ 7567\ 0037\ 83$

$+ 0.0501\ 3111\ 5639\ 02$

$x_2 = \mathbf{0.07},\ x_3 = \mathbf{0.22},\ x_4 = 0$

$I_1 = 0.1445\ 0935\ 0120\ 7556$

$+ 0.0965\ 1616\ 1366\ 78$

$+ 0.0304\ 0211\ 8918\ 80$

$x_1 = 0,\ x_2 = \mathbf{0.07},\ x_3 = \mathbf{0.22}$

$I_2 = 0.0179\ 2177\ 4939\ 0385$

$+ 0.1477\ 1718\ 0631\ 86$

$+ 0.0844\ 2868\ 1441\ 43$

$x_5 = 0.48.$

$(y_{-2} + y_{+2}) + 0.1607\ 8268\ 3155\ 2685\ 5306\ (y_{-3} + y_{+3}) +$
$(y_{-4} + y_{+4}) + 0.0496\ 9893\ 5763\ 5290\ 6496\ (y_{-5} + y_{+5}).$

$= 0.40,\ x_5 = 0.48.$

$y_1 + 0.1620\ 0046\ 6594\ 3564\ 4351\ (y_{-2} + y_{+2}) +$
$(y_{-3} + y_{+3}) + 0.1103\ 2436\ 5934\ 1461\ 1036\ (y_{-4} + y_{+4}) +$
$(y_{-5} + y_{+5}).$

$x_5 = 0.43,\ x_6 = 0.49.$

$5841\ (y_{-2} + y_{+2}) + 0.1447\ 7126\ 2221\ 2260\ 4764\ 7856\ (y_{-3} + y_{+3}) +$
$0471\ (y_{-4} + y_{+4}) + 0.0838\ 0110\ 7372\ 4227\ 4774\ 0884\ (y_{-5} + y_{+5}) +$
$4948\ (y_{-6} + y_{+6}).$

$= 0.34,\ x_5 = 0.43,\ x_6 = 0.49.$

$8698\ y_1 + 0.1335\ 9151\ 3523\ 5941\ 6219\ 2606\ (y_{-2} + y_{+2}) +$
$1568\ (y_{-3} + y_{+3}) + 0.0950\ 4621\ 3079\ 9708\ 1741\ 4542\ (y_{-4} + y_{+4}) +$
$8879\ (y_{-5} + y_{+5}) + 0.0302\ 5552\ 3853\ 6116\ 8065\ 8056\ (y_{-6} + y_{+6}).$

THE VALUE OF "A" OF VAN DER WAALS' EQUATION

AND

THE NATURE OF COHESION

BY

ALBERT P. MATHEWS,
Professor of the University of Chicago.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.
(EERSTE SECTIE).
DEEL XII. N°. 4.

506
Am88AV

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
November 1917.

FEB 1 0 1971

THE VALUE OF "A" OF VAN DER WAALS' EQUATION

AND

THE NATURE OF COHESION

BY

ALBERT P. MATHEWS,
Professor of the University of Chicago.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.
(EERSTE SECTIE).
DEEL XII. N°. 4.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1917.

The true value of "a" of Van der Waals' equation and the nature of cohesion.

BY

A. P. MATHEWS.

(The University of Chicago, Chicago. December, 1916.)

In a recent paper in the Proceedings of the Amsterdam Academy, VAN LAAR [1]) has severely criticised the law I have discovered expressing the mass factor of the cohesional attraction of the molecules, in other words VAN DER WAALS' constant a, in terms of the gravitational attraction and the number of valences in the molecule. This law is of such significance and is so important that its basis in fact, upon which it rests, must be scrutinized very closely. The criticism of any student of the subject is to be welcomed, therefore, altho the tone in which VAN LAAR has expressed his criticism is to be regretted. It is evident that he has misunderstood a portion at least of my work, for I cannot believe that he has intentionally misrepresented what I have done, altho the misrepresentation appears to me to be inexcusable. I am, nevertheless, glad of the opportunity his attack has given me of presenting the additional evidence which I have obtained since the publication of my first papers, evidence which, I think, removes many of the grounds of criticism of my former papers and establishes much more firmly the law of cohesion announced therein.

The principal result of my work has been the discovery that VAN DER WAALS' constant, a, is equal to $N^2\ (m^2k \times Val/M)^{2/3}$. In this equation m is the gravitational mass of a molecule; k is the gravitational constant; Val the number of valences; M the molecular weight; and N the number of molecules in the volume of gas or liquid for which a is computed. This

1) VAN LAAR: Proceedings, Koninklijke Akademie van Wetens. te Amsterdam, 18, 1916, p. 1235.

extremely interesting relationship holds, I believe, everywhere, at least in all normal substances, from hydrogen on the one hand to such complex substances as methyl butyrate and diisoamyl on the other. It appears to me to mean, simply, from one point of view, that the cohesional attraction is the gravitational attraction intensified in the immediate vicinity of the molecules by the action of the valence electrons. It thus confirms an opinion expressed some time ago, I believe by Lord KELVIN, that cohesional attraction is gravitational attraction intensified in some way in the immediate vicinity of the molecules. We may also, however, as I shall point out later in the paper, look at the matter the other way around and regard gravitational attraction as that part of the cohesional attraction toward which the molecules and ether happen to be transparent so it can penetrate them.

This equation may also be written in this way: $a = N^2\ C\ (M \times Val)^{2/3}$, in which the constant C is the gravitational mass factor of two molecules of unity molecular weight and valence raised to the two thirds power, or $(m^2 k)^{2/3}$. C has the value of 3.201×10^{-37} when a is expressed in dynes. N for a gram mol is 6.06×10^{23}.

After the appearance of my papers [1]) VAN LAAR announced that if he assigned arbitrary values to the various chemical elements it was possible by addition to compute the square root of a for various substances. The additivity of a had been sought by many observers, by Sutherland among the first, by KLEEMAN, by LEDUC and AMAGAT and others also, but before the publication of my paper no one had found a general method applicable to all kinds of compounds. VAN LAAR's [2]) method is simply to assign arbitrary values to carbon, nitrogen, oxygen, chlorine and the other elements. These values multiplied by the number of atoms there are of that particular kind in the molecule, when added to the sums derived in a similar way from the other atoms, give the square root of a. However in this simple form the law would not hold, so it became necessary to assume further that the arbitrary values were not always the same for any element, but that carbon, for example, sometimes had zero value, and sometimes various other values depending on the kind of carbon compound, whether ring or ali-

1) MATHEWS: Journal of phys. chem., 17 pp. 154, 181, 252, 320, 331, 337, 481, 520, 603, 1913; Jour. chim. physique, 12, 1914, p. 428. Jour. phys. chem., 18, p. 474, 1914; 20, p. 554, 1916. Science, 36, p. 92, 1912 (Preliminary statement).

2) VAN LAAR: Proceedings, Konink. Akad. te Amsterdam, 18, 1220, 1916; Jour. chim. phys., 14, 1916, p. 3.

phatic, etc. These various values are also quite unexplained. They help us not at all in understanding the real nature of cohesion. But the real point at issue between VAN LAAR and myself is not whether a is additive or not, for I had already shown that it was additive before the publication of his work. The question is as to the real value of a. VAN LAAR computes a by applying a correction to the ordinary method of computing from VAN DER WAALS' equation, which has been solved on the basis of the constancy of a and b. The values of a he secures by this method agree with mine in only a few instances and in the more complex substances. In general they are 10—20 % lower than the values computed by the methods I have found. They differ from my values particularly in the simpler substances where for example in hydrogen his value is about 150 % lower than the value I assigned to a of hydrogen. They differ from my values in such a way that if VAN LAAR is right then the law correlating cohesion with the valences and molecular weight, the law I have announced, cannot be true. And it follows, also, that if my values of a are correct, then his empirical rule, even with the secondary assumptions he has made, can no longer be applied. VAN LAAR's work and mine are entirely incompatible. The whole question at issue between us is, therefore, the real value of a in all these different substances. I have sought, therefore, to determine this constant accurately.

I have found several different methods of computing a some of which are quite independent of VAN DER WAALS' equation. These methods give at least an approximate determination of the constant. I shall present them in a moment. They show indubitably, in my opinion, that the law I have announced is a true law, and that the values of a computed by the method of VAN LAAR are in error in nearly all cases by from 10—30 % and in some cases by 100 %. Only exceptionally do they happen to be approximately in harmony with the values computed from the latent heat of vaporization, the latent heat of expansion, from the surface tension, or in other ways. Before discussing these methods in detail, however, I wish to answer briefly a few of the criticisms VAN LAAR has made of my work [1]).

---

[1]) In a foot note on page 1229 of his paper VAN LAAR gives the impression that the law correlating cohesion, or rather the value of a of VAN DER WAALS' equation, with the number of valences in the molecule, had also been suggested by Walden and Swinne. He says „Walden and Swinne, Zeit. f. phys. Chem., 82, 289 (1913) cursorily mention the partial additivity of the specific molecular cohesion, that is of a or a/V^2. They too — like Mathews — seek connection between the values of a and the sum of the effective valencies."

I may say at the outset that the connection between the product of the molecular weight by the number of valences and the value of a was discovered empirically. I had no preconceived ideas on the subject, and I tried a great many possibilities, among them the very one adopted by VAN LAAR, before I found what I believe to be the true relationship. I was confronted at the start with the difficulty of knowing what was the real value of a, a difficulty which all have experienced who have studied the question. I felt it necessary to find a method of computing a which should be entirely independent of any assumption as to the value of the other constant b, free in other words of any assumption of whether b was constant, or varying with the volume. The method I adopted was to compute a from the surface tension. This was the method originally suggested by that great English physicist, THOMAS YOUNG, in his classical paper on cohesion and capillarity. He expressed in that paper the relation between cohesion and surface tension. It is the formula: $s = Kr/3$, where K is the cohesive pressure, represented afterwards by VAN DER WAALS as a/V^2, and r is the radius of action of the cohesive attraction. s is the surface tension energy per unit of surface. I took r to be a single molecular diameter, as this is its most probable value, and I assumed the law to hold at absolute zero, for the reason that it was more convenient to go to the end, and it is apparent on the face of it that the law can only hold at temperatures where the cohesion in the vapor may be entirely disregarded. These assumptions are both

---

This is a fair example of VAN LAAR's method of criticism. This foot note plainly states that Walden and Swinne had also suggested that a of VAN DER WAALS' equation was dependent on the number of valences, and it implies accordingly that there was nothing particularly novel in my suggestion. As a matter of fact Walden and Swinne do not mention a of VAN DER WAALS' equation in the place cited. They are dealing with the specific cohesion, so called, which they express as is customary with the letter a^2. They say "$a_\sigma{}^2$ means the specific cohesion at the normal boiling point." "The molar cohesion $Ma_\sigma{}^2$ is for normal liquids at the boiling point T_σ eine wesentlich additive Grösse, wenn auch mit konstitutivem Einschlag; das Analoge gilt für die normalen Siedetemperaturen, T_σ. Beide Grössen, $Ma_\sigma{}^2$ and T_σ, lassen sich angenähert der „Valenzzahl" Σn proportional setzen; hier bedeutet Σn die Summe der Valenzen der in den betreffenden Verbindungen vorhandenen Elemente. (Eigentlich kann diese Formulierung nur für die C, H, O und N enthaltenden Stoffe aufrecht erhalten werden; bei H ist n gleich 1, bei O- gleich 2, bei N- gleich 3 und bei C- gleich 4)". They then go on to show that really $Ma_\sigma{}^2$ is proportional to the sum of the square roots of the atomic weights. The specific cohesion of which they speak and which they designate by a^2 is not at all the factor a of VAN DER WAALS. It is, as a matter of fact, simply the height to which a liquid rises in a capillary tube of 1 m.m. radius. All that they say about its relation to valence is that quoted, so far as I could find. Moreover their paper was published in 1913. My first papers antedated this, having been published in 1912 and February 1913.

well founded. This law of YOUNG's, as I found afterwards, is simply a special case, at the limit of absolute zero, of the well known Eötvös surface tension law, and the calculation of a can just as well be made from Eötvös' law at ordinary temperatures, as I shall show in a moment, but I did not know that this was the case when I published my first paper. The values of a which were thus obtained from YOUNG's law, were on the whole somewhat higher than those generally computed for a assuming that a and b are constant, and particularly they were higher in the diatomic gases. In making this calculation I had to make use of the Eötvös constant, C, in the equation: $sV^{2/3} = C(T_c - T)$. I supposed that C was practically the same constant for all non-associating substances, at any rate for all normal substances with more than three atoms in the molecule. This assumption is not in reality true, but in making it I was following the opinion of Eötvös and Ramsay and Shields. I took as the mean of the constant the value 2.19. Eötvös gave 2.27 and Ramsay and Shields about 2.12. With this value of the constant I found a for the 26 substances of which the critical data were most accurately known, namely the substances studied by S. YOUNG. With these values of a I tried to find out what it was in a molecule which determined its value of a, and after many unsuccesfull attempts the importance of valence occurred to me and on trying I found that these values of a gave a constant in each case when divided by the two thirds power of the product of the molecular weight and the number of valences. The only important deviations were iodobenzene and brombenzene, substances in which the critical data had been determined by extrapolation over a wide temperature interval, and were presumably on this account less certain than in the other substances. Further study showed that the constant I had thus found, when a was for a single pair of molecules, was nothing else than the value $(m_1{}^2k)^{2/3}$ of a substance of molecular weight of unity and with one valence; m_1 being the gravitational mass and k the gravitational constant. This permitted me to write the value of a in the more general form given at the beginning of this paper: $a = N^2(m^2K \times Val(M)^{2/3}$. In making this discovery there was no juggling with the valences at all, as VAN LAAR implies. Everywhere carbon was tetravalent, oxygen bivalent, hydrogen monovalent. The only elements of uncertain valence were *Cl*, *Fl*, *Br*, *I*. These might have 1, 3, 5, or 7 valences. It was impossible to know which to take. So I followed the most recent determinations of the valence by Pascal taking *Fl* as monovalent and *Cl* as trivalent. These values

gave good agreements. *Br* and *I* were provisionally also taken as monovalent, but I have since found that elemental bromine is at least trivalent, and I do not doubt that when we have accurate critical data iodine will be found, often at least, to be more than monovalent. Tin was tetravalent as it is supposed to be. I was not content, however, to base the law I had discovered, which appeared to me to be of fundamental importance, on these 26 substances, but I tried to compute a for all the substances of which I could find some, or all, of the critical data. For 45 other substances of fair complexity, in many of which I had to calculate the critical density or the critical temperature, I found the same mean value of the constant when a was divided by the product of the molecular weight and valence raised to the 2/3ds power. There were some wide deviations, due to the uncertainty of the critical data, but the mean constant was the same, and the majority of substances gave a constant not deviating more than 2—3 $^{0}/_{0}$ from the mean. I calculated, also, the critical data from the surface tension measurements of other substances, and found again good agreement, altho the calculations involved many assumptions. I found chlorine compounds nearly everywhere in agreement, were chlorine always trivalent. Only in a few cases was a better agreement secured if one or more atoms of chlorine were monovalent, but I did not doubt that this was but an appearance and was due to the inaccuracy of the critical data. Sulphur was found everywhere to be hexavalent except in SO_2 where it was tetravalent. Sulphur is generally supposed to be tetravalent, divalent or hexavalent. I found no divalent sulphur except possibly in carbonyl sulfide. Nitrogen had the valence numbers usually attributed to it. The main difficulty was when I attempted to find the value of a for the simple gases H_2, N_2, O_2, CO, CO_2 and CH_4. The value of a was very uncertain. The critical data of nearly all were very imperfectly known, but fortunately this uncertainty has now been removed for all but H_2. I knew of no way of computing a for these gases except by using VAN DER WAALS' equation and making certain assumptions which might, or might not, be true, but I found some empirical ways of computing from the latent heat and surface tension of the liquified gases. Among other methods I assumed that b_c, the volume of the molecules at the critical temperature, was always $2b_o$, b_o being the minimum volume at absolute zero. In this I was following the fact that in many substances b_c was known to be about $V_c/2$, V_c often being nearly $4\ V_o$, and a suggestion by VAN DER WAALS that the volume of the molecules

when relieved from pressure, or b_g, is $2b_o$. This assumption gives, when combined with the assumption that the density at absolute zero is S times the critical density, S being the critical coefficient, RT_c/P_cV_c, the result: $a = ((S_2 - S + 2)/(S - 2))\, P_cV_c^2$. Van Laar criticises this method, and no doubt correctly as I have already pointed out elsewhere. The assumptions are not exactly true either of them. The values it gives for a are too high, in the simpler substances especially, but in reality they are not so far wrong for many substances. b_c instead of being $2b_o$ is, in reality, about 1.8—1.9 b_o and in a great many cases d_o is actually very nearly Sd_c. By using these various methods of computing a for these simple gases I found the law discovered in more complex substances would hold if we assigned 2 valences to the molecule in H_2, N_2, O_2 and CO, and 4 or 5 valences to CO_2. That H_2 and N_2 should have each 2 valences was expected, but that O_2 and CO should have 2 was surprising. I concluded that, on the whole, it seemed to me probable that such a simple rule as that correlating cohesion and gravitation would hold everywhere, if it held at all, and that while in these two or three simple gases the number of valences necessary to ascribe to the molecule was surprising, yet if the law were true we must accept them. These exceptional substances, it will be noticed, all contain oxygen, a very significant fact. There was no juggling with the valences at all. I can see no reason why carbon should not be univalent and oxygen also. Carbon is known to be di, tri, and tetra-valent, so why not univalent? Oxygen is di and tetravalent; and is oxygen not univalent in the peroxides? A juggler is one who conceals how tricks are accomplished. There was no concealment of the fact that these substances were exceptional; in truth I discussed their apparent exceptional position more than its importance deserved. As regards the hexavalence of sulphur, even in H_2S, it may be pointed out that so eminent a physical chemist as G. N. Lewis has recently proposed that sulphur is everywhere hexavalent, and if so good a chemist as Lewis makes such a suggestion we should not be surprised if we actually find that this suggestion is correct, and that sulphur is hexavalent in some locations in which, as in H_2S, one would not at first expect it to be.

The greatest interest attached to the argon group of gases. If it is true that cohesion depends on valence, then these gases since they have cohesion must have, sometimes at any rate, valence electrons attached to their atoms. This seems perhaps, at first thought, improbable, and I fear for the effect of this information on van Laar when I tell him that Lewis has recently suggested that these

gases are actually octovalent! That valence electrons may be attached to the atoms of these gases is, I believe, a fact and not a theory. How are we to explain the conduction of electricity in neon and argon and the existence of positive helium and krypton atoms, unless their atoms have the power of picking up and losing electrons, without decomposing? It is the characteristic of the valence electrons, in contrast with the electrons in the nucleus of the atom, that they are reversibly displaceable without disrupting the atoms. Neon and argon conduct the current unusually well and Sir J. J. Thomson has shown that helium may lose one or two electrons and occur as singly or doubly charged atoms and krypton may lose at least four. The fact that these atoms have little combining power is no proof that they have no valence. Chemists have not given up hunting for compounds of these gases, and I cited the fact that the solubility of xenon in water is so great as to indicate some kind of union between the water and the gas. That the number of valences found from the cohesion should be fractional is easily explicable if the number of valence electrons attached to the atoms is not fixed. Some atoms may have none. Perhaps in the case of helium only a few atoms are charged and as a result the cohesion is so reduced that the computation gives a fractional number. How otherwise shall we explain the fact that while in hydrogen, oxygen, nitrogen, and carbon dioxide there is a steady advance in a with the molecular weight, yet in helium, which is twice as heavy as a hydrogen molecule, cohesion is so vastly less that this gas is the most difficult to liquify of all that are known? Or consider on the other hand metallic mercury. The cohesion and affinity are so low that mercury exists in the vapor as separate atoms. How naturally this is explained by the law of cohesion I have found, where the cohesion is shown to depend upon the ratio of the number of valences to the molecular weight! In mercury we have one of the heaviest of the elements with but a single valence so that the ratio of Val/Wt is very low and the cohesion is also low.

With this brief reply to some of the points raised by van Laar, we may proceed to discuss the real point at issue, and to show what the real value of a is. This will show the real basis of fact of the law I have found.

I. THE REAL VALUE OF a.

The first step to be taken in the solution of the problem of the nature of cohesion is the determination of the real value of a

of VAN DER WAALS' equation. Obviously nothing can with any certainty be said concerning the additivity of a, or its relation to such properties of molecules as their gravitational mass and number of valences, until we have a method of determining, approximately at any rate, the real value of a. This is a difficulty all have felt who have worked with the VAN DER WAALS' equation, or who have studied a. There are five or six methods I have used to determine this constant and the results are given in detail in the following pages. The first two methods depend on VAN DER WAALS' equation, but the others are independent of it. The first method is to start out with an assumption as to the condition of things at the critical temperature. Obviously from the law of corresponding states, there is something which all substances must have in common at the critical temperature. The only difficulty is to know what that common condition is. As we know that in many substances b_c is very nearly $V_c/2$ the first assumption which suggests itself is that in all substances at the critical temperature b_c is always $V_c/2$ or very nearly that. That is, the molecules always occupy the same proportion of the total space. This assumption, I may say at once, is not true, but it is very nearly true for many different substances, in fact it is approximately true for all except the simplest gases, such as nitrogen and hydrogen. It is interesting to see, also, how closely the value of a computed on this basis agrees with the real value. The first method, then, of computing a is by the assumption that $b_c = V_c/2.03$. This was the value computed by VAN DER WAALS for CO_2 assuming a constant but b variable with the volume.

The second method is the correct method and rests on the probability that at the critical temperature a/V is always $6.5\ PV$. Here we make an assumption, which I hope to be able presently to substantiate, that it is not a fixed relation of the volumes of the molecules to the total volume at the critical temperature which is common to all substances, but in reality it is the partition of energy. Always in all normal substances the same fraction of the kinetic energy is used in overcoming internal pressure and the same fraction for exerting the external pressure at the critical temperature. This assumption I believe to be true, and it is the second method for computing a: $a/V_c^2 = 6.5 P_c$.

The third and fourth methods are from the internal heat of vaporization. I have found two equations from which the calculation can be made, namely those of Mills and Dieterici.

The fifth method is to compute a from the total heat of

vaporization by means of a modified equation of Crompton and of Dieterici. Namely, $L = [V_c/(V_c - b_c)]RT\, Ln_e(d/D)$. This gives the value of b_c and by substitution in VAN DER WAALS' equation at T_c, a may be found.

The sixth method is from the surface tension, which is the direct measure of the cohesion. The relation between cohesion and surface tension is given by the formulae of Young and Eötvös.

The seventh method is to compute a from the pressure of a gas or liquid when it is heated while the volume is kept constant. It is obvious that this rise of pressure will be less the greater the internal pressure or cohesion. By holding the volume constant the distance between the molecules does not change and so there is no change of the cohesion with temperature, provided, of course, that the mass factor of the cohesion does not change with the temperature. So we may find a from the expression $(TdP/dT)_c$ when the volume is the critical volume.

None of these methods involves any assumption as to the other constant b and they are in every way preferable. it appears to me, to the method of VAN LAAR who has used solely a computation made from VAN DER WAALS' equation. The latter is first solved on the basis that a and b are both constants and then a correction, of a hypothetical nature made to it. I have never felt any reliance on this method and the results obtained by it are not to be compared in reliability with the values found from these direct measurements in the way I have indicated.

We may preface our work with the statement that a for any substance is constant and does not vary with temperature, except as it is affected by association of the molecules or their dissociation. There is no variation if the molecule remains intact. This opinion, which has been almost consistently upheld by VAN DER WAALS, is shown to be correct by the Eötvös surface tension law. a is the mass factor of the cohesion; the factors it contains are shown in this paper; and there is no more reason for assuming that it varies with the temperature than for assuming that gravitational mass varies with the temperature. VAN DER WAALS has shown the impossibility of a varying with the temperature in the manner supposed by CLAUSIUS; and this work, showing that a depends only on the number of molecules, their gravitational mass and number of valences, clearly supports his conclusion. On the other hand b clearly varies with the volume, and probably also, tho to a less extent, with the temperature.

a. Calculation of a assuming that $b_c = V_c/2.03$.

While this relationship is only an approximation, and probably does not hold everywhere, I have computed what the value of a would be were it generally true. The results are given in column 2 of Table 2. $(P_c + a/V_c^2)(V_c - b_c) = RT$: hence $a = 2.03\ RT_c V_c/1.03 - P_c V_c^2$. The critical data used in the calculation, unless otherwise stated, are those of S. YOUNG. A comparison of the results in column 2 with the values of a computed from the gravitational attraction and the number of valences given in column 8 shows the truly remarkable agreement between them in the case of all complex substances down to and including the triatomic gases. Nitrogen and the diatomic gases give, on this assumption, somewhat lower values of a than are computed from the gravitation, but I think it probable, from the evidence to be stated presently, that this is due to the fact that in these gases b_c is nearer $V_c/1.9$. I might add for purposes of comparison, that VAN LAAR's calculation of a makes b_c in complex substances about $V_c/2.1$ and in the diatomic gases about $V_c/2.5$. The associating substances, methyl and ethyl alcohol and acetic acid and water, diverge from the values calculated from weight and valence as was to be expected. The divergence of iodobenzene and brombenzene may be due to the critical data not being quite right,

b. Calculation of a from the formula: $a = 6.5\ P_c V_c^2$.

The second method of computing a from VAN DER WAALS' equation seems to me the most simple and reasonable of all the methods proposed, and that it is correct for at least all the complex substances, and probably for the simple diatomic gases also, is shown by the fact that the values thus computed are, on the whole, supported by the computations from the surface tension and the latent heat. The assumption made here is that in all non associating substances with compressible molecules at the critical temperature the ratio of the internal to the external pressure is either exactly, or very nearly a constant. This assumption appears to me to be entirely probable and I shall in a moment adduce evidence of its truth. There is something which all substances have in common at the critical temperature. That something might be the relation of the volume occupied by the molecules to the total volume, but it appears more probable to me that it would be that the energy is divided

in the same proportion between the internal and external pressure at the critical point. In other words it is the energy distribution which is the same in all substances at the critical temperature. At absolute zero, in the solid, the ratio of K, the internal pressure, to P, the external pressure, is infinity. On heating, at first the kinetic energy is used in overcoming cohesion. As the temperature rises the external pressure, the vapor pressure, increases and the internal pressure decreases. And at the critical temperature that state is reached in which the ratio of internal to external pressure is always a certain constant, namely 6.5. Certainly some kind of a ratio exists between the internal and external pressure at the critical point, for in helium the external pressure is only 5 atmospheres; in hydrogen it is 12; in pentane it is 33; and in water it is 200 atmospheres. The internal pressure, or the cohesion of these substances, takes the same order, being lowest in helium, and highest in water. Nor is it likely that the greater or less volume occupied by the molecules in different substances at T_c will effect this ratio, for the correction of b applies to both pressures equally and so presumably will not effect their ratio.

Even in the case of substances which associate, such as water, acetic acid and so on, I consider it not unlikely that this ratio will hold also and that K_c, the internal pressure at T_c, will also be equal to 6.5 P_c Only in these substances it is possible that we have in addition to the cohesional attraction between the molecules, such as is found in all substances, an additional attraction, perhaps of a chemical nature, and it is this latter factor which causes their association. In such a case K_c, the internal pressure, would be equal not only to a/V_c^2, but to this amount increased by the unknown attraction. At any rate we can regard the matter in this way for the present at least.

That the ratio K_c/P_c is approximately or exactly 6.5 in all substances I shall now proceed to show. In the first place it may be recalled that I found that the ratio K_c/P_c was equal to SC', where C' was the constant in Dieterici's equation: $L-E = C'RTLn_e(d/D)$, and S the critical coefficient. [1]) The values thus found for K_c/P_c varied from 6.14—7.28 in some 27 substances, the mean being 6.63. This is certainly a wide variation, but the variations were not of a regular character, and they may have been due to the fact that Dieterici's equation is not exactly true, or that there may

[1]) Mathews: Jour. phys. Chem., 20, 592 (1916).

be some other complicating circumstances. This value $a/V_c^2P_c$ is equal to $\frac{(T\,dP)}{(P\,dT)_c} - 1$. For this fraction VAN DER WAALS [1]) calculated for CO_2 the value of 5.7 but this was obtained by the differentiation of Biot's formula for the saturated vapor pressure, $\log P = A + B\alpha^t + C\beta^t$, and it has been shown by MILLS [2]) that this gives a value for $(dP/dT)_c$ from 10—20% too low. If we increase 5.7 by 15% it makes 6.55.

The second method of finding K_c/P_c is the following:

We may find what the ratio $(K_c + P_c)/K_c$ is from the ratio of the total latent heat of vaporization, L, to the internal latent heat of vaporization, $L - E$, as the critical temperature is approached.

The total heat of vaporization, L, is made up of three parts: (1) the external work done, which is equal to $P(V - v)$: (2), the work done against cohesion, which is equal to $a(1/v - 1/V)$; and (3), the heat rendered latent by the expansion of the molecules or their change in energy as they pass from the liquid to the vapor, or Z. The internal latent heat is the total heat, L, less the external work, or E, hence we have

$$\frac{L}{L - E} = \frac{P(V - v) + a(1/v - 1/V) + Z}{a(1/v - 1/V) + Z} \qquad (1)$$

Now as the critical temperature is approached Z becomes smaller and smaller and it will vanish before the other two portions of the latent heat vanish, because as the conditions of the vapor and liquid become more nearly alike there will be less and less difference between the molecules in the two states. Since they are already under great internal forces, they will be less affected as the critical temperature is neared by the difference in internal pressure in liquid and vapor than are the cohesion and pressure energies. Hence as the critical temperature is approached the limiting value of the ratio $L/(L - E)$, which at the critical temperature has the indeterminate form 0/0, will be

$$L - E = \frac{P_c + a/V_c^2}{a/V_c^2} \qquad (2)$$

The value of this fraction should be in all cases 7.5/6.5, or 1.154, if $a/V_c^2 = 6.5\ P_c$. I have computed the value of this ratio

---

[1]) VAN DER WAALS: Proceedings, Amsterdam Academy, 3. 583 (1901).

[2]) MILLS: Jour. phys. Chem., 8. 593, (1904).

of $L/(L - E)$ close to, or but a short distance from, the critical temperature, for 25 substances of YOUNG's of very different kinds. I have not been able to compute it close to the critical temperature in all cases, but as a rule it has been calculated at from 5° to 10° from the critical. In some cases I have been unable to find data close to the critical and have had to compute the ratio 20—60° below the critical. The value of the ratio does not vary more than one or two per cent for a considerable distance, 40°—50°, below the critical. At low temperatures, however, the value of the ratio will be lower than close to the critical. One cannot usually employ the values closer than 3°—5° of the critical, for the reason that the pressure as computed by BIOT's formula is slightly high close to the critical temperature, as MILLS has shown. The result will be that the ratio will be too high close to the critical temperature, as $L - E$ will be too low. To show the general trend of the ratio of $L/(L - E)$ I have computed methyl acetate, $SnCl_4$ and benzene for several temperatures. There is a slow advance in the constant as is to be expected up to the critical temperature.

Methyl acetate

t	L	$L - E$	$L/(L - E)$
100	88.39		1.114
200	50.56		1.152
220	34.87		1.157
230	20.99		1.159
233	11.70		1.163
233.7	0		

Benzene

80	95.45	86.70	1.101
140	82.82	73.4	1.128
220	62.24	53.8	1.157
260	43.82	37.56	1.166
280	27.43	23.45	1.170
288.5	0	0	

$SnCl_4$

100	31.76	29.1	1.092
200	24.57	21.59	1.138
240	20.86	18.15	1.149
260	18.50	16.02	1.155
280	15.60	13.45	1.160
318.7	0	0	

TABLE 1.

Test of relationship that $(P_c + a/V_c^2)/(a/V_c^2) = L/(L - E)$ (at $T_c) = 7.5/6.5 = 1.154$.

Substance	$t°$	$t_c° - t°$	L	$L - E$	$L/(L-E)$
Isopentane	183	4.8	41.27	35.39	1.166
Pentane	195	2.2	15.66	13.38	1.170
Diisopropyl	220	7.35	22.14	18.95	1.168
Hexane	230	4.8	19.73	16.98	1.162
Heptane	260	6.85	21.90	19.02	1.151
Octane	290	6.2	19.10	16.66	1.147
Diisobutyl	274	2.8	14.24	12.39	1.149
Methyl formate	200	14.1	38.80	33.18	1.169
Ethyl formate	230	5.2	22.79	19.51	1.168
Methyl acetate	230	3.7	20.99	18.10	1.159
Methyl propionate	256	1.4	12.70	10.98	1.157
Ethyl acetate	247	3.1	17.12	14.82	1.154
Propyl formate	260	4.85	21.02	18.17	1.157
Methyl butyrate	270	11.3	26.96	23.48	1.148
Methyl iso-butyrate	265	2.55	14.53	12.61	1.152
Ethyl propionate	270	2.9	15.65	13.64	1.148
Propyl acetate	275	1.2	11.73	10.20	1.150
Hexamethylene	279	1.0	11.78	10.07	1.170
Fl-Benzene	280	6.55	20.82	17.98	1.158
Benzene	280	8.5	27.43	23.45	1.166
Cl-Benzene	270	89.2	52.56	45.80	1.148
Br-Benzene	270	127.2	44.34	38.91	1.140
Ether	190	3.8	19.38	16.6	1.167
CCl_4	260	3.15	10.43	8.90	1.172
$SnCl_4$	280	38.7	15.60	13.45	1.160
				Mean	1.158

An inspection of Table 1 shows that the ratio of $L/(L - E)$ does indeed approach a constant value some three or four degrees below the critical temperature. The mean value is 1.158 which is about 0.4 °/₀ higher than I had expected, or the value of 1.154 which is the ratio of 7.5/6.5; but the constancy of this ratio must be regarded, I think, as on the whole satisfactory. The maximum deviation from the mean, disregarding *Br*-Benzene, is not more than 1 °/₀.

From these figures we discover two important facts. First that

the ratio of the internal to the total internal and external pressure is indeed a constant for all these diverse substances, ranging from inorganic substances, such as $SnCl_4$, with five atoms in the molecule, to complex substances like octane with 26 atoms, and embracing a variety of different kinds of organic compounds. The ratio of the total pressure to the internal is 1.158. From this we can find the ratio of the internal to the external pressure. We have $\frac{P_c + a/V_c^2}{a/V_c^2} = 1.158$. Hence $P_c = 0.158\, a/V_c^2$. Hence $a = 6.33\, P_c V_c^2$.

It will be noticed that an error of 0.1 % in the ratio $L/(L-E)$ becomes an error of 1 % in the ratio of $a/P_c V_c^2$. And inasmuch as the Biot formula gives too high a calculated value of P close to the critical temperature and this has the result of making $L/(L-E)$ a little too high and so $a/P_c V_c^2$ a little too low I have increased the value 6.33 to 6.5 in my calculations. This gives a value of a more nearly that calculated from the surface tension and in other ways and is I believe more correct. The mean value from the determinations by SC' was also higher than 6.33 and was actually 6.63. 6.5 is just about the mean of these two values. Moreover, if we take S as 3.75, when b_c is just $V_c/2$, then $6.5 + 1$ becomes 7.5 and this is just twice 3.75.

The relation between some of these values has been pointed out by Dieterici [1]). Among the twenty five substances of which the ratio of the internal to the external pressure has just been computed there is no example of a triatomic or a diatomic gas. But I shall show in a moment that the triatomic gases, at least, probably also have this same ratio. Before taking this up, however, I will point out that if the derivation of the ratio of the internal to the external critical pressure which I have made does not seem sufficient, exactly the same result is secured from Dieterici's equation [2]) and that of Crompton [3]).

Crompton observed that the total heat of vaporization or L was very nearly equal to $2\, RTLn_e(d/D)$. In place of 2 we will substitute what is in reality, I believe, its real value of $V_c/(V_c - b_c)$. Hence we have: $L = (V_c/(V_c - b_c))\, RTLn_e(d/D)$. And for the internal latent heat, $L - E$, we have according to Dieterici: $L - E = C' RTLn_e(d/D)$.

Dividing one by the other we obtain:

$$\frac{L}{L-E} = \frac{(V_c/(V_c - b_c))\, RTLn_e(d/D}{C' RTLn_e(d/D} = \frac{V_c}{(V_c - b_c)C'} \qquad (3)$$

[1]) Dieterici: Wied. Annalen d. Physik, 12, 141 (1903).
[2]) Dieterici: Annalen d. physik, 25, 569 (1908); 12, 141 (1903).
[3]) Crompton: Proc. Chemical Society, 17, No. 235, 1901.

But C' is equal to a/RT_cV_c, and $(V_c/(V_c-b_c))\ RT_cV_c/a$ from VAN DER WAALS' equation is equal to $\frac{P_c + a/V_c^2}{a/V_c^2}$. HENCE

$$\frac{L}{L-E} = \frac{K_c + P_c}{K_c} = \frac{a/V_c^2 + P_c}{a/V_c^2}. \tag{4}$$

A similar result was arrived at by DIETERICI [1]), namely, that $a/V_c^2 = 6.4\ P_c$ and in the following way. He started with two results, namely, that of Young that in many normal substances S is equal to 3.7. Then he proved experimentally for CO_2, pentane and isopentane that $(dP/dT)T_c = 2\ R/V_c$. The only assumption which will harmonize these two results is that $a/V_c^2 = 6.4\ P_c$. HENCE $\left(\frac{TdP}{PdT}\right)_c = 7.4$.

It might be pointed out here that $L/(L-E)_c$ according to VAN LAAR ought not to be the same in all substances, as we have found it to be. He finds for example that $f' = RT_c/(P_c(V_c-b_c) = 1 + a_c/P_cV_c^2 = 8\gamma$. Now γ he thinks varies from 0.6 in H_2 and 0.5 in helium to 0.9 in the more complex substances. He does not believe that a is independent of the temperature. The calculations just made lend no support to this view of VAN LAAR. They indicate that 8γ should everywhere be equal to 7.5.

I wish now to show that even the triatomic gases come approximately to this same ratio of 7.5, that is the ratio of $(K_c + P_c)/P_c$. We will start with CROMPTON's equation of the total latent heat modified in the manner just stated, namely:

$$L = (V_c/(V_c-b_c))\ RT\ Ln_e\ (d/D) \tag{5}$$

Substituting at T_c the value $(P_c + a/V_c^2)$ for $RT_c/(V_c-b_c)$ we have, at the critical point:

$$\frac{L}{Ln\ (d/D)} = P_c\ V_c + a/V_c \tag{6}$$

At other temperatures we have

$$L = \frac{(P_c + a/V_c^2)\ V_c}{T_c}\ TLn_e(d/D) \tag{7}$$

[1]) DIETERICI: Wied. Annalen d. Physik, 12, 144 (1903).

Assuming now that a/V_c^2 is 6.5 P_c we have

$$L = \frac{7.5\ P_c\ V_c}{T_c}\ TLn_e(d/D) \tag{8}$$

But $P_c\ V_c/T_c = R/S$ so

$$L = \frac{7.5\ R}{S}\ TLn_e(d/D) \tag{9}$$

Therefore

$$\frac{SL}{RT\ Ln_e(d/D)} = 7.5 \tag{10}$$

For most substances for gram mol quantities $7.5\ P_c\ V_c/T_c =$ about $2\ R$, or since R in calories is about 2 the product would be about 4. Since $7.5/S = V_c/(V_c - b_c)$, V_c/b_c is seen to be equal to $7.5/(7.5 - S)$. So from this relationship b_c is easily determined as $(7.5 - S)\ V_c/7.5$. For most substances, in which S is not far from 3.75, b_c will be approximately $V_c/2$.

We will now test the relation:

$$\frac{SL}{RT\ Ln\ (d/D)} = 7.5 = C \tag{10}$$

It may be stated at the beginning that CROMPTON's equation, which we have used as a basis, is only approximately true so that an exact constancy of 7.5 is not to be expected.

N_2O $P_c = 71.66$; $T_c = 309.5$ (CARDOSO and ARNI); *$d_c = 0.454$* (VILLARD); *$S = 3.658$.*

T	L	d	D	C
253	66.90	0.998	0.044	6.88
273	59.50	0.890	.081	7.38
293	13.25	.755	.151	7.45

SO_2 (P_c, 77.65; T_c, 157.15; d_c, .49; S, 3.695)

273	91.87	1.4338	0.0044	6.94
303	80.5	1.3520	.0136	6.89
335	68.4	1.2425	.0364	6.90

CO_2 $S = 3.59$

T	L	d	D	C
248	72.23	1.110	.044	6.98
273	57.48	.905	.099	7.36
295.04	31.80	.720	.233	7.39

CCl_4 $S = 3.677$

353	46.00	1.4765	.006083	6.77
393	42.08	1.3902	.01639	6.88
453	35.40	1.2470	.05249	7.04
513	25.56	1.0444	.1464	7.23
533	20.07	0.9409	.2146	7.27
553	10.43	0.7634	.3597	7.15

Methyl butyrate. $S = 3.903$.

373	77.80	.8068	.0033	7.62
423	68.82	.7415	.01168	7.87
473	57.41	.6633	.03268	8.10
533	34.44	.5166	.1091	8.34
553	11.16	.3812	.2201	7.38

Ether. $S = 3.814$.

273	92.52	.7362	.000827	7.10
353	73.50	.6402	.01155	7.38
413	55.63	.5385	.04488	7.72
453	31.87	.4268	.1135	7.56
463	19.38	.3663	.1620	7.30
466	11.36	.3300	.2012	7.01

Methyl acetate. $S = 3.943$.

323	100.34	.8939	.002212	7.62
413	76.83	.7532	.02454	8.00
453	61.00	.6671	.05682	8.05
493	34.87	.5281	.1416	7.91
503	20.99	.4527	.2028	7.65
506	11.70	.3995	.2525	7.42

Isopentane. $S = 3.734$.

T	L	d	D	C
293	83.41	.6196	.002344	6.92
333	74.35	.5769	.007837	7.04
433	41.27	.4206	.07289	7.37
453	24.65	.3498	.1258	7.21
460	10.43	.2857	.1831	7.31
460.4	8.07	.2761	.1951	6.84

N-Pentane. $S = 3.762$.

303	85.76	.6165	.002451	6.99
373	69.94	.5377	.01626	7.32
423	52.39	.4604	.0476	7.46
453	35.01	.3867	.0935	7.44
463	24.68	.3445	.1269	7.29
468	15.66	.3065	.1609	7.09
470	6.55	.2640	.2005	6.92

N-Octane. $S = 3.864$.

393	71.43	.6168	.003247	7.70
433	64.75	.5772	.008591	7.90
533	39.14	.4364	.06223	8.38
553	28.26	.3818	.09833	8.37
563	19.10	.3365	.1346	8.23

Benzene. $S = 3.755$.

353	95.45	.8145	.002732	7.01
413	82.82	.7440	.01176	7.15
453	74.62	.6906	.02487	7.32
473	68.81	.6605	.03546	7.35
513	54.11	.5851	.07138	7.41
533	43.82	.5328	.1038	7.42
553	27.43	.4514	.1660	7.32

Cl-Benzene. $S = 3.776$.

273	89.89	1.12786	.00002	6.45
453	68.96	.9224	.01023	7.24
493	62.89	.8672	.02145	7.38
543	52.56	.7835	.04921	7.49

$Sn\ Cl_4$. $S = 3.755$.

T	L	d	D	C
373	31.76	2.0186	.005747	7.18
423	28.35	1.8772	.02023	7.31
473	24.57	1.7224	.05459	7.43
513	20.86	1.5667	.1083	7.52
533	18.50	1.4747	.1520	7.54
553	15.60	1.3628	.2160	7.56

An examination of the foregoing figures shows that the equation of Crompton is not entirely true, for in general the value $SL/RT\ Ln(d/D)$ is never in any substance quite constant, but in all it shows a fairly uniform course, being somewhat lower at the lower temperatures, rising to a maximum and then declining again near the critical temperature. In a few substances it is more constant, namely in iso-pentane, pentane and benzene. These are the substances, to be sure, of which the density is most accurately known. On the whole, however, the equation is approximately true. The value of the constant comes very close in many substances to the expected value of 7.5 and this in widely different substances, ranging from benzene, to nitrous oxide and carbon dioxide. In octane, methyl butyrate and methyl acetate it is somewhat higher ranging in octane from 7.70—8.38. On the other hand SO_2 is lower than it should be. With these exceptions the agreement is certainly fair with our expectation and shows that the ratio of K_c/P_c must be nearly, if not exactly, 6.5 in triatomic gases as well as more complex substances. There is no indication, I think, of any general trend in the constant with an increase in molecular complexity. Pentane is little if any higher than N_2O. The evidence from this source bears out, then, the determinations of the ratio of K_c/P_c from the ratio of the total to the internal latent heat near the critical temperature.

It ought also to be true, if the foregoing is true, that near the limit of the critical temperature

$$\frac{L}{P(V-v)} = \left(\frac{T}{P}\frac{dP}{dT}\right)_c = a/V_c^2P_c + 1 = 7.5 \qquad (11)$$

At the critical temperature this ought to be equal to 7.5, but on testing this on two or three substances, the ratio $L : P(V-v)$ was

more nearly 6.8 than 7.5 even in isopentane quite close to, within a fraction of a degree of, the critical. The reason for this is, I presume, that dP/dT close to the critical temperature is always too small since the Biot formula gives too high a value for P here. The error appears twice, then, making the latent heat too low, and P too high close to the critical, so that the calculated ratio is always lower than 7.5 and lower than it ought to be.

We have then to calculate the value of a the formula $a = 6.5\, P_c V_c^2$. The computations are given in colum 3 of Table 2, and I have also plotted the results in figure 1, log a being there plotted against the logarithm of the product of the molecular weight by the number of valences. The values, with one or two exceptions, fall along a straight line, and it is clear that if this method of computing a is correct, and I see no reason to doubt its correctness, there is no question that a is dependent on the product of the molecular weight by the number of valences.

I do not know why a/V_c^2 should always be equal to 6.5 P_c. That is I do not know what the significance of this constant of proportion, 6.5, is. As it may help someone else to discover the significance of this, I may mention one other fact I have discovered, namely, that at about 0.94 T_c in the saturated vapor PV becomes exactly equal to a/V and at the same time the ratio of $(PV + a/V)$: RT becomes equal to 1.154, that is equal to 7.5 : 6.5, or the ratio $(P_c + a/V_c^2) : a/V_c^2$. At that point, also, $V/(V-b)$ becomes equal to 1.154. This holds certainly in widely different substances from CO_2 to the substances of Young. I do not yet see the significance of these relations. We have then at 0.94 T_c the following: $2\, PV = 1.154\, RT$; and $RT/PV = 1.733$. This factor, 1.733, corresponds to the critical coefficient S. 1.733 is the constant C' Dieterici found in his equation: $L - E = 1.733\, RT \operatorname{Ln}_e(d/D)$ in the case of substances where $b_c = V_c/2$. If S is 3.75 then SC' should give us K_c/P_c and 3.75×1.733 is 6.5. But I do not understand the significance of these facts.

In associating substances such as water and ethyl alcohol the value of a calculated by this formula is always larger, and sometimes very much larger, than the value calculated from the molecular weight and number of valences assuming these to be normal. The cohesion of associating substances is, for some reason I do not understand, greater than expectation from the theoretical number of valences. These substances appear to have an additional cohesive attraction. Perhaps this is of a chemical nature.

c. Calculation of a from the internal latent heat of vaporization.

This method has already been described [1]). There are three formulas for the internal latent heat of vaporization from which one might expect to make the calculation but only two of them actually permit that this be done. These formulas are those of Mills, Dieterici and Albertoni. Mills equation is:

$$L-E = \mu' (d^{1/3}-D^{1/3}) \qquad (12)$$

Dieterici's equation is

$$L-E = C'RT\, Ln_e (d/D) \qquad (13)$$

And Albertoni's is

$$L-E = \alpha (d^{5/3}-D^{5/3})-\beta\, D(d-D)/d \qquad (14)$$

a may be determined from these formulas in the following way. If the internal latent heat represented only the heat necessary to overcome cohesion, then $L-E$ should be equal to the difference in cohesive energy in the liquid and vapor, or $L-E$ should equal $a(1/v-1/V)$. As a matter of fact some of the internal heat goes into the molecules so that generally $L-E$ is larger than the difference of cohesive energy in the liquid and vapor. But as the critical temperature is approached the differences between the molecules in liquid and vapor become less and less and at the critical temperature $L-E$ must be precisely equal to $a(1/v-1/V)$ and this should be equal to the right hand terms of the three equations just mentioned. Hence we would have from Mills' equation $a(1/v-1/V) = \mu' (d^{1/3}-D^{1/3})$; from Dieterici's we would have: $a(1/v-1/V) = C'RT\, Ln_e(d/D)$ and from Albertoni's: $a(1/v-1/V) = \alpha(d^{1/3}-D^{5/3})-\beta\, D(d-D)/d$, in all cases at the critical temperature. Of course at the critical temperature $(1/v-1/V)$ and $Ln_e(d/D)$ become equal to zero, but the ratio has a definite value and at the limit, the critical temperature, we have respectively from the three equations:

From Mills [2]):

$$a = \mu' M^2/3d_c^{2/3} \qquad (15)$$

From Dieterici [3]):

$$a = C'RT_cV_c \qquad (16)$$

---

[1]) Mathews: Journal of phys. chem., 20, p. 554, 1916.
[2]) Mills: Phil. Mag., (6) 22, 97 (1911).
[3]) Dieterici: Wied. Ann., 25, 569 (1908).

From ALBERTONI [1]):

$$a = \alpha 5M^2 . d_c^{2/3}/3 - \beta M^2 \qquad (17)$$

If these three formulas were correct then the value of a computed from them should of course be the same. But all three are in part at least empirical. The formulas of MILLS and DIETERICI give values for a which, on the whole, are quite similar, altho seldom identical, and I have used both of these equations for computing a. ALBERTONI's equation gives always a value of a which is 10—20 % too low and this amount lower than either of the other equations. For example a for ether from ALBERTONI's equation has the value 15.31×10^{12} in place of the value of about 18.87 from DIETERICI and 19.34 from MILLS. The other methods of determining a show that the proper value for ether is about 19.12×10^{12}. With benzene, ALBERTONI gives 18.12, whereas the others give from 19.17 to 20.78. ALBERTONI's equation gives a very accurate determination of $L—E$ except close to the critical temperature. Close to the critical temperature it agrees remarkably well with the value of $L—E$ which one calculates using the figures for the vapor pressure, or P, calculated by BIOT's formula. Now it is known that BIOT's formula does not give the proper value of P close to the critical temperature. Consequently ALBERTONI's equation, which accurately follows BIOT's, breaks down close to the critical point, just as BIOT's does and cannot be used to calculate a at the limit of the critical temperature for this reason. We get too low a value for a if we use ALBERTONI's equation, just as we do if we compute a from $\left(\frac{dP}{dT}\right)_c$ derived from BIOT's formula. It will be recalled that $P_c + a/V_c^2$ is equal to $(T\,dP/dT)_c$ at the critical temperature. If we determine dP/dT at T_c by differentiation of BIOT's formula the value of dP/dT thus found is from 10—20 % too low so that a is also this amount too low. BIOT's and ALBERTONI's equations, while permitting a very accurate calculation of P, and so of $L—E$, at other temperatures, do not, then, give reliable results close to the end of the curve and cannot be used for that reason at the limit. As regards the other two equations each is at least partially empirical and it is clear from the fact that they do not give exactly the same results that one or both are only more or less close approximations to the truth. The values

---

[1]) ALBERTONI: Jour. de Chim. Phys., 13, 379 (1915).

calculated by them are, as will be seen, in very good agreement, however, except in a few instances with calculation of a from the surface tension and in other ways, and they give at least an approximation, as close as we can get at present, to the real value of a. This calculation is also quite independent of the value of the other constant b. The values of a calculated by these two formulas are given in columns 4 and 5 of Table 2. It will be seen that on the whole they agree well with the values calculated in other ways except in the case of octane and the heavier esters, where the values thus calculated from the internal latent heat are higher than expectation. On the basis of the relation that dP/dT at the critical temperature is equal to $2\,R/V_c$ MILLS has computed another value for his constant μ'; and the values of a calculated from the formula using this value of μ' are more nearly those computed from the gravitation, but this relationship of $dP/dT = 2\,R/V_c$ can only be justified when $b_c = V_c/2$. It may be that some decomposition close to the critical temperature makes the latent heat of vaporization somewhat high in those substances of a high critical temperature like octane. On the other hand there may of course be some other explanation.

d. Calculation of a from the surface tension.

This method I have discussed more at length elsewhere [1]). We may compute a from the surface tension by means of THOMAS YOUNG's formula, making the calculation at absolute zero; or we can determine it from Eötvös' constant. The law of YOUNG is in reality only the law of Eötvös at absolute zero, the temperature at which the cohesion of the vapor can be completely neglected. I found that C, the constant in Eötvös' law had the value: $C = ad_o/3\,MN^{1/3}\,T'_c$. Eötvös' law is: $sV^{2/3} = C(T'_c - T)$. C is determined by experiment; s is the surface tension in dynes per cm; M is the molecular weight; d_o is the density at absolute zero; T'_c the critical temperature; and $V^{2/3}$, the two thirds power of the volume of a gram mol of the liquid. The density at absolute zero may be calculated from the relation: $(d - D)/d_o = ((T'_c - T)/T'_c)^{1/3}$. In computing a from the surface tension it must be remembered that many of the determinations of surface tension are made by the capillary rise method and that the errors in this method all tend to make s low. Also the determination of the surface tension by this

[1]) MATHEWS: Journ. phys. chem., 20, 567 (1916).

method involves the assumption that the angle of contact is zero and, while this is undoubtedly very nearly true at low temperatures, the angle has a finite value at higher temperatures. The correction, if made, would have the result of increasing the surface tension. The surface tension of all the liquified gases given in the table, except that of SO_2, were determined by the capillary rise method and are hence to be regarded as minimum values. In SO_2 the tension was measured by the ripple method. In most of the other cases cited the tension was measured by the drop weight method, and I have used the results of MORGAN [1]) and his colleagues, but I have corrected his results by the method of LOHNSTEIN [2]) and HARKINS and HUMPHERY [3]). In interpreting the values of a found in this way it must also be borne in mind that if there is any association in the liquid the effect is to reduce the value of C, for the reason that the number of molecules does not then remain a constant but is reduced by the association. This again will in some cases make the value of a lower than it really is. In general then the values of a determined by the surface tension are apt to be lower, rather than higher, than the true values. The fact that C is constant over a wide range of temperature shows that VAN DER WAALS' constant a is also constant as he has maintained, but which has been doubted by others.

I may mention, also, in this connection that if the density at absolute zero was really equal to Sd_c, where d_c is the critical density, the constant C would have the value ascribed to it in my paper on the Internal Pressure of Liquids of $C = K_c R/3P_c N^{4/3}$, where N is the number of molecules in a gram mol and K_c is a/V_c^2. If K_c/P_c were constant in all non-associating substances and had the value I have assigned to it of 6.5, then C would be the same in all normal substances and it would have the value of 2.14, which is very close to the value found for it in many substances. However as d_o is not always equal to Sd_c, this value of C is not always the same, but is lower in the simple gases and higher in the more complex substances, ranging from 1.60 to 2.23 or perhaps still higher.

The values of a calculated from the surface tension are given in column 6 of table 2. Their agreement and disagreement from the other methods of calculation will be readily perceived from the table.

---

[1]) MORGAN et al: Journal of the Amer. Chem. Soc., 33, 34, 35, (1911), (1912), (1913).
[2]) LOHNSTEIN: Zeit. phys. chem., 64, 686 (1908); 84, 410 (1915).
[3]) HARKINS and HUMPHERY: Jour. Amer. Chem. Soc., 38, 228 (1916).

e. Computation of a from the equation of Ramsay and Young.

The computations of a by the methods already noted may be checked by computing a for a few substances from the value of the pressure of a liquid or gas when heated under constant volume. RAMSAY and YOUNG [1]) found that the pressure could then be represented by the formula $p = bT - a$. This b and a are not the constants of VAN DER WAALS' equation but a is in reality a/V_c^2 and b is dP/dT' at the critical temperature. It will be recalled that $T_c\,(dP/dT')_c$ is equal to $P_c + a/V_c^2$. The value of $(dP/dT')_c$ found in this way is about 10—20 % higher than that of dP/dT' calculated from BIOT's formula for the vapor pressure showing that the latter is incorrect. VAN DER WAALS found for example that $\left(\frac{T\,dP}{P\,dT}\right)_c$ calculated from BIOT's formula gave in the case of CO_2 the value of 6.7. This is 12 % too low. It should be 7.5. To return to RAMSAY and YOUNG's equation, the constant a for pentane and isopentane, [2]) when computed from the value of b, was 162,890 mm. Hg. From this using the d_c determinations of YOUNG we compute VAN DER WAALS' constant a for isopentane to be 20.06 and for n-pentane to be 20.88×10^{12}. The mean value is 20.47×10^{12}. This, as will be seen, is practically identical with the computation from the gravitation and valences and is much higher than VAN LAAR's value. For ether, the value of RAMSAY and YOUNG's constant a was 174,816 mm. Hg. With d_c of ether 0.2625 this gives for a of VAN DER WAALS the value of 18.52×10^{12}. This is about 3 % lower than most of the values found for a of ether by other methods, but is far nearer my values than VAN LAAR's. For CO_2 AMAGAT [3]) gives dP/dT for V_c as 1.72 atmospheres. From this with $P_c = 72.9$ and $d_c = .464$ we calculate a to be 4.11×10^{12} which is about 4 % lower than my value of 4.29, which is also the value originally assigned to a of CO_2 by VAN DER WAALS. But 4.11 is 15 % higher than VAN LAAR's value of 3.56. In every case, therefore, the calculation of a by this method bears out the calculations by the latent heat and other methods already described, and they equally show that

[1]) RAMSAY and YOUNG: Phil. Mag., 33, 435 (1887).

[2]) ROSE INNES and YOUNG: Phil. Mag., 5th Ser., 47, 353 (1899). YOUNG: Stoichiometry. ROSE INNES: Phil. Mag., 44, 76 (1897). Phil. Mag., 45, 103 (1898).

[3]) AMAGAT: Ann. de Chim. et Phys., 6, 29 (1893).

VAN LAAR's values are incorrect. These values are compared in Table 2 column 7.

f. Computation of a from Van der Waals' equation when b is separately determined by means of a modified Crompton's equation.

I will here simply call attention to this method without calculating the values as they are the same as the values calculated from the latent heat in other ways. Here, however, we make the calculation from the total latent heat and not from the internal latent heat as in MILLS' and DIETERICI's equations.

CROMPTON's equation is:

$$L = 2\ RT\ Ln_e\ (d/D)$$

From this equation MILLS gets the result that $T(dP/dT)_c = 2\ RT/V_c$. Since $T_c\,(dP/dT)_c$ is equal to $P_c + a/V_c^2$, which is equal to $RT_c/(V_c - b_c)$ it is clear that in place of 2 we should have $V_c/(V_c - b_c)$. From the latent heat we may hence calculate b_c and from the value of b_c thus found we may get a by substituting in VAN DER WAALS' equation at the critical temperature. I have computed pentane at 170° by this method. The result was that V_c/b_c came out 2.016. This gives a of 20.84×10^{12} dynes for a gram mol. This agrees closely with a determined for pentane in other ways as shown in table 2. In the case of octane the agreement is not so good. In n-octane at 220° b_c is found to be only $V_c/1.89$ whereas $V_c/2.02$ is required. This value of $V/1.89$ for b_c would give for a, 43.25×10^{12} which is nearly that given by DIETERICI's equation from the internal latent heat and much higher than most of the other methods. I have not calculated any other substances but I suppose they would agree very well on the whole with the calculation from MILLS' and DIETERICI's equations. It will in this respect bear out the other computations.

From this equation combined with DIETERICI's we have at once $V_c/(V_c - b_c) = 1/S + a/RT_c\ V_c = 1/S + C'$. For many substances S is about 3.75 and C' is 1.733 so that $1/S + C' = 2$.

Putting this equation of CROMPTON's in this form makes it more easily understood. As is shown later on, $Log\ a = K'\,(V_c - b_c)/b_c$. From this we get for the value of $V_c/(V_c - b_c)$, $\frac{K'V_c}{b_c\ Log\ a}$. The equation thus becomes: $L = (K'V_c/b_c\ Log\ a)\ RT\ Ln_e\ (d/D)$. In a perfect

gas L should be equal to $RT\,Ln_e(d/D)$. The correctional term will be seen to include the cohesion in $Log\ a$ and also the compressibility of the molecules in the term V/b_c. K' is of course a constant of proportion.

g. a as computed by van Laar.

In order that the values computed by VAN LAAR for a may be readily compared with those found by these various methods they are given in Column 9 of Table 2. To express his figures in dynes for gram mol quantities, in place of the units he uses, I have multiplied the square of the value of $V'a$ given under the heading „found" in his paper, by the factor 4.923×10^{14}, this being the square of the ratio of the number of molecules in a gram mol to the number in 1 c. c. of gas under standard conditions, multiplied by the factor for converting atmospheres to dynes per cm^2.

II. DETAILS OF CALCULATIONS.

1. *Hydrogen.*

The determination of a for hydrogen is extremely important from the theoretical point of view, for the valence of hydrogen is always unity.. (*a*). Determination from the formula: $a = 6.5\ P_c V_c^2$. Critical data of H_2 according to DEWAR are T_c, 32; P_c, 15; $d_c = 0.033$. According to BULLE $T_c = 31.9$; P_c, 11. P_c is evidently lower than 15 atmospheres, since S, or RT_c/P_cV_c, with DEWAR's figures would be 2.88, an impossibly low figure, lower than helium, which has less cohesion. With BULLE's figures combined with $d_c = 0.033$ S would be 3.901, an impossibly high figure, since this is higher than S in very complex substances. S of hydrogen probably will be found between He, or 3.12, and O_2, where S is 3.42. I have accordingly taken as the most probable figure for P_c the mean between DEWAR's and BULLE's figures, or 13 atmospheres. This would make S equal to 3.30. With $P_c = 13$ and $d_c = 0.033$ $\mathbf{a = 0.319 \times 10^{12}}$. With P_c taken as 11 atmospheres it would be 0.270×10^{12}.

(*b*). Determination from the surface tension of liquid hydrogen. Either form of the formula may be used, namely: $a = 3\,MN^{1/3}T_cC/d_o$; or $a = 3\,sV^{2/3}N^{1/3}MT_c^{2/3}/(d-D)(T_c-T)^{2/3}$. C is Eötvös constant; it is equal to 1.464 (ONNES). $sV^{2/3}$ at T (ABS) 14.83° is 25.137 ergs. d_o calculated from the density at 14.83° by the formula $d_o/(d-D) = (T_c/(T_c-T))^{1/3}$ is 0.09395. Solid H_2 at 13° ABS.

has a density of 0.077 (DEWAR). d, at 14.83° is 0.07631. $M = 2.014$. $N^{1/3} = 8.463 \times 10^7$. $T_c = 31.95$. $T_c - T = 17.12°$ $\mathbf{a = 0.254 \times 10^{12}}$ In this calculation the density of the vapor, D, at 14.83° was neglected. If it has any appreciable effect on the calculation neglecting D will make a smaller than it really is. Moreover the surface tension was measured by the capillary rise method and this gives generally a value lower, rather than higher, than it ought to be. HENCE 0.254 is to be regarded as a minimum value for a. The true value is certainly not lower than this and it probably is higher, but we cannot say how much higher.

Conclusion: From the surface tension we have a equal to 0.254; and from the pressure-volume formula, 0.270 or 0.319, more probably the latter. The true value for a certainly lies between 0.254 and 0.319×10^{12}, but it cannot yet be said just what the value is. From the gravitation and valences by my formula, a is computed as $\mathbf{0.298 \times 10^{12}}$, which would appear to be certainly not very far from its real value. In this calculation 2 valences were assumed to be present in the molecule; the formula used was $a = N^2(m^2k \times Val/M)^{2/3}$. The value for a computed by VAN LAAR and used in his calculations was 0.126×10^{12}. This value is certainly 100 °/₀ below the true value for a. It is probably still more in error than this. Furthermore the value he adopts for a gives for b_c the figure $T_c/2.56$. This as I shall point out presently is impossible, for the reason that the molecules of hydrogen are more compressible than those of pentane, not less. On the other hand the value for a computed by my rule from the gravitation and valences appears to be very close to the true value. The correction which VAN LAAR has made, the factor γ, to the computation of a by the ordinary VAN DER WAALS method, is clearly shown, I believe, to be a correction which is directly contradicted by the facts, since the calculation of a by the usual VAN DER WAALS' formula without this correction gives a value not so far from the truth as that of VAN LAAR's method.

To save repetition it may be stated here that in all the calculations which follow the number of molecules in a gram mol has been taken to be that found by Millikan of 6.062×10^{23} so that the value of $N^{1/3}$ is 8.463×10^7. The computation for a by the valences and molecular weight has been made by the formula: $a = 1.1763 \times 10^{11}(M \times Val)^{2/3}$. This is identical with the formula $a = N^2(m^2k \times Val/M)^{2/3}$ the factor 1.1763×10^{11} being equal to N^2 multiplied by the factor $(m_1^2k)^{2/3}$ where m_1 is the mass of a molecule of unity molecular weight and unity valence.

2. *Nitrogen.* N_2.

(*a*). From the surface tension, $a = 3MN^{1/3}T_cC/d_o$. Or by the formula already given in the case of Hydrogen. C (Baly and Donnan) is 1.95; $M = 28$; $N^{1/3} = 8.463 \times 10^7$; T_c, 125.96 (Abs.); d_o, calculated by the same formula as used in hydrogen is 1.104. d, of N_2 at 20.5° Abs. is 1.0265 (Dewar). This is the temperature of boiling H_2. For comparison oxygen at 20.5° Abs. has a density of 1.4526. Its density at absolute zero is computed to be 1.531. If the density of N_2 at absolute zero is 1.104 then $\mathbf{a = 1.58 \times 10^{12}}$.

(*b*). From $a = 6.5P_cV_c^2$. $P_c = 33.49$; d_c is 0.311; M is 28; V_c is 90.03 ..... $\mathbf{a = 1.74 \times 10^{12}}$.

(*c*). From $a = 2.03RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$ ..... $\mathbf{a = 1.58 \times 10^{12}}$.

Conclusion. We have the values **1.58, 1.74, 1.58 $\times 10^{12}$** as the three found values. The surface tension value of 1.58 is certainly, for the reasons already stated in the case of hydrogen, a minimum value. The value of a for nitrogen is certainly higher than 1.58. It may be as high as 1.74. From the gravitational mass and the valences, taking two valences to the molecule, a is computed to be **1.72 $\times 10^{12}$**, which is probably not far from its true value. In assuming nitrogen to be monovalent here, it may be pointed out that as chemists have supposed nitrogen to be monovalent, di, tri, penta, and hepta valent in different compounds, there is as good reason for taking it monovalent as for assuming it to be di, or tri, valent. If it is monovalent, as it appears to be, the agreement between the value of a computed from the gravitational attraction and that from the pressure volume formula is perfect. VAN LAAR's value for N_2 is 1.33×10^{12}. This is certainly 20 °/₀ too low, if we accept the minimum value computed from the surface tension of 1.58 as correct. If 1.72 is the correct value, as I think, then he is 30 °/₀ too low. It is clear that computing from the valences and the gravitation we obtain here as in hydrogen a much better agreement with the real value of a than by VAN LAAR's method. The same objection applies to the value of 1.33 for N_2 as to the low figure for hydrogen: it makes b_c too small. N_2 like hydrogen, is more, not less compressible than pentane, and b_c must accordingly be larger than $V_c/2$ and not smaller.

3. *Oxygen.* O_2.

(*a*). From the formula: $a = 6.5P_cV_c^2$. $P_c = 49.71$ (ONNES, DORSMAN and HOLST). d_c is 0.4299 (MATHIAS and ONNES). M is 32. $V_c = 74.43$ ..... $\mathbf{a = 1.81 \times 10^{12}}$.

(b). Surface tension. $a = 3MN^{1/3}T_cC/d_o$. $C = 1.92$ (Baly and Donnan). $N^{1/3}$ is 8.463×10^7. $T'_c = 154.25$; d_o is 1.531 computed from $d_o/(d - D) = (T_c/T'_c - T)^{1.3}$ $\mathbf{a = 1.58 \times 10^{12}}$. It may also be calculated from the second formula given in hydrogen. At —203° s is 18.35 dynes. d is 1.2393; D is 0.0019. The densities are from Baly and Donnan. $sV^{2/3}$ is 160.3 ergs . . . . $\mathbf{a = 1.58 \times 10^{12}}$

Conclusion. The value of 1.58 from the surface tension is certainly a minimum value. The true value is probably higher than this. The value 1.81 is probably not far from right. a computed from the gravitation with 2 valences in the molecule is $\mathbf{a = 1.88 \times 10^{12}}$, a value nearly ·4 °/₀ higher than the figure computed from the pressure volume formula. Were there 4 valences in the molecule of course the computed value of a would be much higher still. If there are but 2 valences in the molecule, and by valences is probably meant negative electrons, the agreement is fair. The value adopted by van Laar is 1.33×10^{12}. This is from 20—40 °/₀ too low, showing again that his method of computing a is wrong.

4. *Carbon monoxide. CO.*

(a). $a = 2.03\ RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $P_c = 34.60$; $d_c = 0.311$ (Cardoso). $T'_c = 134.3$
$S = 3.54$; $M = 28$; $V_c = 90.03$. . . . . $\mathbf{a = 1.70 \times 10^{12}}$

(b). $a = 6.5\ P_cV_c^2$. . . . . $\mathbf{a = 1.85 \times 10^{12}}$

(c). $a = 3\ s^{2/3}N^{1/3}MT_c^{2/3}/(d-D)(T_c-T)^{2/3}$
s, the surface tension, by Baly and Donnan at — 203° = 12.84 dynes.
$d = .8474$; D is neglected. $T_c - T = 64.3$.
$M = 28$. $s^{2/3} = 132.26$ ergs . . . . . $\mathbf{a = 1.813 \times 10^{12}}$

We have then for the value of a 1.70, 1.85, 1.81×10^{12}. Probably 1.85 is near the true value. If there are two valences in the molecule a computed from the gravitation and valences is $\mathbf{1.72 \times 10^{12}}$. With four valences it would be 2.73×10^{12}. Van Laar's value is 1.41×10^{12} a value which, like the others, is at least 20 °/₀ too low.

5. *Methane. CH_4.*

(a). $a = 6.5\ P_cV_c^2$. $P_c = 45.6$; $T_c = 190.15$; $d_c = 0.1623$; $V_c = 98.58$; $S = 3.48$ (Cardoso). . . . . $\mathbf{a = 2.92 \times 10^{12}}$

(b). $a = 2.03\ RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. . . . . $\mathbf{a = 2.63 \times 10^{12}}$

These are the only two values I have been able to calculate. The value from the gravitation with 8 valences to the molecule, $a = N^2 (m^2 k \times Val/M)^{2/3} = \mathbf{2.99 \times 10^{12}}$. VAN LAAR's value is 2.21 which again is 20 °/₀ too low.

6. *Nitrous oxide.* N_2O.

(*a*). $a = 2.03\, RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $P_c = 71.65$; $T_c = 309.5$ (CARDOSO and ARNI) $d_c = 0.454$ (VILLARD) $S = 3.658$. $V_c = 99.41$ . . . . . $\mathbf{a = 4.21 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\, P_cV_c^2$ . . . . . $\mathbf{a = 4.43 \times 10^{12}}$

(*c*)[1]. $a = M^2\mu' 4.185 \times 10^7/3\, d_c^{2/3}$. $\mu' = 88.3$ . . $\mathbf{a = 4.01 \times 10^{12}}$

(*d*). $a = C'RT_cV_c$. $C' = 1.513$ . . . . . $\mathbf{a = 3.77 \times 10^{12}}$

(*e*). $a = 3sv^{2/3} MN^{1/3} T_c^{2/3}/(d - D)(T_c - T)^{2/3}$. s at $-24° = 9.92$ dynes (VERSCHAFFELT). $d = 1.0254$; $D = 0.417$; $sv^{2/3} = 121.59$ $\mathbf{a = 4.10 \times 10^{12}}$

The mean of these various values is 4.12×10^{12} but in view of the fact that one is so extremely different from the others we may omit 3.77 and the mean is then $\mathbf{4.20 \times 10^{12}}$ which I think is probably not many per cent from the true value.

If there are 4 valences in the molecule, the oxygen being bivalent the nitrogen monovalent the value computed would be **3.59.** If there are five valences then the value is $\mathbf{4.29 \times 10^{12}}$ which agrees well with the found value. VAN LAAR's value is 3.56 which is again evidently some 20 °/₀ too low. The computations indicate that there are 5 valence electrons in the molecule.

7. *Carbon dioxide.* CO_2.

(*a*). $a = 2.03\, RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $T_c = 304.35$; $P_c = 72.85$; $S = 3.59$; $V_c = 95.42$; $d_c = .461$ . . . . $\mathbf{a = 4.29 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\, P_cV_c^2$ . . . . . $\mathbf{a = 4.37 \times 10^{12}}$

(*c*). $a = \mu' M^2/3d_c^{2/3}$. $\mu' = 95.2$ $M = 44$ . . . . . $\mathbf{a = 4.32 \times 10^{12}}$

(*d*). $a = C'RT_cV_c$. $C' = 1.762$ . . . . . $\mathbf{a = 4.27 \times 10^{12}}$

(*e*). $a = CMN^{1/3} d_o T_c/d_o$. $d_o = 1.725$; $N^{1/3} = 8.463 \times 10^7$; C of liquid CO_2 by Eötvös is 2.34 . . . . . $\mathbf{a = 4.61 \times 10^{12}}$

[1]) The factor 4.185×10^7 in the (*c*) formula has generally been omitted in the formula as written in the pages which follow, but it has of course always been used. It is the factor for converting calories to ergs, the value of μ' being given in calories.

(f). $a = 3\,sv^{2/3}T_c^{2/3}N^{1/3}M/(d-D)(T_c-T)^{2/3}$. From VERSCHAFFELT's surface tension measurements by capillary rise method at $-24.3°$: $s = 9.21$ dynes; $d = 1.005$; $D = 0.047$; $T_c - T = 55.6$ . . . . . $\mathbf{a = 3.55 \times 10^{12}}$
Mean of VERSCHAFFELT and Eötvös computation $\mathbf{4.08 \times 10^{12}}$.

(g). $a = I^2a'$, a' being the constant of RAMSAY and YOUNG's equation expressing variations of pressure with changing temperature while volume is constant. $dP/dT = 1.72$ atmospheres (AMAGAT). $d_c = 0.464$. . . . . $\mathbf{a = 4.11 \times 10^{12}}$

These results are very consistent with the exception of Eötvös' and VERSCHAFFELT's determinations of the surface tension. I think in general that Eötvös' method of determining the surface tension gives a result which is higher than any other method. On the other hand the capillary rise method often yields too low a result, so a determined from VERSCHAFFELT's observations is too low and that from Eötvös is somewhat high. The mean of all these is $\mathbf{4.23 \times 10^{12}}$ but I believe the actual value may be a little higher, say 4.29×10^{12}. This is exactly the value which VAN DER WAALS [1]) assigned to it in his work on the Continuity of Liquids and Gases. He there gives the value of .00874 for a. This computed for dynes and gram mol quantities is 4.29×10^{12}. If we now compare this value with that computed from the molecular weight and number of valences, we find an exact agreement if CO_2 is given 5 valences to the molecule; but if we take the number of valences usually assigned, namely 4 for the carbon and two each for each oxygen atom making 8 in all, the value of a would be $\mathbf{5.86 \times 10^{12}}$, which is too high. Carbon monoxide, oxygen gas and carbon dioxide all appear to be exceptional. For these gases to agree with the general law of the dependence of cohesion on the valence electrons it is necessary that fewer valences be in the molecule than is generally believed. I think it probable that CO_2 and N_2O really only have 5 valence electrons in their molecules and that in CO_2 and CO the carbon has lost three of the valence electrons it usually has. If there were 4 valence electrons in the molecule a would be computed as 3.69×10^{12} and this is obviously too low. CO_2 is therefore an exception to the law I am attempting to establish, unless it can be shown that it really has 5 valence electrons. The value VAN LAAR assigns to a is 3.56×10^{12} which again is seen to be far too low, 20 % lower than 4.29 which is the true value.

---

[1]) VAN DER WAALS: La Continuité des Etats Gazeux et Liquides. Paris, 1894. p. 118.

8. *Acetylene.* C_2H_2.

(*a*). $a = 2.03\,RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $P_c = 61.6$; $d_c = 0.2306$; $T_c = 308.5$; $V_c = 112.72$; $M = 26$. (Cardoso and Baume) . . . . . $\mathbf{a = 4.91 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\,P_cV_c^2$. . . . . $\mathbf{a = 5.16 \times 10^{12}}$

The mean of these two is 5.04×10^{12}. Van Laar gives the value of 4.35×10^{12} which is probably many per cent too low. If there are 10 valences in the molecule we compute by the formula $a = 1.1763 \times 10^{11}(M \times Val)^{2/3}$, which is the easiest way of making the computation from the gravitational attraction and the number of valences $\mathbf{4.79 \times 10^{12}}$ which is somewhat lower than either of these values but which agrees better with them than does van Laar's. If acetylene were acetylidene one carbon being bivalent, then there would be 8 valences and a still lower value would be found. If there were 11 valences to the molecule a would be computed as 5.11×10^{12} which agrees better with the found value. I have not been able to find the surface tension or latent heat of liquid acetylene to make the computation from them.

9. *Ethylene.* C_2H_4.

(*a*). $a = 2.03\,RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $T_c = 282.5$; $P_c = 50.65$ (Cardoso and Arni). $M = 28$; $V_c = 133.3$; $d_c = 0.21$ (Cailletet and Mathias). $S = 3.43$. . . . $\mathbf{a = 5.26 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\,P_cV_c^2$. . . . . $\mathbf{a = 5.93 \times 10^{12}}$

The mean of these two values is 5.59×10^{12}. It think it probable from the low value of S and the lack of agreement of these two computations that perhaps the critical density should be a little higher. Dewar gives 0.32 for d_c, but this is obviously too high since it makes S over 4. The value 5.59 agrees very well with that computed from the valences and molecular weight. Taking 12 valences to the molecule a is computed to be $\mathbf{5.69 \times 10^{12}}$. Van Laar's value is 4.44×10^{12}. This is again as usual too low being in fact over 20 % too low. I could not find data for the surface tension and latent heat calculations.

10. *Ethane.* C_2H_6.

(*a*). $a = 2.03\,RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $P_c = 48.85$; $T_c = 305.1$ (Cardoso and Bell). I could not find the critical density of ethane, so I have assumed S to be 3.55. This gives $V_c = 144.35$. With these values . . . . . $\mathbf{a = 6.19 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\,P_cV_c^2$. . . . . $\mathbf{a = 6.71 \times 10^{12}}$

From the molecular weight and valences, taking 14 valences to the molecule, a is computed to be $\mathbf{6.60 \times 10^{12}}$, which agrees very well with the value from the (b) formula. VAN LAAR gives for a the value 5.33×10^{12} again about 20 °/₀ below these values.

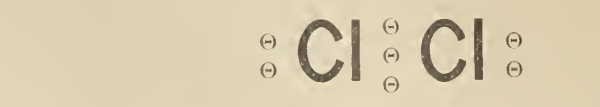
11. *Chlorine.* Cl_2.

(a). $a = 2.03\, RT_cV_c\, 1.03 - P_cV_c^2$. $T_c = 417$; $P_c = 76.10$; $d_c = 0.573$ (PELLATON); $V_c = 123.7$; $M = 70.90$ . . . . . $\mathbf{a = 7.28 \times 10^{12}}$

(b). $a = 6.5\, P_cV_c^2$ . . . . . $\mathbf{a = 7.66 \times 10^{12}}$

(c). $a = 3MN^{1/3}\, CT_c/d_o$. $C = 2.02$ (JOHNSON and McINTOSH). $S = 3.64$. d_o taken as Sd_c; $d_o = 2.086$ . . . . . $\mathbf{a = 7.27 \times 10^{12}}$

These values agree fairly well. The mean is $\mathbf{7.40 \times 10^{12}}$. If there are 6 valences in the molecule a computed from the valence and molecular weight would be $\mathbf{6.65 \times 10^{12}}$; if there are 7 valences, a would be **7.37**, which is practically the mean value found; with 8 valences a would be 8.06. Chlorine everywhere else is trivalent so that with 6 valences the computed value would be about 10 °/₀ below the found value. I do not believe the uncertainty in the found value is as great as this. It is not probable that the value is less than the surface tension computation of 7.27. If the truth of the dependence of cohesion on the valence electrons be admitted, then the computation shows 7 valences in the chlorine molecule. We might interpret this to mean that in a chlorine molecule one chlorine atom is oxidized to its maximum and has lost 7 negative electrons, while the other has its maximum number of 7. Of course actually it is to be presumed that they will be distributed between the two atoms. A similar result is found in bromine. The formula might be written as follows:



VAN LAAR's value for Cl_2 is 5.85. This is very much worse than the computation from the valences assuming each atom to be trivalent so that there are 6 valences to the molecule. It is about 20 °/₀ below what I believe to be the true value. If we compute a from VAN DER WAALS' equation by the usual method of $a = 27\, T_c^2/64 \times 273^2\, P_c$ we find the value 6.38×10^{12}, which is certainly nearer the true value than VAN LAAR's.

12. *Sulphur dioxide.* SO_2.

(*a*). $a = 2.03\,RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $P_c = 77.65$; $T_c = 4.30$ (Cardoso and Bell). $d_c = 0.52$ (Cailletet and Mathias). $V_c = 123.07$; $d_c = 0.513$ by Cardoso, 1912. $M = 64$. The computations have been made with the density 0.52. I did not find Cardoso's value until some time afterwards. . . . . $\mathbf{a = 7.48 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\,P_cV_c^2$. . . . . $\mathbf{a = 7.75 \times 10^{12}}$

(*c*). $a = \mu' M^2 \times 4.185 \times 10^7/3\,d_c^{2/3}$. $\mu' = 85.5$. $\mathbf{a = 7.56 \times 10^{12}}$

(*d*). $a = C'RT_cV_c$. $C' = 1.707$ . . . . . $\mathbf{a = 7.50 \times 10^{12}}$

(*e*). $a = 3\,sv^{2/3}\,MN^{1/3}\,T_c^{2/3}/(d - D)\,(T_c - T)^{2/3}$. $s = 33.29$ dynes at $-25°$ (Grumach by capillary waves); $sv^{2/3} = 407.05$ ergs. d at $-25° = 1.4968$ Lange); D is neglected. $T_c - T = 182$. . . . . $\mathbf{a = 7.84 \times 10^{12}}$

The mean of all these values is $\mathbf{7.62 \times 10^{12}}$. a computed from the weight and valences in the usual way with 8 valences in the molecule, 4 to sulphur and 2 to each oxygen atom, is $\mathbf{7.53 \times 10^{12}}$ which is in excellent agreement with the found values. The value computed by van Laar is 6.74 which is as usual too low, being in fact some 12 % too low. With the usual formula of $a = 27\,T_c^2/64 \times 273^2 P_c$ we compute 6.63. It is clear that the computation from the number of valences and molecular weight gives a correct value and the method of van Laar does not.

13. *Methyl formate.* $C_2H_4O_2$.

(*a*). $a = 2.03\,RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $T_c = 487$; $P_c = 45.030$ *mm.Hg.*; $d_c = .3489$; $V_c = 228.95$. $\mathbf{a = 11.86 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\,P_cV_c^2$ . . . . . $\mathbf{a = 11.51 \times 10^{12}}$

(*c*). $a = M^2\mu'\,4.185 \times 10^7/3\,d_c^{2/3}$. $\mu' = 119.86$ $M = 60$ . . . . . $\mathbf{a = 12.11 \times 10^{12}}$

(*d*). $a = C'RT_cV_c$. $C' = 1.706$ . . . . . $\mathbf{a = 11.28 \times 10^{12}}$

(*e*). $a = 3\,MN^{1/3}T_cC/d_o$. $C = 2.00$ (Morgan and Schwartz) $d_o = 1.337$. $N^{1/3}$ as before . $\mathbf{a = 11.10 \times 10^{12}}$

The mean of these results is **11.54**. Van Laar gives 11.91. The calculation from van der Waals' on the assumption that b and a are constant ($a = 0.2371$) gives 11.67. The correct value is evidently about 11.50. The calculation from the molecular weight and valence number with 16 valences, i. e. 8 C valences, 4 H valences and 4 O valences, gives $\mathbf{11.45 \times 10^{12}}$ in perfect agreement. Van Laar's value is here about 4 % too high.

14. *Bromine.* Br_2.

(a). $a = 3\,MN^{1/3}\,T_c\,C/d_o$. I have only a single determination for Br_2 made from the surface tension. C is equal to 2.115 (Morgan and Daghlian, corrected after Lohnstein method.) $T_c = 575$; P_c not given. $M = 159.84$. d_o, calculated from d at 0° C. of 3.187 by formula $d_o = (T_c/(T_c - T))^{1/3} d$, is 3.95..... $\mathbf{a = 12.49 \times 10^{12}}$

This value is to be regarded, however, as only an approximation, but it is probably not very far wrong. If we calculate a from the molecular weight and valences with 6 valences to the molecule we have $\mathbf{11.14 \times 10^{12}}$; if, like Cl_2, it has 7 valences, then the calculation would give **12.68** which is in good agreement with the foregoing computation from the surface tension. This would mean 7 valence electrons in the molecule.

15. *Carbon bisulphide.* CS_2.

(a). $a = 2.03\,RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $P_c = 72.87$; $T_c = 546$; $d_c = .3924$ (Cited from Goldhammer who gives it as Batelli's figure). $M = 76$. These make $S = 3.176$ which is clearly too low. There is evidently some error in the critical data and it is probably in the critical density which should be higher. However using these data $\mathbf{a = 14.56 \times 10^{12}}$

(b). $a = 6.5\,P_cV_c^2$..... $\mathbf{a = 18.00 \times 10^{12}}$

This great variation between the (a) and (b) formulae shows that the critical density is not high enough. If S were 3.6, which is probably nearer its true value, the first formula would have given 13.14 and the second 14.00.

(c). $a = \mu' M^2 4.185 \times 10^7/3\,d_c^{2/3}$. $\mu' = 82.4$; $d_c = .3924$..... $\mathbf{a = 12.35 \times 10^{12}}$

(d). $a = C\,RT_cV_c$. $C' = 1.516$..... $\mathbf{a = 13.33 \times 10^{12}}$

(e). $a = 3\,MN^{1/3}\,T_cC/d_o$. $d_o = 1.6776$ (Körber, Ann. Physik, 37) $C = 2.08$ (Ramsay and Aston)..... $\mathbf{a = 13.07 \times 10^{12}}$

In view of the uncertainty in the critical density, which enters into each of the formulae except the surface tension, we shall have to depend chiefly on the latter. The mean of all the determinations, except the very aberrant one of 18.00, is 13.33 and as this is not very different and a little larger than the surface tension value, the surface tension having been determined by the capillary rise method, it is probably close to the true value. At any rate it is

the best which can be done until the critical density is redetermined. The value calculated from gravitation, taking sulphur as hexavalent, so that there are 16 valences in the molecule, is $\mathbf{13.10 \times 10^{12}}$. This is in entire agreement with the mean of 13.33. I may say that sulphur, so far as I have been able to compute it, is always hexavalent except in SO_2. VAN LAAR's value for CS_2 is 12.14×10^{12} which is much lower than the true value. The value from VAN DER WAALS' equation of 0.02316 would be 11.40 which is still lower. From the latent heat of expansion of liquids LEWIS has calculated 10.23×10^{12}. I think there must be some error in this calculation, as usually LEWIS' method makes a a little high.

16. *Methyl acetate.* $C_3H_6O_2$.

(*a*). $a = 2.03\, RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $P_c = 35{,}212\, mm.Hg$; $T_c = 506.7$; $d_c = .3252$; $V_c = 227.6$.... $\mathbf{a = 15.80 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\, P_cV_c^2$ ..... $\mathbf{a = 16.47 \times 10^{12}}$

(*c*). $a = \mu' M^2 4.185 \times 10^7/3\, d_c^{2/3}$. $\mu' = 108.8$. $\mathbf{a = 16.73 \times 10^{12}}$

(*d*). $a = C'RT_cV_c$. $C' = 1.784$..... $\mathbf{a = 17.11 \times 10^{12}}$

(*e*). $a = 3\, MN^{1/3}\, T_cC/d_o$. $C = 2.11$ (MORGAN and SCHWARTZ corrected according to LOHNSTEIN) $M = 74$. d_o calculated in usual way $= 1.277$..... $\mathbf{a = 15.74 \times 10^{12}}$

These values show considerable variation, but the mean is $\mathbf{16.54 \times 10^{12}}$ which is the most probable value which can be given. With $M = 74$ and 22 valences, a is calculated by my formula to be $\mathbf{16.28 \times 10^{12}}$ which is in excellent agreement with the mean. VAN LAAR gives 15.77 which is fairly close to my value. The usual approximate value given is .03206 or 14.07×10^{12} when calculated into the other units. In this case, as in one or two others preceding, VAN LAAR's correction is in the right direction but not quite large enough.

17. *Ethyl formate.* $C_3H_6O_2$.

(*a*). $a = 2.03\, RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $T_c = 508.2$; $P_c = 35{,}535\ mm.Hg.$; $d_c = .3232$; $V_c = 228.96$.. $\mathbf{a = 16.60 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\, P_cV_c^2$..... $\mathbf{a = 16.11 \times 10^{12}}$

(*c*). $a = \mu' M^2/3\, d_c^{2/3}$, $\mu' = 107.14$..... $\mathbf{a = 17.38 \times 10^{12}}$

(*d*). $a = C'RT_cV_c$. $C' = 1.747$..... $\mathbf{a = 16.91 \times 10^{12}}$

(*e*). $a = 3\ MN^{1/3}\, T_cC/d_o$. $C = 2.01$; $M = 74$; $d_o = Sd_c = 1.258$..... $\mathbf{a = 15.27 \times 10^{12}}$

The mean of these values is $\mathbf{16.46 \times 10^{12}}$. The value calculated

from the valences and molecular weight is, as before, **16.28**, which is in good agreement.

18. *Ether.* $C_4H_{10}O$.

(a). $a = 2.03\,RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $P_c = 27.060$ *mm. Hg.*; $d_c = .2625$; $T_c = 466.8$; $V_c = 281.9$..... $\mathbf{a = 18.70 \times 10^{12}}$

According to Galitzine and Willis, P_c is 36.28. With this number..... $\mathbf{a = 19.21 \times 10^{12}}$

(b). $a = 6.5\,P_cV_c$ with Young's value of P_c..... $\mathbf{a = 18.61 \times 10^{12}}$

(c). $a = \mu' M^2/3d_c^{2/3}$. $\mu' = 103.8$; $M = 74$... $\mathbf{a = 19.31 \times 10^{12}}$

(d). $a = C''RT_cV_c$ $C'' = 1.724$..... $\mathbf{a = 18.87 \times 10^{12}}$

(e). $a = 3\,MN^{1/3}\,T_cC/d_o\,d_o = 1.0066$; $C = 2.16$ (Ramsay and Aston); 2.27 (Eötvös). $\mathbf{a = 18.82}$ (R. and A.); **19.78** (Eötvös).

(f). We have also, in this case, the determination from the Ramsay and Young equation of the pressure under constant volume of $\mathbf{18.52 \times 10^{12}}$.

There is considerable variation in these numbers. The mean of the two surface tension measurements is 19.30. Ramsay and Aston's determination was by the capillary rise method and is probably a little low; Eötvös was by a reflection method and may be a little high. The mean of all is **19.02**. I think this is probably not far from the true value. a computed from the molecular weight and valences, with 28 valences to the molecule, is $\mathbf{19.12 \times 10^{12}}$, which is in very good agreement with the mean value. Van Laar gives for ether the value corresponding to 17.40×10^{12}, which is obviously too low.

19. *n-Pentane.* C_5H_{12}.

(a). $a = 2.03\,RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $P_c = 25.100$ *mm Hg.*; $d_c = .2323$; $T_c = 470.2$; $V_c = 309.94$... $\mathbf{a = 20.68 \times 10^{12}}$

(b). $a = 6.5\,P_cV_c^2$..... $\mathbf{a = 20.90 \times 10^{12}}$

(c). $a = \mu' M^2/3\,d_c^{2/3}$. $\mu' = 110.0$. $M = 72$ ... $\mathbf{a = 21.05 \times 10^{12}}$

(d). $a = C'RT_cV_c$. $C'' = 1.707$..... $\mathbf{a = 20.69 \times 10^{12}}$

(e). $a = a'V^2$ in formula $P = b'T - a'$ $a' = 162{,}890$ *mm. Hg*..... $\mathbf{a = 20.88 \times 10^{12}}$

I could not find the surface tension of pentane.

These figures agree very well among themselves. The mean is $\mathbf{20.84 \times 10^{12}}$, which is probably very close to the true value. The calculation of a from the molecular weight and valences, with 32 valences in the molecule, gives the value **20.52**, which is in good agreement with these values. Van Laar gives the value equivalent to 19.12×10^{12} which is 8 % below 20.84.

20. *Iso-pentane.* C_5H_{12}.

(*a*). $a = 2.03\,RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $M = 72$; $P_c = 25.018\,mm\,Hg.$; $T_c = 460.8$; $d_c = .2343$; $V_c = 307.3$ $\mathbf{a = 20.06 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\,P_cV_c^2$ . . . . . $\mathbf{a = 20.17 \times 10^{12}}$

(*c*). $a = \mu' M^2/3\,d_c^{2\,3}$. $\mu' = 105.5$ . . . . . $\mathbf{a = 20.08 \times 10^{12}}$

(*d*). $a = C'RT_cV_c$. $C' = 1.688$ . . . . . $\mathbf{a = 19.88 \times 10^{12}}$

(*e*). $a = a'V^2(P = b'T - a')$ $a' = 162.890 mm.\,Hg.$ $\mathbf{a = 20.06 \times 10^{12}}$

The surface tension was not found. The mean value is $\mathbf{20.11 \times 10^{12}}$. If 20.84 is the value of a for *n*-pentane and 20.11 for iso-pentane, the mean of the two is **20.47**, which is almost exactly the value calculated from the gravitation (molecular weight) and number of valences of $\mathbf{20.52 \times 10^{12}}$; VAN LAAR finds for isopentane the value corresponding to 19.12 which is 5 % lower than 20.11.

21. *Benzene.* C_6H_6.

(*a*). $a = 2.03\,RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $P_c = 36.395\,mm.\,Hg.$; $T_c = 561.5$; $d_c = 3045$; $V_c = 256.1$ . . . . . $\mathbf{a = 20.10 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\,P_cV_c^2$ . . . . . $\mathbf{a = 20.15 \times 10^{12}}$

(*c*). $a = \mu' M^2/3\,d_c^{2\,3}$. $M = 78$; $\mu' = 109.23$. . . $\mathbf{a = 20.18 \times 10^{12}}$

(*c*). $a = C'RT_cV_c$. $C' = 1.690$ . . . . . $\mathbf{a = 19.17 \times 10^{12}}$

(*d*). $a = 3\,MN^{1/3}T_cC/d_o$. $C = 2.16$ (MORGAN and DAGHLIAN, corrected according to LOUNSTEIN) $d_o = 1.1464$ $\mathbf{a = 20.95 \times 10^{12}}$

The mean value is $\mathbf{20.23 \times 10^{12}}$. Evidently 19.17 is too low. If we omit this the value would be $\mathbf{20.49 \times 10^{12}}$, which is probably near the true value. The calculation from the molecular weight and number of valences by the usual formula: $a = 1.1763 \times 10^{11}\,(M \times Val.)^{2/3}$, with 30 valences in the molecule requires that a should be $\mathbf{20.73 \times 10^{12}}$, which is very close to the mean value when 19.17 is omitted. VAN LAAR's value is one corresponding to 18.72×10^{12} which is obviously too low.

22. *Fluor-Benzene.* C_6H_5Fl.

(*a*). $a = 2.03\,RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $P_c = 33.912\,mm.\,Hg.$; $d_c = .3541$; $T_c = 559.5$; $V_c = 271.1$ . . . . $\mathbf{a = 21.51 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\,P_cV_c^2$ . . . . . $\mathbf{a = 21.60 \times 10^{12}}$

(*c*). $a = \mu' M^2/3\,d_c^{2/3}$. $M = 96$; $\mu' = 85.65$ . . . $\mathbf{a = 22.00 \times 10^{12}}$

(*d*). $a = C\,RT_cV_c$. $C' = 1.711$ . . . . . $\mathbf{a = 24.18 \times 10^{12}}$

(*e*). $a = 3\,MN^{1/3}T_cC/d_o$ $d_o = 1.3392$ when calculated as usual from the formula $d_o = (d - D)T_c^{1/3}/(T_c - T)^{1/3}$. C, calculated from MORGAN and DAGHLIAN (Journ. Amer. Chem. Soc., 33, p. 680, 1911) without correction according to LOHNSTEIN makes $C = 2.160$. From this $\mathbf{a = 21.99 \times 10^{12}}$. If we substitute the proper C for benzene of RICHARDS and COOMBS in place of that of RAMSAY and ASTON used by MORGAN and DAGHLIAN, C would be 2.181 and this would make $a = \mathbf{22.21 \times 10^{12}}$.

There is in the case of fluor-benzene a wide variation in the values of a calculated by these different methods, from which I believe we may infer that probably the critical data need some revision. It would appear as if the critical density were a little greater than it ought to be. The first two methods give a concordant result of a mean of 21.55. The latent heat formulae give a mean value of 23.09. From the surface tension determinations of MORGAN and DAGHLIAN by the drop weight method using their results uncorrected by the LOHNSTEIN method we have 21.99, which by the substitution of RICHARDS and COOMBS' value for C in place of that of RAMSAY and ASTON for Benzene, is raised to 22.21. This value cannot, I think, be very far in error. It is possibly still a little low as the LOHNSTEIN correction generally has the effect of raising the surface tension values.

The value calculated for a from the molecular weight and valences, taking 30 valences to the molecule, fluorine being considered to be monovalent, is **23.81**. This is about 7 % higher than the surface tension value and higher than any other determination except that from the latent heat by DIETERICI's formula. It is 6—7 % above the mean value. One would expect that fluorine would be more than monovalent, but it may be mentioned that Pascal by his method of measuring the valences also found fluorine to be monovalent in fluorbenzene. The agreement, therefore, in the case of fluorbenzene is not so good as in many other substances, but whether this is due to the fact that there are fewer valences in the molecule than we usually assume to be there, or whether it means that the critical data need some revision, I do not know. In any case the determination from the valences and molecular weight is only 6—7 % different from the mean and lies between the extremes of the values found. On the other hand VAN LAAR's value, which corresponds to 17.90×10^{12}, is certainly 20 % in error.

23. *Ethyl acetate.* $C_4H_8O_2$.

(*a*). $a = 2.03\ RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $T_c = 523.1$; $d_c = .3077$; $P_c = 28.877\ mm.Hg$; $V_c = 286$..... $\mathbf{a = 21.38 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\ P_cV_c^2$..... $\mathbf{a = 20.47 \times 10^{12}}$

(*c*). $a = \mu' M^2/3\,d_c^{2/3}$. $M = 88.06$; $\mu' = 98.0$.. $\mathbf{a = 23.23 \times 10^{12}}$

(*d*). $a = C'RT_cV_c$. $C' = 1.812$..... $\mathbf{a = 22.56 \times 10^{12}}$

(*e*). $a = 3\ MN^{1/3}\,T_c\,C/d_o$. $C = 2.16$ (Morgan and Schwartz, Lohnstein) $d_o = 1.2161$ $\mathbf{a = 20.78 \times 10^{12}}$

Ramsay and Aston found for C at $-89.2°$ the value 2.24. This would give for a the value $\mathbf{21.54 \times 10^{12}}$.

These results do not agree very well, but their mean is $\mathbf{21.68 \times 10^{12}}$. a computed from the valences and molecular weight, with 28 valences in the molecule, namely 16 for carbon, 4 for the oxygen and 8 for the hydrogen, is $\mathbf{21.16 \times 10^{12}}$. This is in excellent agreement with the mean value. Van Laar gives for a, when computed to dynes in gram mol quantities, the value 20.49.

24. *Propyl formate.* $C_4H_8O_2$.

(*a*). $a = 2.03\ RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $T_c = 537.85$; $P_c = 30.460$ $mm.Hg.$; $d_c = .3093$; $V_c = 284.5$... $\mathbf{a = 21.79 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\ P_cV_c^2$..... $\mathbf{a = 21.37 \times 10^{12}}$

(*c*). $a = \mu' M^2/3\,d_c^{2/3}$. $M = 88$; $\mu' = 98.79$... $\mathbf{a = 23.33 \times 10^{12}}$

(*d*). $a = C'RT_cV_c$. $C' = 1.774$..... $\mathbf{a = 22.57 \times 10^{12}}$

(*e*). $a = 3\ MN^{1/3}\,T_cC/d_o$. $C = 2.11$ (Ramsay and Aston). $d_o = 1.176$..... $\mathbf{a = 21.56 \times 10^{12}}$

The latent heat values are much higher than the other three and bring the average to 22.12×10^{12}. The value required from the valences and weight is **21.46** if there are 28 valences in the molecule. This agrees well with the three values other than the latent heat values, but is considerably lower than the latter.

25. *Methyl propionate.* $C_4H_8O_2$.

(*a*). $a = 2.03\ RT_cV_c/1.03 - P_cV_c$. $P_c = 30.032$; $d_c = .3124$; $M = 88.06$; $T_c = 530.4$; $V_c = 281.9$ $\mathbf{a = 21.32 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\ P_cV_c^2$..... $\mathbf{a = 20.68 \times 10^{12}}$

(*c*). $a = \mu' M^2/3\,d_c^{2/3}$. $\mu' = 99.02$..... $\mathbf{a = 23.27 \times 10^{12}}$

(*d*). $a = C'RT_cV_c$. $C' = 1.803$..... $\mathbf{a = 22.42 \times 10^{12}}$

(*e*). $a = 3\ MN^{1/3}\,T_cC/d_o$. $d_o = 1.225$ $C = 2.18$ (Morgan and Schwartz corrected after Lohnstein method)..... $\mathbf{a = 21.11 \times 10^{12}}$

The latent heat values are again higher than the others. The mean is **21.93**. This is in fair agreement with the value **21.46** required by the computation from the weight and valences, taking as in the other cases 28 valences. VAN LAAR's value for $a^{1/2}$ is .213, from which a is computed as 19.91×10^{12}. This again is decidedly below the true value.

26. *Carbon tetrachloride.* CCl_4.

(a). $a = 2.03\, RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $T_c = 556.15$; $P_c = 34.181$; $d_c = .5576$; $V_c = 275.8$. $M = 153.8$ $\mathbf{a = 21.68 \times 10^{12}}$

(b). $a = 6.5\, P_cV_c^2$ . . . . . $\mathbf{a = 22.51 \times 10^{12}}$

(c). $a = \mu' M^2/3\, d_c^{2/3}$. $\mu' = 14.29$ $M = 153.8$. $\mathbf{a = 21.57 \times 10^{12}}$

(d). $a = C'RT_cV_c$. $C' = 1.667$ . . . . . $\mathbf{a = 21.27 \times 10^{12}}$

(e). $a = 3\, sv^{2/3} MN^{1/3} T_c^{2/3}/(d - D)\,(T_c - T)^{2/3}$. WALDEN and SWINNE at 21° $s = 25.85$ dynes; $sv^{2/3} = 544.91$ ergs. $T_c - T = 262.15°$. $d = 1.5920$; D disregarded. $\mathbf{a = 22.06 \times 10^{12}}$

The mean of these values for a is $\mathbf{21.82 \times 10^{12}}$. This is in good agreement with the computation from the molecular weight and number of valences, counting chlorine as trivalent so that there are 16 valences in the molecule, of $\mathbf{21.44 \times 10^{12}}$. VAN LAAR's value corresponds to 19.69×10^{12}. LEWIS calculates from the latent heat of expansion of the liquid a still higher value of 22.64×10^{12}.

27. *Hexamethylene.* C_6H_{12}.

(a). $a = 2.03\, RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $P_c = 30.260\ mm.\ Hg$; $T_c = 553$; $d_c = .2735$; $V_c = 307.1$ . . . . . $\mathbf{a = 21.01 \times 10^{12}}$

(b). $a = 6.5\, P_cV_c^2$ . . . . . $\mathbf{a = 21.73 \times 10^{12}}$

(c). $a = \mu' M^2/3\, d_c^{2/3}$. $M = 84$; $\mu' = 103.63$. . $\mathbf{a = 21.21 \times 10^{12}}$

(d). $a = C'RT_cV_c$. $C' = 1.694$ . . . . . $\mathbf{a = 23.91 \times 10^{12}}$

(e). Surface tension not found.

These values agree pretty well. The mean is $\mathbf{21.23 \times 10^{12}}$. This is in excellent agreement with the value calculated from the molecular weight and number of valences of $\mathbf{21.30 \times 10^{12}}$, there being 36 valences in the molecule.

VAN LAAR's value is, for a $\frac{1}{2}$, .211, which corresponds to 19.53×10^{12}, a value which is much too low. His computed value is still lower.

28. *n-Hexane.* C_6H_{14}.

(*a*). $a = 2.03\ RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $T_c = 507.8$; $P_c = 22.510$ *mm. Hg.*; $d_c = .2344$; $V_c = 366.9\ldots$ $\mathbf{a = 26.50 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\ P_cV_c^2 \ldots\ldots$ $\mathbf{a = 26.26 \times 10^{12}}$

(*c*). $a = \mu' M^2/3\ d_c^{2/3}$. $\mu' = 102.8$ $M = 86\ldots$ $\mathbf{a = 27.90 \times 10^{12}}$

(*d*). $a = C\ RT_cV_c$. $C' = 1.752\ldots$ $\mathbf{a = 27.15 \times 10^{12}}$

(*e*). $a = 3\ MN^{1/3}T_cC/d_o$. $C = 2.11$ by Dutoit and Friedrich. $d_o = .9071\ldots$ $\mathbf{a = 25.79 \times 10^{12}}$

$C = 2.27$ according to Morgan and Chazal corrected by Lohnstein. This would give for a the value $\mathbf{27.75 \times 10^{12}}$.

The mean of all these values is $\mathbf{26.91 \times 10^{12}}$. The value of a computed from the molecular weight and valences with 38 valences is $\mathbf{25.90 \times 10^{12}}$. This is about 4 % lower than the mean. The value computed by van Laar is 24.92×10^{12} which is about 9 % below the mean, and is certainly too low.

29. *Di-isopropyl.* C_6H_{14}.

(*a*). $a = 2.03\ RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $T_c = 500.35$; $P_c = 23.360$ *mm. Hg.*; $d_c = 0.2411$; $V_c = 356.7\ldots$ $\mathbf{a = 25.30 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\ P_cV_c^2 \ldots\ldots$ $\mathbf{a = 25.70 \times 10^{12}}$

(*c*). $a = \mu' M^2/3\ d_c^{2/3}$. $M = 86$. $\mu' = 97.53\ldots$ $\mathbf{a = 25.96 \times 10^{12}}$

(*d*). $a = C\ RT_cV_c$. $C'' = 1.725\ldots$ $\mathbf{a = 25.61 \times 10^{12}}$

(*e*). Surface tension not found.

These values are very consistent. The mean is $\mathbf{25.64 \times 10^{12}}$ which is very close to the value $\mathbf{25.90 \times 10^{12}}$ calculated from the molecular weight and valences. The mean of the values of a for *n*-hexane and di-isopropyl is **26.27** which is only about 1.4 % higher than the computation from the gravitation and valences. Van Laar computes the same value as for hexane, namely 24.92 which is only about 3 % lower than the mean value for di-isopropyl.

30. *Chlor-benzene.* C_6H_5Cl.

(*a*). $a = 2.03\ RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $T_c = 632.2$; $P_c = 33.926$; $d_c = .3654$; $V_c = 307.8$. $M = 112.45$ $\mathbf{a = 27.62 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\ P_cV_c \ldots\ldots$ $\mathbf{a = 27.81 \times 10^{12}}$

(*c*). $a = \mu' M^2/3\ d_c^{2/3}$. $\mu' = 81.42\ldots$ $\mathbf{a = 28.10 \times 10^{12}}$

(*d*). $a = C'RT_cV_c$. $C' = 1.714\ldots$ $\mathbf{a = 27.71 \times 10^{12}}$

(*e*). $a = 3\ sv^{2/3}MN^{1/3}T_c^{2/3}/(d - D)(T_c - T)^{2/3}$. At 52.2° Walden and Swinne give for $sv^{2/3}$ the value 631.93. $T_c - T = 307.0°$; D is neglected. $d = 1.0713\ldots$ $\mathbf{a = 27.26 \times 10^{12}}$

These numbers agree very well among themselves and they leave little doubt that the true value for a is close to the mean value of $\mathbf{27.71 \times 10^{12}}$. The computation from the molecular weight and valences, taking chlorine as trivalent so that the total number of valences is 32, is almost exactly this number, namely $\mathbf{27.62 \times 10^{12}}$. A better agreement could not be wished. VAN LAAR's value is as usual wrong, in this case being too high. He gives what corresponds to 29.38×10^{12} as the value of a.

31. *Methyl butyrate.* $C_5H_{10}O_2$.

(*a*). $a = 2.03\, RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $T_c = 554.2$; $P_c = 26.055$ *mm. Hg.*; $d_c = .3002$; $V_c = 339.7\ldots$ $\mathbf{a = 26.86 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\, P_cV_c^2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\mathbf{a = 26.07 \times 10^{12}}$

(*c*). $a = \mu' M^2/3\, d_c^{2/3}$. $\mu' = 91.31$. $M = 102\ldots$ $\mathbf{a = 29.56 \times 10^{12}}$

(*d*). $a = C'RT_cV_c$. $C' = 1.824\ldots\ldots\ldots$ $\mathbf{a = 28.57 \times 10^{12}}$

(*e*). $a = 3\, MN^{1/3}T_cC/d_o$. $d_o = 1.1820$. $C = 2.22$ (MORGAN and SCHWARTZ.)$\ldots\ldots\ldots$ $\mathbf{a = 26.98 \times 10^{12}}$

The mean of these rather irregular values is $\mathbf{27.61 \times 10^{12}}$. The value calculated from the molecular weight and the number of valences, taking the number of valences as 34, is $\mathbf{26.96 \times 10^{12}}$, which is almost exactly the value calculated from the surface tension, but which is between 2 and 3 % lower than the mean. Considering the variation in the values as calculated, the agreement must be considered as satisfactory. VAN LAAR gives the value of 0.245 for $a^{1/2}$ which computed into the other units and for a gram mol makes 26.34×10^{12} in this case not very much below the real value.

32. *Methyl iso-butyrate.* $C_5H_{10}O_2$.

(*a*). $a = 2.03\, RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $T_c = 540.55$; $P_c = 25.740$; $d_c = .3012$; $V_c = 338.6\ldots\ldots\ldots$ $\mathbf{a = 26.07 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\, P_cV_c^2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\mathbf{a = 25.58 \times 10^{12}}$

(*c*). $a = \mu' M^2/3\, d_c^{2/3}$. $\mu' = 87.78$ $M = 102\ldots$ $\mathbf{a = 28.68 \times 10^{12}}$

(*d*). $a = C'RT_cV_c$. $C' = 1.814\ldots\ldots\ldots$ $\mathbf{a = 27.62 \times 10^{12}}$

(*e*). $a = 3\, MN^{1/3}T_cC/d_o$. $d_o = 1.1780$; $C = 2.25$ between 100° and 132.5° (RAMSAY and ASTON)$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\mathbf{a = 26.76 \times 10^{12}}$

Again the latent heat formulae give a high value and do not agree very well among themselves. The mean value of all is $\mathbf{26.94 \times 10^{12}}$. This is almost exactly the value required by the computation from the molecular weight and 34 valences of $\mathbf{26.96 \times 10^{12}}$. VAN LAAR's computed value is very close to this, being also 26.34.

33. *Propyl acetate.* $C_5H_{10}O_2$.

(*a*). $a = 2.03\,RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $T_c = 549.2$; $P_c = 25.227$ *mm.Hg.*; $d_c = .2957$; $V_c = 345.0\ldots$ $\mathbf{a = 27.06 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\,P_cV_c^2\ldots$ $\mathbf{a = 26.01 \times 10^{12}}$

(*c*). $a = \mu' M^2/3d_c^{2/3}$. $\mu' = 93.12\ldots$ $\mathbf{a = 30.45 \times 10^{12}}$

(*d*). $a = C'RT_cV_c$. $C' = 1.850\ldots$ $\mathbf{a = 29.16 \times 10^{12}}$

(*e*). $a = 3\,MN^{/3}T_cC/d_o$. $d_o = 1.179$; $C = 2.23$ (Morgan and Schwartz). $M = 102\ldots$ $\mathbf{a = 26.93 \times 10^{12}}$

Here again the latent heat values are much higher than the others and do not agree very well with each other. Omitting the very high value of 30.45 the mean is $\mathbf{27.29 \times 10^{12}}$. The computation from the molecular weight and valences requires the same value as for methyl butyrate, namely $\mathbf{26.96 \times 10^{12}}$ which is only about 1 % lower than the mean and almost exactly the value calculated from the surface tension. Van Laar's value is 26.27×10^{12} which is not so far as usual from the truth.

34. *Ethyl propionate.* $C_5H_{10}O_2$.

(*a*). $a = 2.03\,RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $T_c = 545.5$; $P_c = 25.217$ *mm.Hg.*; $d_c = .2965$; $V_c = 344.0\ldots$ $\mathbf{a = 26.80 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\,P_cV_c^2\ldots$ $\mathbf{a = 25.86 \times 10^{12}}$

(*c*). $a = \mu' M^2/3\,d_c^{2/3}$. $\mu' = 91.59$; $M = 102\ldots$ $\mathbf{a = 29.22 \times 10^{12}}$

(*d*). $a = C'RT_cV_c$. $C' = 1.837\ldots$ $\mathbf{a = 28.69 \times 10^{12}}$

(*e*). $a = 3\,MN^{1/3}T_cC/d_o$. $d_o = 1.163$; $C = 2.23$ (Morgan and Schwartz corrected according to Lohnstein and Harkins)\ldots. $\mathbf{a = 27.12 \times 10^{12}}$

The mean of these values is $\mathbf{27.51 \times 10^{12}}$. The value required by the molecular weight and valences, is $\mathbf{26.96 \times 10^{12}}$. This is about 2 % below the mean.

35. *Stannic chloride.* $SnCl_4$.

(*a*). $a = 2.03\,RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $P_c = 28.079$ *mm.Hg.*; $T_c = 591.7$; $d_c = .7419$; $V_c = 351$. $\mathbf{a = 29.18 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\,P_cV_c^2\ldots$ $\mathbf{a = 30.07 \times 10^{12}}$

(*c*). $a = \mu' M^2/3d_c^{2/3}$. $\mu' = 26.51$; $M = 260.8$ $\mathbf{a = 30.69 \times 10^{12}}$

(*d*). $a = C'RT_cV_c$. $C' = 1.741\ldots$ $\mathbf{a = 30.12 \times 10^{12}}$

(*e*). $a = 3MN^{1/3}T_cC/d_o$. $C = 2.20$ (Kistiakowsky); $d_o = 2.826\ldots$ $\mathbf{a = 30.50 \times 10^{12}}$

The mean of these values is $\mathbf{30.17 \times 10^{12}}$. The value of a computed from the molecular weight and number of valences, chlorine

being trivalent so that the number of valences in the molecule is 16, is $\mathbf{30.47 \times 10^{12}}$, a figure in very good agreement with the others found. VAN LAAR gives a value corresponding to 27.19×10^{12} which is again, as so often, too low.

36. *Brom-benzene.* $C_6 H_5 Br.$

(*a*). $a = 2.03\, RT_c V_c / 1.03 - P_c V_c^2$. $T_c = 670$; $P_c = 33.912$ *mm. Hg.*; $d_c = .4853$; $V_c = 323.4$ .... $\mathbf{a = 30.80 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\, P_c V_c^2$ ..... $\mathbf{a = 31.16 \times 10^{12}}$

(*c*). $a = \mu' M^2 / 3 d_c^{2/3}$. $\mu' = 55.37$ $M = 156.96$ $\mathbf{a = 30.81 \times 10^{12}}$

(*d*). $a = C' RT_c V_c$. $C' = 1.691$ ..... $\mathbf{a = 30.48 \times 10^{12}}$

(*e*). $a = 3\, M N^{1/3} T_c C / d_o$. This calculation was made from the uncorrected result of MORGAN and DAGHLIAN by the drop weight method. At 59.7° $sv^{2/3}$ was found to be 704.4 ergs. d was 1.4438. D was neglected. $T_c - T$ was 337.3. This gives $\mathbf{a = 30.72 \times 10^{12}}$

The mean of these various values is $\mathbf{30.77 \times 10^{12}}$. The value required by the computation from the molecular weight and the valences, taking bromine as monovalent, so that there are 30 valences in the molecule, is $\mathbf{33.05 \times 10^{12}}$. The value 30.77 would correspond to only 27 valences in the molecule. This appears then to be a real exception to the rule correlating cohesion with gravitation and valence number. It may be, however, that it is only an apparent exception. The critical data of brom-benzene had to be determined by extrapolation over a long distance. They are not, therefore, very reliable. In the case of the surface tension we have to use the uncorrected measurements. The effect of the LONNSTEIN correction is generally to raise the surface tension measurement, but it is not likely to raise it 7—8 %. The value 31.46 found from the $6.5\, P_c V_c^2$ formula is only between 3—4 % too low. It is quite possible that correction of the critical data would bring it into line. VAN LAAR's value for $a^{1/2}$ is .242, which gives for a the value 25.70×10^{12}. This as will be seen is very much below the mean value of 30.72.

37. *n-Heptane.* $C_7 H_{16}$.

(*a*). $a = 2.03\, RT_c V_c / 1.03 - P_c V_c^2$. $T_c = 539.85$; $P_c = 20.430$ *mm. Hg.*; $d_c = .2341$; $V_c = 427.17$... $\mathbf{a = 32.84 \times 10^{12}}$

(*b*). $a = 6.5\, P_c V_c^2$ ..... $\mathbf{a = 32.30 \times 10^{12}}$

(*c*). $a = \mu' M^2 / 3 d_c^{2/3}$. $\mu' = 98.64$; $M = 100$. $\mathbf{a = 36.23 \times 10^{12}}$

(*d*). $a = C' RT_c V_c$. $C' = 1.814$..... $\mathbf{a = 34.80 \times 10^{12}}$

(*e*). Could not find surface tension of heptane.

As usual the latent heat values give higher results than the others. The mean of all is $\mathbf{34.01 \times 10^{12}}$. The required value of a, if there are 44 valences in the molecule and the molecular weight 100, is $\mathbf{31.58 \times 10^{12}}$, which is a little more than 2 % lower than the lowest of the preceding values and about 7 % lower than the mean. I was unable to find, in a somewhat hurried search, any determination of the surface tension of heptane. Van Laar's value corresponds to 27.64×10^{12} which is about 20 % below the mean found value.

38. *Iodo-benzene.* $C_6 H_5 I$.

(a). $a = 2.03\ RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $T_c = 721$; $P_c = 33.912$ *mm.Hg.*; $d_c = .5814$; $V_c = 350.6\ldots$ $\mathbf{a = 35.88 \times 10^{12}}$

(b). $a = 6.5\ P_cV_c^2$ . . . . . $\mathbf{a = 36.97 \times 10^{12}}$

(c). $a = \mu' M^2/3\ d_c^{2/3}$. $M = 203.85$; $\mu' = 43.37$ $\mathbf{a = 36.09 \times 10^{12}}$

(d). $a = C'RT_cV_c$. $C' = 1.687$ . . . . . $\mathbf{a = 35.18 \times 10^{12}}$

(e). $a = MN^{1/3} sv^{2/3} T_c^{2/3}/(d - D)(T_c - T)^{2/3}$. From Morgan and Daghlian at 59.6° $wv^{2/3} = 925.73$ from which $sv^{2/3}$ is calculated as 822.7 ergs. $d = 1.7691$; D is neglected; $T_c - T$ is 388.4; without correction according to Lohnstein this makes $\mathbf{a = 36.49 \times 10^{12}}$. In making this calculation by Morgan's method it is assumed that the constant for benzene is 2.121. If in place of this we use the value of Richards and Coombs it would raise the value of a about 1 %.

The mean value of all is $\mathbf{36.18 \times 10^{12}}$. This mean value is between 9 and 10 % below that which we calculate for a from the molecular weight and the number of valences, assuming that iodine is monovalent, so that there are 30 valences in the molecule. The value required with 30 valences is $\mathbf{39.31 \times 10^{12}}$. With the ($b$) formula, namely where $a = 6.5\ P_cV_c^2$, and from the surface tension the found value is about 6—7 % too low. The value 36.49×10^{12} would be the required value if there were 27 valences in the molecule in place of 30. Iodobenzene is just about as divergent from the theoretical as is brombenzene. Here, as in brombenzene, the critical data are uncertain to some extent as they had to be determined by extrapolation over a long interval, over 100 degrees, in fact. Decomposition occurred on heating the iodobenzene. It will be noticed that we have to use the critical temperature even in calculating the value of a from the surface tension and the other critical data in the other cases. So I do not feel that we can

consider these substances to be real exceptions to the valence rule, particularly as chlor-benzene and benzene agree so perfectly. Fluor-benzene, however, was also somewhat below the calculated value. It may be that these substances are real exceptions, or that they have fewer valences by one or two than we think in their molecules, but the excellent agreement of chlorbenzene makes me believe that probably the critical data are not quite right.

Van Laar's value for iodobenzene is hopelessly wrong. He gives for $\sqrt{a}$ the value .261; which recalculated for dynes and gram mol quantities makes 29.89×10^{12}. This is between 15 and 20 % too low.

39. *n-Octane.* C_8H_{18}.

(a). $a = 2.03\ RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$. $T_c = 569.2$; $P_c = 18.730$; $d_c = .2327$; $V_c = 489.9$; $M = 114..$ **a = 39.72 × 10¹²**

(b). $a = 6.5\ P_cV_c^2$ ..... **a = 37.91 × 10¹²**

(c). $a = \mu' M^2/3\, d_c^{2/3}$. $\mu' = 92.78$ ..... **a = 41.46 × 10¹²**

(d). $a = C'RT_cV_c$. $C' = 1.858$ ..... **a = 43.10 × 10¹²**

(e). $a = sv^{2/3}\ 3\ MN^{1/3}\ T_c^{2/3}/(d - D)\,(T_c - T)^{2/3}$.

The capillary constant according to Schiff at 110° is 4.23. From this the surface tension, s is 25.99 dynes. d is .6260. $sv^{2/3}$ is 834.9 ergs. D is disregarded. d_o is .9119. From this we compute ..... **a = 40.50 × 10¹²**

I also computed a from Ramsay and Aston's surface tension data at 15.5°, this gave for a the value ..... **a = 40.67 × 10¹²**

There is a great variation, a variation of fully 15 %, between the highest and lowest values. The latent heat formulae both give a high value. Mills has suggested that there is some decomposition at the high temperatures, the critical temperature being nearly 300° C. The mean value is **41.11**, or if we omit the two high values of the latent heat we have **39.39**. The value of a computed from the molecular weight and number of valences by the usual formula, taking 50 valences to the molecule, is **37.54 × 10¹²**. This is close to the value computed from the second of the above formulae, but nearly 8 % lower than the surface tension which is usually a minimum value. It will be noticed in a moment that the isomeric substance, diisobutyl, is much nearer the theoretical value. It hardly seems probable to me that the true value is much below

39, and it may be higher, in spite of the lower value obtained by the second formula. It may be possible that there are some extra valences, and in support of this it may be said that octane behaves chemically somewhat as if it were an unsaturated compound. On the other hand it has also occurred to me that possibly the valences are not strictly additive. Here we have at least 50 valence electrons in the molecule. Now it may be that several valences together might produce a little greater effect, electro-magnetic, or cohesive, than an equal number taken separately. However that will have to be determined by further work. The only indication of this possibility is that there is apparently a slight tendency for the computation from the molecular weight and valences to be a little low as the number of the valences in the molecule increases. But whether this is a real tendency or only apparent due to the empirical latent heat formulae giving less good results in the more complex substances, or to slight decomposition as the critical temperature gets high, cannot at present be said. We have then as a general result in octane to record that the determination of a by the formula $6.5 P_c V_c^2$ gives a result in agreement with that calculated from the molecular weight and number of valences, but that the other methods yield results, one of which is 15 % above the required value. Van Laar's value for $a^{1/2}$ is .276, which calculated in the units I have used is 33.42×10^{12}. This, as will be seen, is very much lower than any of the values found.

40. *Diisobutyl.* $C_8 H_{18}$.

(*a*). $a = 2.03\ RT_c V_c / 1.03 - P_c V_c^2$. $T_c = 549.8$; $d_c = .2366$; $P_c = 18{,}660\ mm.Hg.$; $V_c = 481.8$ . . **a = 37.65 × 10¹²**

(*b*). $a = 6.5 P_c V_c^2$ . . . . . **a = 37.51 × 10¹²**

(*c*). $a = \mu' M^2 / 3 d_c^{2/3}$. $M = 114$; $\mu' = 87.72$ . . **a = 41.56 × 10¹²**

(*d*). $a = C' R T_c V_c$. $C' = 1.813$ . . . . . **a = 39.95 × 10¹²**

(*e*). $a = sv^{2/3}\ 3\ MN^{1/3}\ T_c / d_o\ (T_c - T)$. At 107.4°
$s = 11.82$ dynes (Schiff). $sv^{2/3} = 383.3$ ergs. $d = .6166$; $d_o = Sd_c = .9014$;
$T_c - T = 169.4$ . . . . . **a = 39.95 × 10¹²**

The mean value of all is **39.33 × 10¹²**. The required value computed from the molecular weight and the number of valences, there being 50 valences in the molecule, is **37.51 × 10¹²**. This is exactly the value calculated from the second of the above formulae but is between 4 and 5 % lower than the mean. The agreement between the found values and that computed from the weight and

valences is much better than with the isomeric octane. The results from the latent heat are not so divergent here. It may be noted that the diisobutyl upon which these determinations were made, does not appear to have been a pure substance, or else it slightly decomposed on standing as Young and Mills have remarked. The critical data, however, were probably not seriously affected by this circumstance. Van Laar gives for diisobutyl no value, but one computes from his formula the value $a^{1/2} = .288$; which translated into the other units would be 36.39×10^{12} which it will be noticed is only 3 or 4 % below that required by the computation from the molecular weight and valences. It is, however, more divergent than mine from the values actually found.

41. *Diisoamyl.* $C_{10}H_{22}$.

(a). $a = 3\,MN^{1/3}\,sv^{2/3}\,T_c^{2/3}/(d - D)\,(T_c - T)^{1/3}$. $T_c = 675$. $T_c - T = 402$. d at $0°C. = .7413$. $s = 23.072$ dynes. $sv^{2/3} = 767.3$ ergs. D disregarded. $M = 142.18$. Surface tension by Morgan and Owen..... ... $\mathbf{a = 52.79 \times 10^{12}}$

I could not find the critical pressure and density of this substance. This value of a is not very different from that calculated from the molecular weight of 142.2 and the valences, there being 62 valences in the molecule. The value of a required by the latter computation is $\mathbf{50.20 \times 10^{12}}$, which is only some 4 % below the value computed from the surface tension. This is the most complex substance I have calculated. This gives a total range of valences from 2 in hydrogen to 62 in diisoamyl, and a range of molecular weights from 2 to 260.8 in stannic chloride. I think this is a sufficient diversity of substances and a sufficient range to establish the general applicability of the law relating cohesion to the valences and molecular weight. I have, however, calculated from the surface tension three other substances which are also complex.

42. *Mesitylene.* C_9H_{12}.

(a). $a = 3\,sv^{2/3}\,MN^{1/3}\,T_c/(T_c - T)\,d_o$. From Morgan and Thomssen, $wv^{2/3}$ at 23.5° is 812.61. This gives for $sv^{2/3}$ the value 722.2. ergs. T_c is calculated to be 640.7°. M is 120.1. d_1 calculated by the formula: $d = .8746 - .00081t$ is .8556. d_o by the same formula is calculated to be 1.0958. $T_c - T$ is 344.2. This gives for a the value ..... $\mathbf{a = 37.41 \times 10^{12}}$

The value calculated from the molecular weight and with 48 valences is $\mathbf{37.82 \times 10^{12}}$ in agreement with the value computed from the surface tension.

43 *Cymene.* $C_{10} H_{14}$.

(*a*). $a = 3\, sv^{2/3} MN^{1/3} T_c/(T_c - T) d_o$.

$M = 134.1$. T_c calculated is 651.6°. $d = .862 - .0008044\,(t - 11.9°)\, wv^{2,3}$ (Morgan and Thomssen) is 785.20 which is equal to 697.8 ergs $= sv^{2/3}$. $T_c - T$ is 319.15. $d = .8235$. t is 59.45°. d_o calculated from the above formula is 1.0912. With these values $\mathbf{a = 44.44 \times 10^{12}}$

a calculated from the molecular weight, 134.1, and the valences, 54, is $\mathbf{44.03 \times 10^{12}}$, which is in agreement with the value calculated from the surface tension. There is no indication in these last two calculations but what the valences are strictly additive in their effect.

44. *Diphenylmethane.* $C_{13} H_{12}$.

The past several agreements have been so good, between the values calculated from the surface tension and those from the molecular weights and valence numbers, that one might think that one would always have so good an agreement. I have appended, therefore, a computation of diphenylmethane, in order to include all the computations I have made and to show that one cannot always expect so good an agreement. Here we have 64 valences and a molecular weight of 168. This would lead us to calculate by the formula $a = 1.1763 \times 10^{11} (168 \times 64)^{2/3}$ the value $\mathbf{a = 57.33 \times 10^{12}}$. From the surface tension, however, we calculate a much higher value. At 59° Morgan and Thomssen give $wv^{2/3} = 1171.26$. From this we calculate $sv^{2/3} = 1041$ ergs. t_c is computed by Morgan and Thomssen to be 497° which would make $T_c = 770$. $d = 1.0126 - 0.0007914(t - 11) = .9746$. $d_o = 1.2365$. Hence by the formula given in cymene we compute: $\mathbf{a = 63.16 \times 10^{12}}$, which is about 9 % above the other value. However as both T_c and d_o have been extrapolated from a great distance, no great reliance can be placed upon them. I may say that Dutoit and Friederich found the constant C of Eötvös to be 2.25 in this substance between 108 and 210°. This would give the value $\mathbf{59.80 \times 10^{12}}$ for a which is only 3—4 % higher than the computation from M and the valences.

It is of interest to compare the values of a in these more complex substances, computed in the usual way from the critical temp-

erature and pressure, with the values computed from the molecular weight and valences. I have accordingly taken the values of a given by GUYE and MALLET (Comptes rendus, 133, 1901, p. 1288) for a few of these compounds and computed them in dynes, in place of atmospheres, and compared them with the values computed from the valences and weight. The result was as follows:

Substance	a, GUYE and MALLET, in dynes.	a computed from valence and weight.	Mol. $Wt.$ $\times$ Valences.
Naphthalene, $C_{10}H_8$	40.31×10^{12}	39.40×10^{12}	128×48
Durene, $C_{10}H_{14}$	45.96×10^{12}	44.03×10^{12}	142×54
Diphenyl, $C_{12}H_{10}$	53.51×10^{12}	50.64×10^{12}	154×58
Diphenyl methane, $C_{13}H_{12}$	59.03×10^{12}	57.33×10^{12}	168×64

The agreement is on the whole very good, but it will be noticed that the computation of a by the formula $a = 27\ T_c'^2/64 \times 273^2\ P_c$ gives in these complex substances a value of a somewhat higher than that computed from the valences and weight, while with the simple substances it gives a value somewhat lower.

III. DISCUSSION OF RESULTS.

The foregoing calculations are all brought together for easy comparison in Table 2.

TABLE 2. Values of a for gram mol quantities in dynes multiplied by 10^{-12}.

(1)	(2) $a = 2.03RT_cV_c/1.03 - P_cV_c^2$	(3) $a = 6.5P_cV_c^2$	(4) $a = \mu' M^2/3d_c^{2/3}$	(5) $a = CRT_cV_c$	(6) $a = 3MN^{1/3}T_cC/d_0$	(7) $a = a'V_c^2$ $(P = b'T - a')$	(8) $a = N^2(m^2k \times \frac{Val}{M})^{2/3}$	(9) a according to Van Laar.	(10) Molecular weight.	(11) No. of valences per molecule used in computing a.
Hydrogen		.319			.254		.298	.126	2	2
Nitrogen	1.58	1.79			1.58		1.72	1.33	28	2
Oxygen	1.60	1.81			1.56		1.88	1.33	32	2
Carbon monoxide	1.70	1.85			1.81		1.72	1.41	28	2
Methane	2.63	2.92					2.99	2.21	16	8
Nitrous oxide	4.21	4.90	4.32	4.18	4.02		4.29	3.56	44	5
Carbon dioxide	4.29	4.37	4.32	4.27	4.08	4.11	4.29	3.56	44	5
Acetylene	4.91	5.16					4.79	4.35	26	10
Ethylene	5.26	5.93					5.69	4.44	28	12
Ethane	6.19	6.71					6.60	5.33	30	14
Chlorine	7.28	7.66			7.27		7.37	5.85	70.9	7
Sulphur dioxide	7.48	7.75	7.56	7.50	7.84		7.53	6.74	64	8
Methyl formate	11.86	11.54	12.14	11.88	11.10		11.45	11.91	60	16
Bromine					12.49		12.68		159.9	7
Carbon bisulphide	14.56	18.00	12.35	13.33	13.07		13.40	12.14	76	16
Methyl acetate	16.47	15.80	16.73	17.11	15.74		16.28	15.77	74	22
Ethyl formate	16.60	16.14	17.38	16.91	15.27		16.28		74	22
Ether	18.70	18.64	19.34	18.87	19.30	18.52	19.12	17.40	74	28
n-Pentane	20.68	20.90	21.05	20.69		20.88	20.52	19.12	72	32
Iso-pentane	20.06	20.47	20.08	19.88		20.06	20.52	19.12	72	32
Benzene	20.40	20.69	20.48	19.17	20.95		20.73	18.72	78	30
Fluor benzene	21.51	21.60	22.00	24.18	22.21		23.81	17.90	96	30
Ethyl acetate	21.38	20.47	23.23	22.56	20.78		21.46	20.49	88	28
Propyl formate	21.79	21.37	23.33	22.57	21.96		21.46	20.49	88	28
Methyl propionate	21.32	20.68	23.27	22.42	21.11		21.46	19.91	88	28
Carbon tetra-chloride	21.68	22.54	21.57	21.27	22.06		21.44	19.69	153.8	16
Hexamethylene	24.04	24.73	24.21	23.94			24.30	16.18	84	36
n-Hexane	26.50	26.26	27.90	27.15	26.77		25.90	24.93	86	38
Diisopropyl	25.30	25.70	25.96	25.61			25.90	24.92	86	38
Chlor-benzene	27.62	27.84	28.10	27.74	27.26		27.62	29.38	112.45	32
Methyl butyrate	26.86	26.07	29.56	28.57	26.98		26.97	26.34	102	34
Methyl iso-butyrate	26.07	25.58	28.68	27.62	26.76		26.97	26.34	102	34
Propyl acetate	27.06	26.01	30.45	29.16	26.93		26.97	26.29	102	34
Ethyl propionate	26.80	25.86	29.22	28.69	27.12		26.97	26.34	102	34
Stannic chloride	29.48	30.07	30.69	30.12	30.50		30.40	27.19	260.8	16
Brom benzene	30.80	31.46	30.81	30.48	30.72		33.05	25.70	156.96	30
n-Heptane	32.84	32.30	36.23	34.80			31.58	27.64	100	44
Iodo benzene	35.88	36.97	36.09	35.48	36.49		39.34	29.89	203.85	30
n-Octane	39.72	38.95	44.46	43.10	40.50		37.54	36.39	114	50
Diisobutyl	37.65	37.54	41.56	39.95	39.95		37.54	33.42	114	50
Diisoamyl					52.79		50.20		142.2	62
Mesitylene					37.41		37.82		120.1	48
Cymene					44.44		44.03		134.1	54
Diphenyl methane					63.16		57.33		168	64

TABLE 2*a*.

Values of a in atmospheres and for a volume containing the same number of molecules as 1 *c.c.* of a gas at 0° *C.* and 760 *mm.* pressure. The values in this table are obtained from those in Column 8, Table 2, by dividing the latter by 4.923×10^{14}. One atmosphere being 1.0132×10^{6} ergs for a *c.c.*, and the number of molecules in a gram mol being 6.062×10^{23} and in 1 *c.c.* of a gas under standard conditions 2.75×10^{19}, $(6.062 \times 10^{23}/2.75 \times 10^{19})^2 \times 1.0132 \times 10^{6}$ equals 4.923×10^{14}.

Hydrogen	.0006053	Fluor benzene	.04836
Nitrogen	.003494	Ethyl acetate	.04359
Oxygen	.003819	Propyl formate	.04359
Carbon monoxide	.003494	Methyl propionate	.04359
Methane	.006073	Carbon tetrachloride	.04355
Nitrous oxide	.008714	Hexamethylene	.04936
Carbon dioxide	.008714	n-Hexane	.05261
Acetylene	.009730	Diisopropyl	.05261
Ethylene	.01156	Chlor benzene	.05610
Ethane	.01341	Methyl butyrate	.05478
Chlorine	.01497	Methyl isobutyrate	.05478
Sulfur dioxide	.01530	Propyl acetate	.05478
Methyl formate	.02325	Ethyl propionate	.05478
Bromine	.02576	Stannic chloride	.06175
Carbon bisulfide	.02722	n-Heptane	.06415
Methyl acetate	.03307	Brom benzene	.06713
Ethyl formate	.03307	n-Octane	.07625
Ether	.03884	Diisobutyl	.07625
n-Pentane	.04168	Iodo benzene	.07991
i-Pentane	.04168	Mesitylene	.07682
Benzene	.04211	Cymene	.08944
		Diisoamyl	.10197
		Diphenyl methane	.11645

Having these values all before us we may compare them in Table 2 and thus see whether the values computed from the molecular weight and the number of valences by the formula: $a = N^2(m^2k \times Val/M)^{2.3}$ do, or do not, agree closely with the values found from the surface tension, from the internal latent heat of vaporization and from the critical data on the basis that $a = 6.5\ P_c V_c^2$. The values computed from the gravitation and valences are in column 8 and right alongside of them in column

9 are the values given by VAN LAAR. A comparison between column 3, where a is computed by the formula 6.5 $P_c V_c^2$, with the gravitational formula in column 8 shows the remarkable agreement between them. There can be no doubt that if these values of a are correct then the law is sustained that cohesion is a function of the molecular weight and the number of valences.

In order to make this remarkable agreement at once apparent to the eye I have plotted in Figure 1 the logarithm of the product of the molecular weight by the number of valences on the abscissa against the logarithm of a as given in column 3 of Table 2 as ordinate. I have included also for the sake of completeness two or three substances in which a is determined solely from the surface tension. Such substances are bromine, diisoamyl, cymene and mesitylene; in all other cases except CS_2 the values of a are those in column 3. The actual values of the logarithms used in the plot are given in table 3. I have used in these computations of log $(M \times Val)$ always the usual valence numbers. Carbon is always tetravalent except in CO, hydrogen univalent, chlorine trivalent, fluorine monovalent, sulphur tetravalent in SO_2 but hexavalent elsewhere, oxygen always divalent, tin tetravalent, and nitrogen monovalent. It will be seen at a glance that with the exception of CO, O_2, CO_2 and N_2O the values fall right along a straight line from hydrogen to diisoamyl. There has been no juggling with the valences at all. The valences used have been those ascribed to the elements by chemists. Figure 1 should be perfectly convincing to all that the law I have discovered showing the dependence of cohesion on gravitation and the valence electrons is a true law. I have included in this list not only all the normal substances in which the critical data have been accurately determined but even some substances of which the critical data are still somewhat uncertain.

TABLE 3. [1]) (p. 60)

Values of Log a and Log $(M \times Valence)$ used in plotting figure 1.

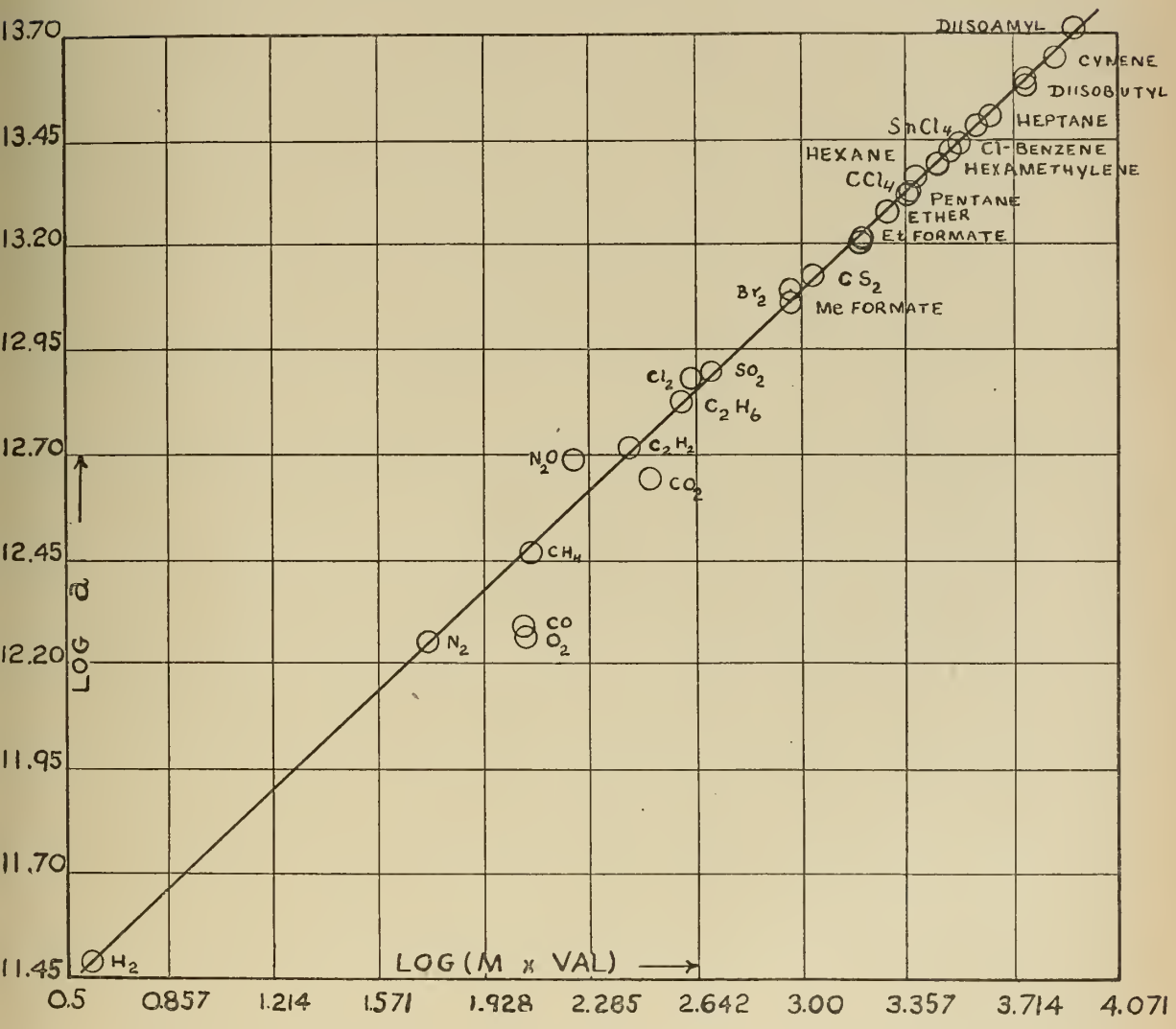
	Log a	(*Log M* × *Val*)	*Val* × *M*
H_2	11.486	0.6021	2 × 2
N_2	12.253	1.7482	2 × 28
O_2	12.258	2.1072	4 × 32
CO	12.267	2.04922	4 × 28
CH_4	12.465	2.1072	8 × 16
N_2O	12.690	2.2455	4 × 44
CO_2	12.640	2.5465	8 × 44

	$Log\ a$	$Log(M \times Val)$	$Val \times M$
C_2H_2	12.713	2.4150	10×26
C_2H_6	12.827	2.6232	14×30
Cl_2	12.884	2.6290	6×70.9
SO_2	12.889	2.7093	8×64
Methyl formate	13.062	2.9823	16×60
Br_2	13.096	2.9819	6×159.84
CS_2	13.125	3.0849	16×76
Ethyl formate	13.208	3.2116	22×74
Methyl acetate	13.199	3.2116	22×74
Ether	13.270	3.3164	28×74
n-Pentane	13.320	3.3625	32×72
i-Pentane	13.311	3.3625	32×72
Benzene	13.3158	3.3692	30×78
Propyl formate	13.330	3.3916	28×88
Ethyl acetate	13.311	3.3916	28×88
Methyl propionate	13.316	3.3916	28×88
CCl_4	13.353	3.3911	16×153.8
Hexamethylene	13.393	3.4806	36×84
n-Hexane	13.419	3.5143	38×86
Diisopropyl	13.410	3.5143	38×86
Chlor-benzene	13.445	3.5561	32×112.45
Methyl butyrate	13.416	3.5401	34×102
Methyl isobutyrate	13.408	3.5401	34×102
Propyl acetate	13.415	3.5401	34×102
Ethyl propionate	13.413	3.5401	34×102
$Sn\ Cl_4$	13.478	3.6204	16×260.8
n-Heptane	13.509	3.6434	44×100
n-Octane	13.590	3.7559	50×114
Diisobutyl	13.574	3.7559	50×114
Mesitylene	13.573	3.7608	48×120.1
Cymene	13.648	3.8598	54×134.1
Diisoamyl	13.722	3.9452	62×142.18

The agreements between the values computed from the valences and molecular weight with those computed from the critical pres-

[1]) In CS_2 I have used for a the mean value of 13.33×10^{12} in place of a as computed by the formula: $a = 6.5\ P_c V_c^2$ since the latter value is plainly erroneous owing to the critical density being wrong. Br_2, mesitylene, cymene and diisoamyl have a determined from the surface tension. Oxygen is taken everywhere as bivalent, hence the exceptional position of some of the oxygen compounds. Cl and Br are everywhere computed as trivalent. Carbon and tin are tetravalent, except C in CO, where it is divalent. S is hexavalent except in SO_2 where it is tetravalent.

sure and volume and in other ways are too numerous to be a matter of chance. It is certainly not a matter of chance that if we compute the value of a of benzene from the gravitational mass of the molecules and the number of valences we arrive at the figure 20.73×10^{12} dynes for a gram mol, whereas the various ways of determining this value directly from the surface tension, from the latent



heat and in other ways show the same results, i. e., 20.40, 20.69, 20.48, 19.17, 20.95×10^{12}. Or if we compute the cohesion of a different kind of substance, ethyl ether, from the gravitation and valences we find it to be 19.12×10^{12} dynes; whereas from the latent heat, from the surface tension, from the critical data, from the behavior of the gas when heated under constant volume we

compute closely similar figures, namely, 18.70, 18.64, 19.20, 19.34, 18.87, 19.30, and 18.52. Or if we take an aliphatic compound, one of the best investigated, *n*-pentane, from the gravitation and valences we compute 20.52×10^{12} dynes, and in these other ways of determining a we have: 20.68, 20.90, 21.05, 20.69, 20.88. This close agreement is not chance. In the case of an ester, a compound of still another type, methyl propionate, from the gravitation and valences we compute the value of a of 21.46×10^{12} dynes. And in these other ways of direct determination we have: 21.32, 20.68, 23.27, 22.42, 21,11. We can pass even to a totally different type of compound, an inorganic compound having entirely different chemical elements in it, stannic chloride. From the valence and molecular weight we compute a as 30.40×10^{12} dynes; and from the direct and indirect measurements we have the values: 29.48, 30.07, 30.69, 30.12, 30.59. Does anyone think that it is chance which brings such an agreement to pass? Van Laar reproaches me for having taken chlorine to be trivalent, but the trivalence of chlorine is better established than any other valence number and this valence alone will agree with the computation in all chlorine compounds of which the critical data are accurately known. The independent investigation of the valence of chlorine by a totally different method by Pascal shows chlorine to be trivalent. The refractivity of chlorine compounds also shows that chlorine is more than univalent. So in choosing three valences for the number for chlorine I have chosen the best substantiated valence number. Even in so complex a substance as diisoamyl with 62 valences in its molecule and a molecular weight of 142 we compute for a the value of 50.20×10^{12}; and from the surface tension it is found to be 52.79×10^{12}. The product of the molecular weight and the number of valences in this substance is 8.804. Now let us turn from this most complex of the substances examined and go straightaway to the lightest and simplest substance, elemental hydrogen. Its critical temperature is 32° Abs, whereas that of diisoamyl is computed to be 675°. The product of the molecular weight and the number of valences is 4, as contrasted with 8.804. Now if we calculate a of hydrogen from the valence and molecular weight we have 2.98×10^{11} dynes. From the surface tension of liquid hydrogen we compute its cohesion to be as a minimum 2.54×10^{11} dynes and from the critical data by the formula $a = 6.5\ P_c V_c^2$ it is found to be 3.19×10^{11}. Chance does not produce results like this. It is true that here and there there are deviations from the expected values amounting to as much as 8 to 9 % in the most

extreme cases. But it is significant that excepting the oxygen compounds of doubtful valence, these deviations occur in those compounds, namely iodobenzene and brombenzene, in which the critical data are most uncertain. We have the best agreement in benzene, isopentane and pentane, substances of which all the data are most accurately known.

It is clear that the law of the dependence of the mass factor of cohesion on the gravitational mass and valence is substantiated. The factor a of VAN DER WAALS' equation may be computed from the molecular weight and number of valences, if these be known, as accurately, or indeed more accurately, than in any other way. Cohesional attraction is thus shown to be gravitational attraction intensified in the immediate vicinity of the molecules by the action of the valence electrons. That cohesion should be of this nature is very probable. It is certain that a has in it the factor N^2, N being the number of molecules in the mass of liquid or gas for which a is given. This follows from the fact that a varies as the square of the volume of the fluid taken and hence as the square of the number of molecules. That the molecular weight is one of the factors in a has been believed by most students, for a advances steadily in homologous compounds as the molecular weight advances. It is the number of valences which is the other factor, the importance of which I have discovered, altho SUTHERLAND, before me, suggested that possibly the valences were of importance; but he could not prove it and he afterwards thought that the gravitational mass played no part in cohesion. In this he was wrong.

It seems to me that the facts that I have adduced suffice to prove the truth of the law I have formulated. I trust that the additional evidence which I have thus been able to adduce as to the true value of a may remove all doubts as to the validity of a law which so simply and so naturally correlates such puzzling phenomena and which enables us to predict the cohesion of any substance if only we know the molecular weight and the number of valences. Or if we know the cohesion which enables us to determine the number of valences in the molecule, a matter of the greatest importance in the study of the laws of refraction in the study of magnetism and of chemical constitution. It has besides the very great advantage of enabling us to calculate a with at least approximate certainty, so that we can proceed to calculate b, the other constant which expresses the volume of the molecules, and we may discover how it varies with temperature and pressure. When

this is known many obscure physical and chemical phenomena will perhaps become as clear as day.

On the other hand nearly all of VAN LAAR's values in column 9 of Table 2 are seen to be hopelessly wrong. Upon these values he has sought to base such far-reaching conclusions as that sometimes atoms contribute to the cohesion and sometimes they do not, as for example carbon in methane and tin in stannic chloride, which are not supposed by VAN LAAR to play any part in the cohesion. This conclusion is thus shown to be entirely unfounded. Sometimes it is true his values of a happen to come somewhere near the real value of a, but usually they are 10—20 % low and in some cases, as in hydrogen, they are at the very least 100 % too low. There can be no doubt, I think, that the method which VAN LAAR has used is not a reliable method. Most of the arbitrary values he has assumed for the various elements by the addition of which he hopes to compute the square root of a are, therefore, erroneous.

We may now consider very briefly the seeming exceptions. They are, as is usual with exceptions, exceedingly interesting and illuminating. Of the 44 substances three, or possibly four, have been found to be, apparently at any rate, marked exceptions to the rule. These substances are O_2, CO, N_2O and CO_2. We might add to them SO_2, since this would be exceptional if the sulphur is hexavalent, as we have found it to be in other compounds. It is not exceptional, however, if we consider the sulphur here to be tetravalent, as most chemists believe it to be. In all of these compounds we find fewer valences than we had expected. To make them conform to the law we have to take in O_2 two, instead of four valences; in CO, two in place of four; in CO_2 five in place of eight; and in SO_2 eight instead of ten, if the sulphur is hexavalent. It will be noticed, further, that these substances are all very simple substances containing only two or three atoms to the molecule. This might raise the suspicion that our methods of calculating a in these simple substances were erroneous and that a should really be larger; but that this suspicion is unwarranted is shown by the fact that the equally simple substances hydrogen and nitrogen are correctly determined by these same methods, and also by the fact that in SO_2, at any rate, the calculation from the surface tension and latent heat shows that the values of a ascribed to SO_2 are correct. There can be no doubt that in CO_2 the value of a is correctly determined. Their exceptional position is not due, therefore, to any mistake in the value of a. It will be noticed also that at least two of these substances, namely SO_2 and CO_2, are what may be called

„polar" substances in the way suggested by G. N. Lewis, in distinction from such compounds as methane or the hydrocarbons. It is highly significant that all of these exceptional substances contain oxygen. It is true that in the case of the esters, in which we also have one carbon atom in union with oxygen, these substances do not appear to be exceptional. That is: in the case of the esters we have about the correct value of a if we consider each carbon atom to be tetravalent and the oxygen divalent. But even in these cases if we examine column 3 in which a is determined by the formula $a = 6.5\ P_c V_c^2$ we see that in general the values in column 3 are somewhat lower than those of column 8 which have been computed on the basis of the larger number of valences. The difference is not very marked, and the other methods of computing a in the esters bring the average value up to the expected value. I formerly thought that the esters had more valences than they should have and that this was due to the oxygen being in one atom tetravalent. This conclusion was based on the earlier computations of the value of a and it is not borne out by this work if we take the mean value of a as determined in all the methods. Since the mean values of a agree with the expectation on the basis that all the carbons are tetravalent and the oxygen bivalent we cannot consider them exceptional. At the same time I do not feel sure that when we have a more accurate method of determining a from the latent heat of vaporization, it will not be found that there are two valences less in the molecule than is indicated in table 2. With this digression we may now return to O_2, CO and CO_2. It may be stated in the first place that there is no theoretical objection to these compounds having fewer valences than chemists have usually ascribed to them. There is no other way than this, so far as I know, of accurately determining how many valences there are in their molecules. So they may have the number of valences, that is the number of valence electrons, which will make them no longer exceptional. There is no evidence against this assumption. In O_2 the oxygen may indeed be monovalent; in CO both the carbon and oxygen may be monovalent; there is no evidence that they are not. In fact in ozone, in peroxides and in oxygen we may be dealing with monovalent oxygen. As I have suggested elsewhere it may be for this very reason that oxygen in these substances, or at least in some of them, has different magnetic properties than oxygen in other compounds. It is well known that elemental oxygen is strongly magnetic, whereas compounds containing oxygen, with the possible exception of CO, are not magnetic but diamagnetic.

There is, however, another consideration which may throw some light on the cause of the possibly exceptional position of these substances, and why they have in their molecules fewer valences than we expected to find there. These valences are probably nothing else than the valence electrons. This to be sure introduces a somewhat different idea of valence than that with which I started. At first I believed, or assumed, that the chemical attractions between the atoms were electrostatic in nature. The valences thus became both positive and negative. Accordingly I supposed that the number of negative valence electrons in the molecule would be only one half the number of total valences found by this method. It has, however, since been suggested by Ramsay and G. N. Lewis, and I believe still earlier by Sutherland, that the atomic attractions were electromagnetic and not electrostatic. If this is the case then the valence numbers we have found, or which we are using in our computations, are in reality only the negative valence electrons. When we find 16 valences in a molecule, it means that there are 16 valence electrons in that molecule. This view, it seems to me, has a great deal in its favor and we may provisionally adopt it. At any rate it helps us very much in understanding the exceptional position of these few compounds. Perhaps those compounds which are called „polar" have in them atoms which have lost some of their negative electrons. CO_2 and SO_2 at least would be such compounds and to a less degree perhaps CO might also be called polar. Now it is the essence of an oxidation, according to the modern view, that there is an exchange of electrons, the substance or atom oxidized losing one or more electrons and the substance oxidizing acquiring them. If we examine the exceptions from this point of view they are of great interest. We find that the oxidizing substance, O_2, has in its molecule only two negative electrons, whereas each atom should have two and the molecule is, therefore, entitled to four. It is two negative electrons short, and it would be for this very reason that it has oxidizing powers. In CO and CO_2 the carbon has been oxidized. That means that the carbon atom has lost some of its usual negative valence electrons. It usually has four such electrons, but in the act of oxidation it has lost some of them and the oxygen has gained them. Thus in CO the carbon atom has been completely stripped of its valence electrons and there are only two in the molecule, namely those attached to the oxygen. Or at any rate there are but two such electrons left. Possibly the oxygen and carbon share them between them. Of course we cannot say just where they are in the molecule. It it possible that the carbon has

one and the oxygen one. Perhaps it is for the reason that the oxygen here as in O_2 has but one negative electron that it unites with the hemoglobin of the blood to form the carbon monoxide hemoglobin, just as oxygen unites to make oxy-hemoglobin, which has so similar a spectrum. In CO_2 we find by this method an agreement between the values of a computed from the surface tension and in other ways with that computed from the weight and valences, if we assume 5 valences that is 5 electrons in the molecule. In this case as in CO we would assume that one valence electron remained attached to the carbon atom and that each oxygen atom was reduced, that is each had its full complement of two negative valence electrons. Carbon dioxide does not unite with hemoglobin in the way oxygen does or as CO does. The oxygen is evidently in a different state; moreover, altho we have here two atoms of oxygen, just as we do in O_2, yet this compound is diamagnetic and not at all paramagnetic as is O_2. This again would suggest a difference in the state of the oxygen in the two cases. Similarly in SO_2 we have also too few negative electrons if the sulphur be considered hexavalent. It is an interesting fact that in all other compounds of sulphur for which I have computed the cohesion, with the single possible exception of carbonyl sulphide, sulphur is found to be hexavalent. This is in entire agreement with the suggestion of Lewis that the maximum valence of sulphur is six, and there are six valence electrons. In SO_2 we find only 8 valence electrons. Evidently when the sulphur was oxidized by the oxygen the latter relieved it of 2 valence electrons. It is in this way, perhaps, that polar compounds are produced. Here we would have sulphur with 4 valence electrons, and each of the oxygen atoms with 2.

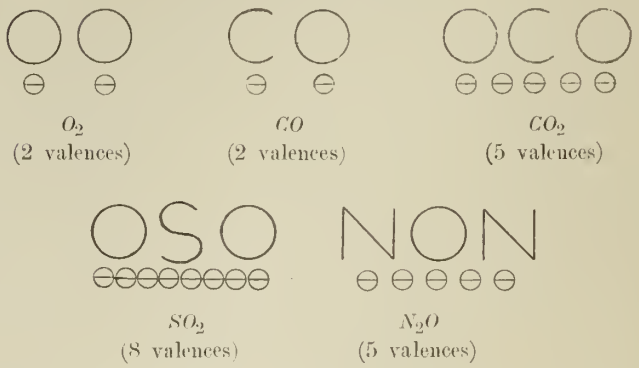
We may represent these compounds graphically in the following way arranging the electrons somewhat in the manner suggested by Lewis (see Figure 2, next page).

I have put the electrons representing the valences beneath the atoms, instead of between them as Lewis does, to suggest that the atoms may place themselves in such a way that the valence electrons are rotating in parallel orbits and do not necessarily lie between the atoms.

A further study of other so-called polar compounds will be of great interest and will perhaps show the truth or erroneous character of these suggestions, but this will have to be deferred until a shall have been determined for other such substances. It will however be remarked that there is no evidence of any such oxida-

tion on the carbon atom either in CS_2 or in CCl_4, where it might perhaps have been anticipated.

Figure 2. Representing the molecular structure of O_2, CO, CO_2, SO_2 and N_2O with the number of valence electrons called for by the cohesion.



IV. THE RELATION OF a TO THE OTHER CONSTANT b.

The rather simple and interesting relationship appears to hold, if we compare the values of a computed from the gravitation and valences with the value $V_c - b_c$, that Log $a = K'((V_c - b_c)/b_c)$. That is: the ratio of the space between the molecules to the space within the molecules at the critical temperature is proportional to the logarithm of a. For the constant K' I have taken the value of 13.3 when using logarithms to the base 10. This is the value of Log a when $b_c = V_c/2$. With this formula and the values of a given in column 8 of table 2 we find the following values of b_c:

	b_c
Hydrogen	$V_c/1.86$
Nitrogen	$V_c/1.92$
Benzene	$V_c/2.00$
Carbon tetra-chloride	$V_c/2.00$
Methyl butyrate	$V_c/2.01$
Octane	$V_c/2.02$
Diisoamyl	$V_c/2.03$

The other substances of the table will come in between the extreme values. It will be seen that, if this formula is correct, b_c is, indeed, for nearly all substances quite close to the value of $V_c/2$. The formula is, however, purely empirical. It seems a not improbable relationship and is certainly very nearly true, I think, if it is not exactly true.

There is one point in this relationship, however, which deserves

a brief consideration, since it is diametrically opposed to common assumptions. It will be noticed that in hydrogen and nitrogen b_c, by my figures for a and by the foregoing rule, makes a larger fraction of V_c than in such substances as octane. In one case we have $V_c/1.86$ and in the other $V_c/2.02$. Now all are agreed, I think, that this fraction will approach $V_c/3$ more closely the more incompressible and unchangeable the molecule is. And it will deviate from this in the opposite direction the more compressible the molecule. If the molecules were incompressible and constant in volume then it should be, if a is constant, that $b_c = V_c/3$.

Now it has been generally assumed that the simpler molecules, such as nitrogen and hydrogen, will be less compressible and more constant in volume than the more complex molecules such as octane. For example VAN LAAR, while assuming that in most substances b_c is about $V_c/2.1$ as in benzene, believes that in hydrogen $b_c = V_c/2.5$. I believe the view is erroneous that hydrogen and oxygen have less compressible molecules than octane. I believe that just the reverse of this is true and that these simple gases will deviate more, rather than less than octane from the condition which should apply to rigid molecules. It must be remembered that in these gases the cohesion is very low, so that the pressure on the molecules is greatly less than on a molecule of octane. For example at the critical temperature of hydrogen the external pressure being, say, 13 atmospheres, the total internal and external pressure will be 7.5 times this, or 97.5 atmospheres. In octane the external pressure is 25 atmospheres and the total internal and external is 187.5 atmospheres. Moreover the pressure within the molecule due to the atomic cohesion must be very much greater in octane than in hydrogen. It is with molecules just as it is with liquids, the greater the internal pressures the less compressible are they. The atoms must hence be closer together in octane than in hydrogen and the molecule of hydrogen will be actually more compressible, not less compressible than octane. Consequently octane will behave more like a gas with incompressible molecules than will hydrogen. Possibly the monatomic gases will be exceptional to the rule that the lower the cohesion the more compressible the molecules. One would anticipate that they would be exceptional unless the atoms are more compressible than we think.

The following calculation shows, I think, that the molecule of hydrogen is in reality far more compressible than that of octane, and not less compressible.

This is shown by a comparison of the volume occupied by hy-

drogen atoms when they are in the state of molecular hydrogen and when they are in the condition of hydrogen in a molecule of octane. It may be shown that in the latter case they occupy less volume and are hence less compressible than in the former. The density of elemental hydrogen at absolute zero may be calculated from the density of .0763 at 14.83° Abs. by the formula $d = d_o\,((T_c - T)/T_c)^{1/3}$ to be 0.094. From this the volume of a gram mol, or V_o, will be 21.29 c.c. In octane there are 18 hydrogen atoms or 9 gram mols in a gram mol of octane. The density of octane at absolute zero is computed to be 0.9119, computed in the same manner as the density of hydrogen. From this the volume of a gram mol of octane at absolute zero is 125.0 c.c. If the hydrogen had the same volume in octane as it has in elemental hydrogen it would occupy the space of 9×21.29 c.c. or 191.6 c.c. But the whole volume occupied by the 8 carbon atoms and the 18 of hydrogen is only 125.0 c.c. or in other words only 0.65 of the space which would be occupied by the hydrogen alone if the atoms were not greatly compressed. Since the hydrogen atoms in octane are so compressed that they occupy only half the space that they do in hydrogen itself at absolute zero, it follows that they must be under tremendous intramolecular pressure in the case of octane, a pressure enormously greater than in the case of elemental hydrogen. As they are already greatly compressed in octane it follows that a molecule of octane must be far less compressible than one of hydrogen, not more compressible. The value for a gives us, therefore, a value of b_c for hydrogen which indicates that the molecule of hydrogen deviates more from that of a gas with incompressible molecules than does octane, and this appears to me to be in entire consonance with what is shown to be the case, namely that the atoms of hydrogen do occupy less space in the molecule of octane than in hydrogen and must therefore be more rigid in the latter case.

A similar relationship will be found, I do not doubt, for oxygen and nitrogen gas, the atoms in these gases also occupying more space than they do in molecules having far greater cohesions. It seems to me not impossible that the large amount of heat liberated by hydrogen and oxygen when they unite to form water represents the heat liberated when this compression of the atoms occurs. Their volume is reduced and heat is liberated just as happens when a gas is condensed. How great this compression is in the case of water may be seen from the fact that a gram mol of water occupies at the temperature of 4° C. the space of only 18 c.c. and at absolute zero its volume is presumably less than this. There is a gram mol of hydro-

gen in a gram mol of water and yet hydrogen alone at absolute zero would occupy the space of 21.3 c.c. One half a gram mol of O_2 at absolute zero occupies the space of 10.12 c.c. So the total volume of a gram mol of water if the atoms occupied the same space as they do in the elements at absolute zero should be 31.4 c.c. It is actually only a little more than half this amount. One can imagine the enormous cohesional pressure which must exist within the molecule to condense the atoms in this fashion. It is no wonder that the formation of water from the elements liberates such an amount of heat, for this heat assuredly expresses the amount of this compression or reduction of volume.

V. THE CONSTANCY OF a.

It has been a matter of dispute whether the constant a was constant, or whether it was a function of the temperature. VAN DER WAALS has strongly supported the idea that it is constant and independent of temperature, except in so far as temperature may influence association, or what he terms, "quasi-association". On the other hand CLAUSIUS and others have considered a to be a function of temperature and have modified the characteristic equation on this basis. VAN LAAR has recently expressed the opinion that a is not constant but varies with the temperature. His computations of the additivity of a are based on a_c that is a at the critical temperature. The foregoing pages contain, I believe, the indubitable proof of the correctness of VAN DER WAALS' view that a is constant. This proof is furnished by the fact that as long as association and dissociation do not occur C in Eötvös' surface tension law is a constant. I have found the true value of this constant, namely, $a d_o / 3 MN^{1/3} T_c$ in which d_o is the density at absolute zero. This is, besides, the law of THOMAS YOUNG. This law of YOUNG's states that the surface tension energy is one third the total cohesive energy of a layer of particles as deep as the range of molecular cohesive attraction. It holds only at absolute zero at a point where the cohesion in the vapor can be entirely neglected. The complete law for all temperatures is that of Eötvös. THOMAS YOUNG's law has to be multiplied by the fraction $(T_c - T)/T_c$ to make it a complete expression holding at all temperatures. This converts it to the law of Eötvös. The fact that we can compute a from the surface tension in non-associating substances at all temperatures and that we find it to be the same value, proves that a is constant in non-associating substances. We get the same value of a in each of these sub-

stances whether we compute a from the critical data, at a temperature of from 200° to 300° C., or from the surface tension determinations made at temperatures even as low as zero or in some cases 20°—30° below zero.

The constancy of a is thus established, in my opinion. If association or dissociation occur with a rise of temperature, then indeed a will not be constant, since all the factors which are included in a change if association takes place, namely, the number of the molecules, or N, the molecular weight and the number of valences.

VI. THE RELATION OF COHESION TO MAGNETISM.

What is the significance of the fact that the cohesion depends upon the valence electrons and that without valence there will be no cohesion? Can the significance be anything else than that the cohesion is electro-magnetic and that in consequence cohesion is closely related to magnetism? Or rather that perhaps magnetism is only cohesion made apparent in certain substances at more than molecular distances? I can see no other interpretation of these facts than this, and I have in an earlier paper pointed out some of the reasons which have seemed to me to point clearly in this direction. Like Sutherland I hesitated for some time whether the significance is that cohesion is electro-static or electro-magnetic, but the peculiar and exceptional position of oxygen, carbon monoxide and dioxide and one or two other substances, seems to me to indicate with entire definiteness that what I have called valence is the number of negative electrons. If this is the case there can hardly be a question here of electro-static attraction, since the cohesion is due in all cases to the negative electrons. These will only attract electro-magnetically and not electro-statically. I have come to the opinion, therefore, that the cohesional attraction is indeed magnetic in nature and that the cohesive mass is electro-magnetic just as is the gravitational mass. We see indeed the remarkable resemblance between magnetism and cohesion. Each extends ordinarily but a single molecular diameter for the reason that the orientation of the molecules is haphazard. They neutralize each other's magnetic fields or cohesive fields. So we can discover magnetism and cohesion in most substances only in the immediate neighborhood of the molecules. It is only in a few substances that the molecules or atoms are of such a nature that they do not neutralize each other's magnetic fields, but they reinforce them and in these substances the attraction may be easily perceived at distances more than molecular.

Cohesive mass and gravitational mass are thus of the same nature; each is magnetic in nature; but the cohesive mass is far greater than the gravitational, for the gravitational, which is the effect of the atomic nucleus, is reinforced by the action of the valence electrons. These relatively great cohesional masses of the molecules cannot be perceived at more than molecular distances, perhaps because the effect added by the valences is absorbed either by the ether or by the surrounding molecules. Possibly we shall have in the future a table of cohesional weights of the elements comparable with the gravitational weights. These cohesional weights will give us perhaps a periodic table of the elements which will be no less interesting than the usual periodic table. Van der Waals' equation is the scales of molecular dimensions by which we may weigh the molecules and determine their real or cohesive mass and not simply that part of the mass which is able to penetrate matter and space.

I have sought to find in the laws of attraction of magnets something which would be similar to the law of attraction of molecules. The only relationship of this kind which I have been able thus far to find is the law correlating the weight which a horse-shoe magnet will support and the mass of the magnet. The relationship exists in this case that W, the weight supported, is proportional to the two-thirds power of the mass of the magnet, or $W = aM^{2/3}$. From this it would appear, since they act also proportionaly to the two-thirds power of their masses, that the molecules behave like little magnets, as has been suggested by Sutherland. Here we have the two-thirds power of the mass just as in the molecules we have the two-thirds power of the molecular weight. The valence in the different horse-shoe magnets of iron will, I suppose, remain constant.

VII. THE RELATION OF COHESION TO CHEMICAL AFFINITY.

The cohesion of molecules is thus shown to be electro-magnetic and magnetism is probably cohesion. If we now go within the molecule, do these same forces exist? Is what we call chemical affinity simply the cohesion of the atoms, and has it in it the same factors as those of molecular cohesion? Is chemical affinity electro-magnetic also, and not electrostatic as it has so long been supposed to be? Is the suggestion of Sutherland correct that what we call cohesion is simply the chemical attraction extending a short distance from the molecule? Or if we turn it about, is the cohe-

sion which holds the atoms together in the molecules simply the intense cohesional attraction, the magnetism, which shows itself also between molecules? This suggestion has indeed been made in the last paper of Sir WILLIAM RAMSAY, published in the Royal Society. In that paper he suggests that atoms are bound together to make molecules not by the electro-static attraction between positive and negative atoms, but by the electromagnetic attractions due to the movements of the negative valence electrons, and he makes a model showing the position that light spheres take up with regard to each other when each has a current running about it in a position corresponding to the path of an electron revolving about an atom. Assuredly this cohesional field of which we have been speaking is due to the action of all the atoms with their electrons of which the molecule is composed. If it is intense on the immediate outside of the molecule it would seem that it must be vastly greater in the interior of the molecule. Will it not be sufficient to hold the atoms in a close union in the molecule? It seems to me that it must. Why then should we, until we are driven to it, assume that the atoms are held in the molecule by any other force than that of their cohesion which is of a magnetic nature? But why, if this is the case, should the molecules break apart at one point rather than another? The manner in which the cohesional attraction varies with the distance we do not know, but certainly it is at a rate greater than the inverse square of the distance. So the cohesion in the interior of a molecule must be much greater than between the molecules.

The discussion of this question will have to be left to the future. I wish only to raise the question here as one of the interesting results of the discovery of the nature of cohesion, or rather the discovery of the factors influencing cohesion, namely the valence electrons in the molecule. It is certain, however, since the attraction of atoms to make molecules is due to the valences, and since, as we have shown, the cohesional attraction is also due, in part at least, to the valences, and without the valences there is neither chemical union nor cohesion, that certainly cohesion and chemical affinity must have much in common, if indeed they are not identical. If this is true, valence and atomic weight must be of fundamental importance in chemical affinity, and indeed evidences are not lacking that this is the case. It surely is no mere coincidence that water, which has so great a heat of formation, and in which what we call chemical affinity is so great, has also such an enormous cohesion, so that its critical temperature is over 300°

and its critical pressure 200 atmospheres. I do not wish to consider this possibility further in this paper, for it will require a far more extended consideration than can be given it here, but in connection with the ideas which follow it opens to our eyes a vista of orderly beauty and simple symmetry of things as they are.

VIII. THE COHESION OF ELECTRICITY.

In closing this paper I should like to raise one other question, and that is the cohesion of electricity itself. I have never even seen it alluded to, but surely it must exist. If the atoms are built of electrons, then the negative electron is the simplest particle of matter. The electron has mass, the amount being dependent on the velocity of its motion. A single electron would not presumably have any cohesion, for it has no valence electrons revolving about it. But suppose we have two electrons revolving about each other, then the condition, it appears to me, will be changed and these two electrons will have cohesion. For each electron becomes the valence electron of the other and we shall then have cohesion as well as gravitation between them. How large will this cohesion be and will it be large enough to overcome their electrostatic repulsions when the two charges are close together? We can compute the amount of this cohesion if we assume that the same relations exist as in the cohesion of molecules. It may be computed from the relation $a = N^2(m^2k \times Val/M)^{2/3}$. For such a pair of electrons N becomes unity and drops out; m, the mass, may be taken in relatively slow moving electrons as $^1/_{1700}$ that of a hydrogen atom, so that the atomic weight becomes $^1/_{1700}$. The valence, Val, is unity so that the factor Val/M becomes very large. The electrical charge is enormous compared with the mass. This factor is larger than for any other substance. Then if the attraction is inversely as the fourth power of the distance two electrons at the distance of 1×10^{-10} cms., which is about the radius of the nucleus of an atom, will attract each other with a cohesive force of 22.48 dynes. In this calculation the mass of the electron, m, is 9.704×10^{-28} grams, and k is 6.66×10^{-8}. The valence is unity. If the attraction varies inversely as a higher power than the fourth, which is quite possible, then the attraction will be larger. The electrostatic repulsion, taking the electron charge as 4.77×10^{-10} electrostatic units, if the same law holds within such minute distances as at greater distances, would be 22.75 dynes. In other words the attraction and repulsion would be equal. But if the charges were closer together, or

if the cohesion varied inversely as a higher power of the distance than the fourth, or if the mass was greater than this, owing to the faster movement of the electrons, then the cohesion would be greater and the electrons would cohere. If the electron is moving so fast that its mass is $^1/_{1000}$ that of a hydrogen atom then the cohesion at 1×10^{-10} cms. distance, disregarding any centrifugal effect of their revolution, would be 32.02 dynes; the repulsion would be only 22.75 dynes. They would cohere. The interesting conclusion appears, if our reasoning and assumptions are correct, that if two electrons come sufficiently close together, they will cohere. It may be in this way that the nuclei of the atoms are built up and the valence electrons captured and held by the atoms; and we do not have to assume any positive electricity in the nucleus to explain how the negative electrons are held together.

Thus we have passed from the cohesion of molecules to the cohesion of atoms to make molecules, and to the cohesion of electrons to make atoms. What then is the relation to that cohesion of masses which extends throughout space, the attraction of gravitation?

IX. RELATION OF GRAVITATION AND COHESION.

The numerical relation of cohesion and gravitation is given in the formula $a = N^2(m^2k \times Val/M)^{2/3}$. This formula shows that what is called cohesion is but the gravitational attraction intensified in the immediate neighborhood of the molecules by the action of the valence electrons. I do not yet see the significance of the exponent two-thirds. This would seem to imply the importance of the density of the lines of force, which would suggest that these lines of force are repelling each other. Leaving this point for the future we can look at the matter the other way around and instead of considering cohesion as intensified gravitation we can with equal right consider gravitation to be simply the cohesional attraction from which one element has been absorbed, namely the effect produced by the valence electrons. For some reason this element cannot reach farther than the next layer of molecules. Whether this is because it is absorbed by the ether as VAN DER WAALS suggested, or whether it is because it is absorbed by the first molecule it encounters, I am not sure, but from the relation of cohesion to magnetism we might assume perhaps as more probable the latter possibility. For some reason then it seems that the effect produced on the gravitational attraction by the valence electrons cannot penetrate other molecules and so it is shut off by them. The idea occurs

to one that possibly the molecules of magnetic substances are transparent to this cohesional attraction and propagated to a distance the cohesion becomes recognizable to us as magnetism. Gravitation thus becomes simply the cohesional attraction from which the effect of the valence electrons has been absorbed. It is like light seen through a colored glass; not all the light can pass. The molecules might be likened to suns shining with an invisible and intense light which we call cohesion. But while luminous itself each molecule cuts off the light from the molecule behind it letting through only a portion. That which comes through would correspond perhaps to polarized light, or light from which one element had been absorbed, and is what we call gravitation.

BEGRÜNDUNG DER MENGENLEHRE UNABHÄNGIG VOM LOGISCHEN SATZ VOM AUSGESCHLOSSENEN DRITTEN

VON

DR. L. E. J. BROUWER

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT AMSTERDAM.

ERSTER TEIL:

ALLGEMEINE MENGENLEHRE.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam

(EERSTE SECTIE).

DEEL XII. N°. 5.

AMSTERDAM

JOHANNES MÜLLER

Maart 1918.

FEB 10 1971

BEGRÜNDUNG DER MENGENLEHRE UNABHÄNGIG VOM LOGISCHEN SATZ VOM AUSGESCHLOSSENEN DRITTEN

VON

DR. L. E. J. BROUWER

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT AMSTERDAM.

ERSTER TEIL:

ALLGEMEINE MENGENLEHRE.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam

(EERSTE SECTIE).

DEEL XII. N°. 5.

AMSTERDAM

JOHANNES MÜLLER

1918.

Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten.

Erster Teil:

ALLGEMEINE MENGENLEHRE.

1. *Die Kardinalzahlen.*

Der Mengenlehre liegt eine unbegrenzte Folge von Zeichen zu Grunde, welche bestimmt wird durch ein erstes Zeichen und das Gesetz, das aus jedem dieser Zeichen das nächstfolgende herleitet. Unter den mannigfachen hierzu brauchbaren Gesetzen erscheint dasjenige am geeignetesten, welches die Folge ξ der Ziffernkomplexe 1, 2, 3, 4, 5, ... erzeugt.

Eine *Menge* ist ein *Gesetz*, auf Grund dessen, wenn immer wieder ein willkürlicher Ziffernkomplex der Folge ξ gewählt wird, jede dieser Wahlen entweder ein bestimmtes Zeichen, oder nichts erzeugt, oder aber die Hemmung des Prozesses und die definitive Vernichtung seines Resultates herbeiführt, wobei für jedes n nach jeder ungehemmten Folge von $n - 1$ Wahlen wenigstens ein Ziffernkomplex angegeben werden kann, der, wenn er als n-ter Ziffernkomplex gewählt wird, *nicht* die Hemmung des Prozesses herbeiführt. Jede in dieser Weise von der Menge erzeugte Zeichenfolge (welche also im allgemeinen nicht fertig darstellbar ist) heisst ein *Element der Menge*. Die gemeinsame Entstehungsart der Elemente einer Menge M werden wir ebenfalls kurz als *die Menge M* bezeichnen.

Wenn verschiedene Wahlfolgen immer zu verschiedenen Zeichenfolgen führen, so heisst die Menge *individualisiert*.

Die Bestimmungsgesetze endlicher Zeichengruppen sowie unbegrenzter Zeichenfolgen von der Art der Folge ξ, bilden besondere Fälle von Mengen, deren Elemente von den einzelnen Zeichen gebildet werden. Die Menge der Ziffernkomplexe von ξ werden wir mit A bezeichnen.

Mengen und Elemente von Mengen werden *mathematische Entitäten* genannt.

Unter einer *Species erster Ordnung* verstehen wir eine Eigen-

schaft, welche nur eine mathematische Entität besitzen kann, in welchem Falle sie ein *Element der Species erster Ordnung* genannt wird. Die Mengen bilden besondere Fälle von Species erster Ordnung.

Unter einer *Species zweiter Ordnung* verstehen wir eine Eigenschaft, welche nur eine mathematische Entität oder Species erster Ordnung besitzen kann, in welchem Falle sie ein *Element der Species zweiter Ordnung* genannt wird.

In analoger Weise definieren wir *Species n-ter Ordnung*, wo n ein beliebiges Element von A repräsentiert.

Zwei Species M und N heissen *kongruent*, wenn weder ein von jedem Elemente von N verschiedenes Element von M noch ein von jedem Elemente von M verschiedenes Element von N existieren kann, anders ausgedrückt: wenn jede für die eine Species unmögliche Eigenschaft auch für die andere Species unmöglich ist; mithin sind M und N, wenn sie beide einer dritten Species P kongruent sind, auch einander kongruent.

Wenn überdies jedes Element von M ebenfalls Element von N ist, so heissen M und N *halbidentisch*. Wenn schliesslich auch jedes Element von N ebenfalls Element von M ist, so heissen M und N *identisch*.

Die Species, welche diejenigen Elemente umfasst, welche sowohl zur Species M wie zur Species N gehören, heisst der *Durchschnitt* von M und N, und wird bezeichnet mit $\mathfrak{D}(M, N)$. Der Durchschnitt zweier Mengen braucht keine Menge zu sein.

Die Species, welche diejenigen Elemente umfasst, welche entweder zur Species M oder zur Species N gehören, heisst die *Vereinigung* von M und N, und wird bezeichnet mit $\mathfrak{S}(M, N)$. Die Vereinigung zweier Mengen ist wiederum eine Menge, die Vereinigung zweier individualisierter Mengen braucht aber keine individualisierte Menge zu sein.

Zwei Species M und N heissen *elementefremd*, wenn kein Element existieren kann, das sowohl zu M wie zu N gehört.

Die Species M heisst eine *Teilspecies* der Species N, wenn jedes Element von M ebenfalls Element von N ist. Lässt sich überdies ein Element von N angeben, das *nicht* Element von M ist, so heisst M eine *echte Teilspecies* von N.

Sind M' und M'' elementefremd, und $\mathfrak{S}(M', M'')$ und N kongruent, so sagen wir, dass N sich aus M' und M'' *zusammensetzt*, und nennen M' und M'' *Komplementärspecies* voneinander in N.

Sind M' und M'' elementefremd, und $\mathfrak{S}(M', M'')$ und N identisch, so sagen wir, dass N in M' und M'' *zerlegt* ist, und nennen M' und M'' *konjugierte Zerlegungsspecies von* N, und sowohl M' wie M'' eine *abtrennbare Teilspecies* von N.

In analoger Weise wie den Durchschnitt und die Vereinigung von zwei Species, definiert man den Durchschnitt und die Vereinigung einer willkürlichen Species von Species.

In analoger Weise wie zwei Komplementärspecies in N resp. zwei Zerlegungsspecies von N, definiert man eine Species von Komplementärspecies in N resp. eine Species von konjugierten Zerlegungsspecies von N.

Wenn zwischen zwei Species M und N eine eineindeutige Beziehung hergestellt werden kann, d.h. ein Gesetz, welches jedem Elemente α von M ein Element β von N zuordnet in solcher Weise, dass dabei jedes Element von N einem und nur einem bestimmten Elemente von M zugeordnet wird, so schreiben wir $M \sim N$, und sagen, dass M und N dieselbe *Mächtigkeit oder Kardinalzahl* besitzen, oder *gleichmächtig* sind. Die Menge der Ziffernkomplexe 2, 3, 4, ... ist z. B. gleichmächtig mit der Menge der Ziffernkomplexe 1, 2, 3, ...

Wenn jedem Elemente α von M ein verschiedenes Element β von N zugeordnet ist in solcher Weise, dass die Species der β mit N identisch ist, so heissen M und N *halbgleichmächtig*. Eine individualisierte Menge ist z. B. halbgleichmächtig mit der entsprechenden Species ungehemmter Wahlfolgen.

Eine Species E heisst *endlich*, wenn sie mit der Menge der Ziffernkomplexe eines gewissen Anfangssegmentes der Folge ζ gleichmächtig ist.

Eine Species U heisst *unendlich*, wenn jedes Element von A einem verschiedenen Elemente w von U zugeordnet werden kann. Im Falle dass die Elemente w eine mit A gleichmächtige abtrennbare Teilspecies von U bilden, heisst U *reduzierbar unendlich*.

Es existiert kein Grund zu behaupten, dass jede Menge oder Species entweder endlich oder unendlich sei. Dagegen steht fest, dass eine Species nicht gleichzeitig endlich und unendlich sein kann, und zwar auf Grund des folgenden Satzes:

Haupteigenschaft der endlichen Species. *Für jede Herstellungsweise der eineindeutigen Beziehung zwischen einer endlichen Species E und der Menge der Ziffernkomplexe eines Anfangssegmentes von ζ, kurz: für jede Zählungsweise von E, wird dasselbe Anfangssegment von ζ benutzt.*

Beweis. Seien zwei Zählungen von E gegeben, von denen die „erste" das Anfangssegment 1, 2, 3, . . . τ von ζ benutzt, während die andere (als „neue Zählung" zu bezeichnen), *nicht weniger* als 1, 2, 3, . . . τ benutzt. Die Zählung, in welche die erste Zählung durch Verwechselung der Elemente, denen bei der ersten und bei

der neuen Zählung die Ziffer 1 zugeordnet ist, übergeht, werden wir als „zweite Zählung" bezeichnen. Alsdann benutzen die erste und die zweite Zählung dasselbe Anfangssegment von ζ, während bei der zweiten und bei der neuen Zählung die Ziffer 1 demselben Elemente von E zugeordnet ist. Die Zählung, in welche die zweite Zählung durch Verwechselung der Elemente, denen bei der zweiten und bei der neuen Zählung die Ziffer 2 zugeordnet ist, übergeht, werden wir als „dritte Zählung" bezeichnen. Alsdann benutzen die erste und die dritte Zählung dasselbe Anfangssegment von ζ, während bei der dritten und bei der neuen Zählung die Ziffern 1 und 2 je demselben Elemente von E zugeordnet sind. In dieser Weise fortfahrend, gelangen wir schliesslich zu einer „letzten Zählung", welche einerseits dasselbe Anfangssegment von ζ, wie die erste Zählung, also das Segment $1, 2, 3, \ldots \tau$ benutzt, andererseits die Ziffernkomplexe $1, 2, \ldots \tau$ je demselben Elemente von E zuordnet, wie die neue Zählung. Hieraus folgern wir hinsichtlich der neuen Zählung, dass, nachdem wir die Ziffernkomplexe $1, 2, \ldots \tau$ denjenigen Elementen von E zugeordnet haben, denen sie bei der neuen Zählung entsprechen, die Menge E erschöpft ist, d. h. dass *die neue Zählung dasselbe Anfangssegment von ζ benutzt wie die erste Zählung*, w. z. b. w.

Auf Grund der Haupteigenschaft dürfen wir die Kardinalzahl einer endlichen Species mit dem letzten Ziffernkomplex der Folge ζ, der bei der Zählung der Menge benutzt wird, bezeichnen. Die Kardinalzahl einer Species ohne Element heisst *Null* und wird mit 0 bezeichnet.

Aus der Haupteigenschaft folgt unmittelbar, dass *eine echte Teilspecies einer endlichen Species E nicht mit E selbst gleichmächtig sein kann* (die entgegengesetzte Annahme führt nämlich sofort auf einen Widerspruch). Insbesondere *kann eine endliche Species nicht gleichzeitig unendlich sein.*

Sei U eine reduzierbar unendliche Species; U_1 die abtrennbare, mit A gleichmächtige Teilspecies; $e_1, e_2, e_3, \ldots$ die Elemente von U_1; U_2 die zu U_1 in U konjugierte Zerlegungsspecies. Indem wir e_1 mit e_2, e_2 mit e_3, usw., und jedes Element von U_2 mit sich selbst korrespondieren lassen, erzeugen wir eine eineindeutige Beziehung zwischen U und einer echten Teilspecies von U. Mithin gilt der Satz:

Jede reduzierbar unendliche Species U enthält mit U gleichmächtige echte Teilspecies.

Das einfachste Beispiel einer unendlichen Menge bildet die Menge A selbst, deren Kardinalzahl wir mit a bezeichnen werden. Species,

welche diese Kardinalzahl besitzen, heissen *abzählbar unendlich*, sodass folgende Aussage gilt: *Jede unendliche Species enthält eine mit einer abzählbar unendlichen halbidentische Teilspecies.*

Einfache Beispiele von abzählbar unendlichen Species lassen sich in mannigfacher Weise angeben. Die Menge der positiven und negativen ganzen Zahlen (d. h. genau genommen, die Menge der diese Zahlen bezeichnenden Zeichenkomplexe) erscheint als abzählbar unendlich, wenn wir diese Zahlen nach steigenden absoluten Werten ordnen. Die Species der rationalen Zahlen x erscheint als abzählbar unendliche Menge, wenn wir jede dieser Zahlen als Wurzel einer bestimmten Gleichung $px + q = 0$ (in welcher p und q möglichst kleine ganze Zahlen sind und p positiv ist) betrachten, und diese Gleichungen nach der Summe der absoluten Werte von p und q ordnen.

Um zu beweisen, dass auch die Species der algebraischen Zahlen eine abzählbar unendliche Menge ist, verstehen wir unter dem *Grade* einer algebraischen Zahl θ den Minimalwert der Grade der algebraischen Gleichungen mit ganzen Koeffizienten, welche θ als Wurzel besitzen, und unter den Koeffizienten einer algebraischen Zahl θ vom Grade n, die Koeffizienten derjenigen θ als Wurzel besitzenden algebraischen Gleichung $f(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n = 0$, in welcher c_0 positiv ist und alle Koeffizienten möglichst kleine ganzzahlige Werte besitzen. Diese Koeffizienten von θ sind eindeutig bestimmt; wäre nämlich θ Wurzel von zwei verschiedenen Gleichungen $\Phi(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_n = 0$ und $\Psi(x) = x^n + \beta_1 x^{n-1} + \ldots + \beta_n = 0$ mit rationalen Koeffizienten, so wäre sie auch Wurzel der Gleichung $\Phi(x) - \Psi(x) = 0$, deren Grad kleiner wäre als n. Die Species der algebraischen Zahlen erscheint nunmehr als abzählbar unendliche Menge, wenn wir diese Zahlen nach steigenden Werten der Summe von ihrem Grade und den absoluten Beträgen ihrer Koeffizienten ordnen.

Eine Species heisst *abzählbar*, wenn ein Gesetz existiert, das jedem ihrer Elemente einen verschiedenen Ziffernkomplex von ζ zuordnet. Sie heisst insbesondere *zählbar*, wenn das Gesetz erlaubt, von jedem Ziffernkomplex von ζ zu entscheiden, entweder welchem Elemente der betreffenden Species es zugeordnet ist, oder dass es keinem Elemente der betreffenden Species zugeordnet ist. Eine Species s heisst *auszählbar*, wenn jedem Elemente α einer gewissen Teilspecies A_1 von A ein Element β von s zugeordnet ist in solcher Weise, dass die Species der β mit s halbidentisch ist. Ist überdies A_1 mit A identisch, so heisst s *durchzählbar*. Ist schliesslich auch die Species der β mit s identisch, so heisst s *aufzählbar*.

Um ein geometrisches Beispiel einer zählbaren Species zu geben, schicken wir folgende Definitionen voraus:

Wir wählen in der Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem, und zerlegen die Ebene in Quadrate $\varkappa_1$ mit der Seitenlänge 1, deren Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten besitzen. Jedes der Quadrate $\varkappa_1$ zerlegen wir in vier kongruente homothetische Teilquadrate $\varkappa_2$, und definieren, in dieser Weise fortfahrend, Quadrate $\varkappa_3$, $\varkappa_4$, usw. Unter einem Quadrat $\varkappa$ verstehen wir ein Quadrat $\varkappa_\nu$ mit willkürlichem ν. Unter einem *Bereich* verstehen wir eine solche Species der Kardinalzahl a von Quadraten $\varkappa$ (einschliesslich der Grenze), dass sich zu jedem Quadrat $\varkappa'$ des Bereichs eine endliche Menge von ebenfalls zum Bereiche gehörigen Quadraten $\varkappa$ angeben lässt, welche $\varkappa'$ vollständig einschliessen. Lässt sich überdies von jedem Quadrate $\varkappa$ angeben, entweder dass es von einem bestimmten Anfangssegmente des Bereichs überdeckt wird, oder dass es von keinem Anfangssegmente des Bereichs überdeckt wird, so heisst der Bereich ein *Gebiet*. Lässt sich für zwei willkürliche Quadrate $\varkappa$ des Bereichs entscheiden, ob sie sich durch einen vom Bereiche überdeckten Streckenzug verbinden lassen, so heisst der Bereich *differenziert*. Lassen zwei willkürliche Quadrate $\varkappa$ des Bereichs sich durch einen vom Bereiche überdeckten Streckenzug verbinden, so heisst der Bereich *einfach*.

Wir denken uns nun einen differenzierten Bereich β, und lassen aus der entsprechenden Quadratspecies diejenigen Quadrate $\varkappa$ fort, welche sich mit einem vorangehenden (d.h. einem früheren Ziffernkomplex von ξ zugeordneten) Quadrate $\varkappa$ von β durch einen von β überdeckten Streckenzug verbinden lassen. Die übrigbleibenden Quadrate bilden eine zählbare Species $\varkappa'$, $\varkappa''$, $\varkappa'''$, ..., und jedes Quadrat $\varkappa^{(\nu)}$ bildet zusammen mit denjenigen Quadraten $\varkappa$ von β, welche sich durch einen von β überdeckten Streckenzug mit $\varkappa^{(\nu)}$ verbinden lassen, einen in β enthaltenen einfachen Bereich. Wir haben mithin den Satz, dass *jeder differenzierte Bereich in eine zählbare Species von einfachen Bereichen zerlegt ist.*

Die Species der Paare von Ziffernkomplexen von ξ ist eine abzählbar unendliche Menge; wir brauchen, um dies einzusehen, diese Paare nur nach der Summe der zugehörigen ganzen Zahlen zu ordnen. Hieraus folgt, dass eine Species welche in eine abzählbar unendliche (bzw. abzählbare, zählbare, anszählbare, durchzählbare, aufzählbare) Species von abzählbar unendlichen (bzw. abzählbaren, zählbaren, anszählbaren, durchzählbaren, aufzählbaren) Mengen zerlegt ist, ebenfalls eine abzählbar unendliche (bzw. abzählbare, zählbare, anszählbare, durchzählbare, aufzählbare) Menge ist.

Ein zweites Beispiel einer unendlichen Menge bildet die Menge C der unbeschränkt fortgesetzten Folgen von zu ζ gehörigen Ziffernkomplexen, deren Kardinalzahl wir mit c bezeichnen werden. Obgleich die Menge C nicht reduzierbar unendlich ist, so besitzt sie dennoch, wie sich leicht zeigen lässt, analog wie die reduzierbar unendlichen Mengen, mit C gleichmächtige echte Teilmengen. Lassen wir der Folge von positiven ganzen Zahlen $a_1\ a_2\ a_3 \ldots$ die reelle Zahl

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3}} + \cdots$$

entsprechen, so erscheint C als Erzeugungsmittel der reellen Zahlen zwischen 0 und 1, inklusive 1, aber exklusive 0. Ordnen wir jeder Folge $a_1\ a_2\ a_3 \ldots$ die reelle Zahl

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{a_1-1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3}} + \cdots$$

zu, so erscheint C als Erzeugungsmittel der reellen Zahlen zwischen 0 und 1, exklusive 0 und 1. Hieraus folgt unmittelbar, dass C sich schliesslich auch als Erzeugungsmittel aller reellen (positiven und negativen) Zahlen, inklusive 0, deuten lässt. Lassen wir der Fundamentalreihe $a_1\ a_2\ a_3 \ldots$ die reelle Zahl

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

entsprechen, so erscheint die Menge C als Erzeugungsmittel der Irrationalzahlen zwischen 0 und 1.

Die Species C_n der Gruppen von n unbeschränkt fortgesetzten Folgen von zu ζ gehörigen Ziffernkomplexen ist eine Menge derselben Kardinalzahl wie die Menge C. Um dies einzusehen, braucht man nur dem Elemente $a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \ldots$ von C das Element

$$\begin{array}{l} a_1\ a_{n+1}\ a_{2n+1} \cdots \\ a_2\ a_{n+2}\ a_{2n+2} \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n\ a_{2n}\ a_{3n} \cdots \end{array}$$

von C_n zuzuordnen. In dieser Weise bestimmt man gleichzeitig eine eineindeutige Beziehung zwischen den Punkten eines n-dimensionalen Kubus und den Punkten eines geraden Liniensegmentes (aus welcher unmittelbar eine eineindeutige Beziehung zwischen den Punkten des n-dimensionalen Cartesischen Raumes und den Punkten der geraden Linie folgt). Diese Beziehung ist aber *nicht stetig*: wenn man z. B. (bei konstanten $a_1, \ldots a_n, a_{n+3}, a_{n+4}, \ldots$) a_{n+2} abwechselnd gleich 1 und 2 wählt und a_{n+1} unbeschränkt wachsen lässt, so bekommt man auf dem Liniensegmente eine gegen einen einzigen Punkt konvergierende Folge von Punkten, im n-dimensionalen Kubus aber eine *nicht* gegen einen einzigen Punkt konvergierende Folge von Punkten.

Auch die Species C_ω der unbeschränkt fortgesetzten Folgen von unbeschränkt fortgesetzten Folgen von zu ξ gehörigen Ziffernkomplexen ist eine Menge der Kardinalzahl c, wie man sofort erkennt, wenn man dem Elemente $a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \ldots$ von C das Element

$$\begin{array}{l} a_1\ a_2\ a_4\ a_7\ \ldots\ldots \\ a_3\ a_5\ a_8\ \ldots\ldots\ldots \\ a_6\ a_9\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{10}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

von C_ω entsprechen lässt.

Zwei Species M und N (und ebenso die betreffenden Kardinalzahlen m und n) heissen *äquivalent*, wenn einerseits jedem Element von M ein verschiedenes Element von N, andererseits jedem Element von N ein verschiedenes Element von M zugeordnet ist, eine Eigenschaft, welche wir auch durch die Formel $m = n$ ausdrücken. Wenn einerseits jedem Element von M ein verschiedenes Element von N zugeordnet ist, andererseits aber kein Gesetz existieren kann, das jedem Elemente von N ein verschiedenes Element von M zuordnet, so schreiben wir $m < n$ oder $n > m$, und sagen, dass N (resp. n) *grösser* ist als M (resp. m) und dass M (resp. m) *kleiner* ist als N (resp. n).

Wenn wir nur wissen, dass jedem Elemente von M ein verschiedenes Element von N zugeordnet ist, so schreiben wir auch $m \leq n$, oder $n \geq m$, obgleich in diesem Falle nicht notwendig eine der Relationen $m < n$ und $m = n$ zu gelten braucht.

Folgende Eigenschaften sind evident:

1. *Die Relationen* $m = n$, $m > n$ *und* $m < n$ *schliessen einander aus.*

2. *Aus* $m = n$ *und* $n = p$ *folgt* $m = p$.

3. *Aus* $m > n$ *und* $n \geq p$ *folgt* $m > p$. Wenn man nämlich jedem Elemente von M ein verschiedenes Element von P zuordnen könnte, so könnte man weiter auf Grund von $n \geq p$ auch jedem Elemente von M ein verschiedenes Element von N zuordnen.

4. *Aus* $m \geq n$ *und* $n > p$ *folgt* $m > p$. Wenn man nämlich jedem Elemente von M ein verschiedenes Element von P zuordnen könnte, so könnte man jedem Elemente von N ein verschiedenes Element von M, also auch ein verschiedenes Element von P zuordnen.

Eine Species M (bzw. ihre Kardinalzahl m) heisst einer Species N (bzw. ihrer Kardinalzahl n) *übergeordnet* und wir schreiben $m \dot{\geq} n$, wenn jedem Elemente α einer gewissen Teilspecies M_1 von M je ein Element β von N zugeordnet ist in solcher Weise dass die Species N' der β mit N halbidentisch ist. Ist überdies N' mit N identisch, so heisst die Species M (bzw. ihre Kardinalzahl m) der Species N (bzw. ihrer Kardinalzahl n) *superponiert*, und schreiben wir $m \ddot{\geq} n$. Ist schliesslich auch M_1 mit M identisch, so sagen wir dass N (bzw. n) von M (bzw. m) *überdeckt* ist, und schreiben $m \dddot{\geq} n$.

Wenn die Species M des Species N übergeordnet ist, die Species N aber unmöglich der Species M übergeordnet werden kann, so heisst M (bzw. m) *von grösserem Umfang* als N (bzw. n), und schreiben wir $m \dot{>} n$.

Wenn sowohl $m \dot{\geq} n$, wie $n \dot{\geq} m$, so heissen M und N (bzw. m und n) *von gleichem Umfang*, und schreiben wir $m \dot{=} n$.

Folgende Eigenschaften sind leicht zu beweisen:

1. *Die Relationen* $m \dot{=} n$, $m \dot{\geq} n$ *und* $n \dot{\geq} m$ *schliessen einander aus.*

2. *Aus* $m \dot{\geq} n$ *und* $n \dot{\geq} p$ *folgt* $m \dot{\geq} p$. Sei nämlich N' die Species der Elementen von M zugeordneten Elemente von N, und P' resp. P'' die Species der Elementen von N resp. N' zugeordneten Elemente von P. Wenn nun ein von jedem Elemente von P'' verschiedenes Element von P' existierte, so wäre es einem Elemente von N zugeordnet, das eine für die Elemente von N' unmögliche Eigenschaft besässe, was der Kongruenz von N und N' widerspricht. Es kann mithin kein von jedem Elemente von P'' verschiedenes Element von P' existieren, d.h. P'' und P' sind kongruent. Weil aber P und P' ebenfalls kongruent sind, so sind schliesslich auch P und P'' kongruent, also halbidentisch, w. z. b. w.

3. *Aus* $m \dot{=} n$ *und* $n \dot{=} p$ *folgt* $m \dot{=} p$.

4. *Aus* $m \dot{>} n$ *und* $n \dot{>} p$ *folgt* $m \dot{>} p$. Wenn nämlich $p \dot{>} m$ wäre, so wäre wegen $n \dot{\geq} p$ auch $n \dot{>} m$, was mit $m \dot{>} n$ unverträglich ist.

5. *Aus* $m \dot{>} n$ *und* $n \dot{>} p$ *folgt* $m \dot{>} p$. Wenn nämlich $p \dot{>} m$ wäre, so wäre wegen $m \dot{>} n$ auch $p \dot{>} n$, was mit $n \dot{>} p$ unverträglich ist.

Wenn die Species M der Species N superponiert ist, die Species N aber unmöglich der Species M superponiert werden kann, so heisst M (bzw. m) *von grösserer Ausdehnung* als N (bzw. n), und schreiben wir $m \ddot{>} n$. Wenn N von M überdeckt ist, M aber unmöglich von N überdeckt werden kann, so heisst M (bzw. m) *von grösserem Gewicht* als N (bzw. n) und schreiben wir $m \dddot{>} n$.

Wenn sowohl $m \ddot{\geq} n$, wie $n \ddot{\geq} m$, so heissen M und N *von gleicher Ausdehnung*, und schreiben wir $m \ddot{-} n$. Wenn sowohl $m \dddot{\geq} n$, wie $n \dddot{\geq} m$, so heissen M und N *von gleichem Gewicht*, und schreiben wir $m \dddot{-} n$.

Folgende Eigenschaften leuchten unmittelbar ein:

1. *Die Relationen* $m \ddot{-} n$, $m \ddot{>} n$ *und* $n \ddot{>} m$ *ebenso wie die Relationen* $m \dddot{-} n$, $m \dddot{>} n$ *und* $n \dddot{>} m$ *schliessen einander aus.*

2. *Aus* $m \ddot{>} n$ *und* $n \ddot{>} p$ *folgt* $m \ddot{>} p$. *Aus* $m \dddot{\geq} n$ *und* $n \dddot{>} p$ *folgt* $m \dddot{>} p$.

3. *Aus* $m \ddot{-} n$ *und* $n \ddot{-} p$ *folgt* $m \ddot{-} p$. *Aus* $m \dddot{-} n$ *und* $n \dddot{-} p$ *folgt* $m \dddot{-} p$.

4. *Aus* $m \ddot{>} n$ *und* $n \ddot{>} p$ *folgt* $m \ddot{>} p$. *Aus* $m \dddot{>} n$ *und* $n \dddot{>} p$ *folgt* $m \dddot{>} p$.

5. *Aus* $m \ddot{>} n$ *und* $n \ddot{>} p$ *folgt* $m \ddot{>} p$. *Aus* $m \dddot{>} n$ *und* $n \dddot{>} p$ *folgt* $m \dddot{>} p$.

Um ein Beispiel äquivalenter Species herzustellen, definieren wir auf der geraden Linie Intervalle $\varkappa$ in analoger Weise wie oben in der Ebene Quadrate $\varkappa$, verstehen unter einem Intervalle λ_ν die Vereinigung von zwei aneinander grenzenden Intervallen $\varkappa_{\nu+1}$, und unter einer *stetigen Funktion einer zwischen 0 und 1 schwankenden Veränderlichen* ein Gesetz, welches jedem zwischen 0 und 1 enthaltenen, mit $\varkappa_a$ zu bezeichnenden Intervalle $\varkappa$ ein mit λ_b zu bezeichnendes Intervall λ zuordnet in solcher Weise, dass aneinander grenzenden $\varkappa_a$ teilweise übereinander greifende λ_b und ineinander enthaltenen $\varkappa_a$ ebenfalls ineinander enthaltene λ_b entsprechen, und dass die Breite der λ_b, mit der Breite der entsprechenden $\varkappa_a$ gleichmässig gegen Null konvergiert. Weil sowohl die $\varkappa_a$ wie die λ eine abzählbar unendliche Species bilden, so lässt sich jeder stetigen Funktion der genannten Art ein verschiedenes Element der Menge C zuordnen. Sei andererseits $a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ ein Element d von

C, verstehen wir unter i_ν das zwischen $x_\nu = \frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_\nu}}$ und $x_\nu + \frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_\nu}}$ enthaltene Intervall, und ordnen wir für gegebenes ν allen Intervallen $(\varkappa_\nu)_a$ das Intervall i_ν als λ_a zu, so erreichen wir, dass jedem Elemente d von C eine verschiedene stetige Funktion der genannten Art entspricht, sodass *die Species S der stetigen Funktionen einer zwischen 0 und 1 schwankenden Veränderlichen der Menge C äquivalent ist.* Ausserdem sind die Species S und C, wie man leicht einsieht, von gleichem Umfang und von gleicher Ausdehnung.

Die Menge C ist grösser als die Menge A. Ein Gesetz, das jedem Elemente g von C ein Element h von A zuordnet, muss nämlich das Element h vollständig bestimmt haben nach dem Bekanntwerden eines gewissen Anfangssegmentes α der Folge von Ziffernkomplexen von g. Dann aber wird jedem Elemente von C, welches α als Anfangssegment besitzt, dasselbe Element h von A zugeordnet. Es ist mithin unmöglich, jedem Elemente von C ein verschiedenes Element von A zuzuordnen. Weil man andererseits in mannigfacher Weise jedem Elemente von A ein verschiedenes Element von C zuordnen kann, so ist hiermit der aufgestellte Satz bewiesen.

2. *Die Ordinalzahlen.*

Eine Species heisst *geordnet*, wenn zwischen je zwei als verschieden erkannten Elementen a und b der Species eine solche als *ordnende Relation* zu bezeichnende asymmetrische Relation im einen oder im anderen Sinne definiert ist, welche, wenn wir sie im einen Sinne durch „$a < b$" oder „*a vor b*" oder „*a links von b*" oder „$b > a$" oder „*b nach a*" oder „*b rechts von a*" und im anderen Sinne durch „$a > b$" oder „*a nach b*" oder „*a rechts von b*" oder „$b < a$" oder „*b vor a*" oder „*b links von a*" ausdrücken, die sogenannte *Ordnungseigenschaft* besitzt, welche aussagt, dass die Relationen $a < b$ und $b < c$ die Relation $a < c$ nach sich ziehen.

Wenn a, b und c Elemente der geordneten Species M sind, und *a vor b* und *b vor c* liegt, so sagt man auch, dass *b zwischen a und c* oder *zwischen c und a* liegt.

Die Species derjenigen Elemente der geordneten Menge M, welche zwischen a und b liegen bzw. als weder vor a noch nach b liegend erkannt sind ($a < b$), bildet das *offene* bzw. *geschlossene Intervall ab*. Die Elemente a und b heissen die *Endelemente* des (offenen oder geschlossenen) Intervalles ab.

Wenn zwischen zwei geordneten Species M und N eine solche eineindeutige Beziehung hergestellt werden kann, dass zwischen zwei einander zugeordneten Elementepaaren die ordnende Relation im selben Sinne gilt, so sagen wir, dass M und N dieselbe *Ordinalzahl* besitzen oder *ähnlich* sind.

Ein einfaches Beispiel einer geordneten Menge bildet die Menge A, wenn wir die ordnenden Relationen der natürlichen Rangordnung der Elemente in der Folge ζ entnehmen. Ihre Ordinalzahl wird mit ω bezeichnet. Kehren wir den Sinn aller ordnenden Relationen um, so entsteht eine neue geordnete Menge, deren Ordinalzahl mit $^*\omega$ bezeichnet wird.

Unter einer *Fundamentalreihe* werden wir eine geordnete Species der Ordinalzahl ω verstehen.

Jede geordnete endliche Menge E besitzt ein erstes Element, d.h. ein Element, welches *vor* jedem anderen Elemente liegt. Um dies zu beweisen, unterziehen wir E einer bestimmten Zählung, so dass wir in E ein bestimmtes Element 1, ein bestimmtes Element 2, usw. erhalten. Wenn nun das Element 1 nicht das erste Element der geordneten Menge E ist, so gibt es in der Folge ζ einen ersten solchen Ziffernkomplex a_2, dass das Element a_2 von E vor dem Elemente 1 von E liegt. Wenn auch das Element a_2 nicht das erste Element der geordneten Species E ist, so gibt es in der Folge ζ einen ersten solchen Ziffernkomplex a_3, dass das Element a_3 von E vor dem Elemente a_2 — und gleichzeitig vor allen Elementen $1, 2, 3, \ldots (a_3-1)$ — von E liegt. Indem wir in dieser Weise fortfahren, erreichen wir schliesslich einen solchen Ziffernkomplex a_h der Folge ζ, dass, wenn a in der Folge ζ weiter liegt als a_h, das Element a von E nach dem Elemente a_h von E liegt. Alsdann ist a notwendig das erste Element der geordneten Species E.

In analoger Weise zeigt man, dass *jede geordnete endliche Species ein letztes Element besitzt*, d.h. ein *nach* jedem anderen Elemente liegendes Element.

Je zwei geordnete endliche Species E_1 und E_2 derselben Kardinalzahl besitzen dieselbe Ordinalzahl. Wenn wir nämlich sowohl E_1 wie E_2 in solcher Weise zählen, dass dem ersten Elemente die Ziffer 1, dem ersten Elemente des Restes die Ziffer 2, usw. zugeordnet wird, so brechen beide Zählungen bei demselben Ziffernkomplex a von ζ ab. Die beiden Zählungen erzeugen mithin eine eineindeutige Beziehung zwischen E_1 und E_2, und diese Beziehung besitzt auch die für die Ähnlichkeit beider Species erforderte Eigenschaft.

Jeder endlichen Kardinalzahl (inklusive Null) entspricht somit

nur eine einzige endliche Ordinalzahl, sodass wir die letztere mit demselben Ziffernkomplex wie die erstere bezeichnen können.

Dass diese Eigenschaft bei den unendlichen Kardinalzahlen fortfällt, sieht man sofort ein, wenn man z.B. die Menge der rationalen Zahlen einerseits als eine der Folge ζ ähnliche Menge, andererseits in der natürlichen Rangordnung dieser Zahlen betrachtet.

Seien M und N zwei elementefremde geordnete Species der Ordinalzahlen m und n. Setzen wir weiter fest, dass zwischen einem willkürlichen Elemente p von M und einem willkürlichen Elemente q von N die Relation „p *vor* q" bestehen soll, so geht dadurch $\mathfrak{S}(M, N)$ in eine mit $M + N$ zu bezeichnende geordnete Species über, welche die *Summe* von M und N genannt wird, während ihre Ordinalzahl die *Summe* von m und n heisst und mit $m + n$ bezeichnet wird. In analoger Weise definieren wir die Summe einer willkürlichen geordneten Species von Ordinalzahlen m mittels der Vereinigungsspecies entspechender elementefremder geordneter Species M. Man sieht unmittelbar ein, dass diese „*Addition von Ordinalzahlen*" *die assoziative Eigenschaft besitzt*. Die ordnenden Relationen der betreffenden Vereinigungsspecies werden nämlich durch Assoziation nicht beeinflusst. Dagegen *versagt für die Addition von Ordinalzahlen die kommutative Eigenschaft*, wie aus dem Beispiel $\omega + 1 \neq 1 + \omega$ hervorgeht.

Wir denken eine endliche Gruppe von elementefremden geordneten Species $M_1, M_2, \ldots M_h$ mit den Ordinalzahlen $m_1, m_2, \ldots m_h$ gegeben, bezeichnen ein willkürliches Element von M_ν mit p_ν, und betrachten die Species der Elementegruppen $(p_1, p_2, \ldots p_h)$. Diese Species ordnen wir, indem wir hinsichtlich der ordnenden Relation zwischen den Gruppen $(p'_1, p'_2, \ldots p'_h)$ und $(p''_1, p''_2, \ldots p''_h)$ folgende Festsetzungen treffen: wenn $p'_h \neq p''_h$, so ist sie dieselbe wie diejenige zwischen p'_h und p''_h; wenn $p'_h = p''_h, \ldots p'_{k+1} = p''_{k+1}$, aber $p'_k \neq p''_k$, so ist sie dieselbe wie diejenige zwischen p'_k und p''_k. Die in dieser Weise geordnete Species von Elementegruppen bzw. ihre Ordinalzahl heisst das *Produkt* von $M_1, \ldots M_h$ bzw. von $m_1, \ldots m_h$ und wird mit $M_1 . M_2 \ldots M_h$ bzw. $m_1 . m_2 \ldots m_h$ bezeichnet. Die *assoziative Eigenschaft dieser „Multiplikation von Ordinalzahlen"* ist evident, weil die ordnenden Relationen der betreffenden Species von Elementegruppen durch die Assoziation nicht beeinflusst werden, während das Beispiel $\omega . 3 \neq 3 . \omega$ zeigt, dass die kommutative Eigenschaft für die Multiplikation ebensowenig wie für die Addition besteht. Weiter sieht man unmittelbar ein, dass in einem Produkte von zwei Faktoren die *distributive Eigenschaft nach dem rechtsseitigen Faktor* gilt; für ein Produkt mehrerer Faktoren besteht die-

selbe Eigenschaft für den letzten Faktor, für die übrigen Faktoren dagegen nicht, wie das Beispiel $(\omega + 1)\,3 = \omega . 3 + 1 \neq \omega . 3 + 3$ beweist.

Sei a eine endliche Zahl und m eine willkürliche Ordinalzahl, so wird das Produkt von a gleichen Faktoren m mit m^a bezeichnet, und die *a-te Potenz* von m genannt. Auf Grund der assoziativen Eigenschaft der Multiplikation gelten die Formeln $m^a . m^b = m^{a+b}$ und $(m^a)^b = m^{ab}$.

Wenn $a_1, a_2, \ldots$ die Elemente einer Fundamentalreihe φ sind, welche in solcher Weise als Teilspecies in einer geordneten Species M enthalten ist, dass $a_\nu < a_{\nu+1}$ für jedes ν, so heisst φ eine *steigende Fundamentalreihe* von M. Wenn dagegen $a_\nu > a_{\nu+1}$ für jedes ν, so heisst φ eine *fallende Fundamentalreihe* von M.

Zwei steigende Fundamentalreihen mit den Elementen $a_1, a_2, \ldots$ bzw. $b_1, b_2, \ldots$ von M heissen *zusammengehörig*, wenn zu jedem a_μ ein $b_\nu > a_\mu$ und zu jedem b_μ ein $a_\nu > b_\mu$ angegeben werden kann. In analoger Weise definiert man zusammengehörige fallende Fundamentalreihen.

Seien $a_1, a_2, \ldots$ die Elemente einer steigenden Fundamentalreihe φ von M, und a_ω ein solches Element von M, dass $a_\nu < a_\omega$ für jedes ν, während zu jedem $b < a_\omega$ ein $a_\nu > b$ angegeben werden kann, so heisst a_ω *Grenzelement* von φ. In analoger Weise definiert man Grenzelemente fallender Fundamentalreihen von M. Grenzelemente steigender oder fallender Fundamentalreihen von M heissen auch *Hauptelemente* von M.

Die geordnete Species M heisst *überall dicht zwischen ihren Elementen a und b* $(a < b)$, wenn zwischen zwei willkürlichen, als voneinander verschieden und weder vor a, noch nach b liegend erkannten Elementen p und q von M andere Elemente von M liegen.

Die geordnete Species M heisst *überall dicht im weiteren Sinne* oder kurz *überall dicht*, wenn zwischen zwei willkürlichen, voneinander verschiedenen Elementen p und q von M andere Elemente von M liegen, und *überall dicht im engeren Sinne*, wenn sich überdies ein Element von M angeben lässt und sowohl rechts wie links von einem willkürlichen Elemente von M andere Elemente von M liegen.

Die geordnete Species M heisst *nirgends dicht zwischen ihren Elementen a und b* $(a < b)$, wen zwei willkürliche, als voneinander verschieden und weder vor a noch nach b liegend erkannte Elemente p und q von M $(p < q)$ die Eigenschaft besitzen, dass es zwei als voneinander verschieden und weder vor p noch nach q liegend erkannte Elemente r und s von M gibt, welche ein *freies Interrall* bilden d.h. zwischen denen keine anderen Elemente von M liegen.

Die geordnete Speeies M heisst *nirgends dicht*, wenn zwei willkürliche voneinander verschiedene Elemente p und q von M $(p < q)$ die Eigenschaft besitzen, dass es zwei als voneinander verschieden und weder vor p noch nach q liegend erkannte Elemente r und s von M gibt, welche ein freies Intervall bilden.

Die geordnete Speeies M heisst *abgeschlossen*, wenn in ihr keine Fundamentalreihe von geschlossenen Intervallen $i_1, i_2, \ldots$ existieren kann, von denen $i_{\nu+1}$ für jedes ν in i_ν enthalten ist, und welche kein gemeinschaftliches Element besitzen.

Die geordnete Speeies M heisst *in sich dicht*, wenn jedes ihrer Elemente sich als Hauptelement charakterisieren lässt.

Die geordnete Speeies M heisst *perfekt*, wenn sie sowohl in sich dicht wie abgeschlossen ist.

Ein Beispiel einer (im weiteren Sinne) *überall dichten, perfekten* Menge liefert die Menge C, geordnet auf Grund der natürlichen Rangordnung der von ihr erzeugten reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Seien nämlich $a_1 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots$ und $a_1 \ldots a_n c_1 c_2 \ldots$ $(b_1 > c_1)$ zwei willkürliche Elemente von C, so liegt zwischen ihnen das Element $a_1 \ldots a_n c_1 (c_2 + 1) \ldots$, sodass die Menge *überall dicht* ist. Versuchen wir weiter eine Fundamentalreihe von geschlossenen Intervallen i_1, $i_2, \ldots$ zu bestimmen, von denen $i_{\nu+1}$ für jedes ν in i_ν enthalten ist, und welche kein gemeinschaftliches Element besitzen. Seien $a_1 \ldots a_n b_{n+1} \ldots$ und $a_1 \ldots a_n c_{n+1} \ldots$ $(b_{n+1} > c_{n+1})$ die Endelemente von i_1, so besitzen die Endelemente eines willkürlichen i_ν dasselbe Anfangssegment $a_1 \ldots a_n$, während b_{n+1} für die weiteren i_ν nicht zunehmen und c_{n+1} für die weiteren i_ν nicht abnehmen kann. Solange nun b_{n+1} und c_{n+1} dieselben voneinander verschiedenen Werte behalten, gehört das Element $a_1 \ldots a_n (c_{n+1} + 1)\, 1\, 1\, 1 \ldots$ zum entsprechenden i_ν; damit man mithin sicher sei, dass dieses Element nicht zu allen i_ν gehört, muss sich ein gewisses i_ν angeben lassen, für welches entweder b_{n+1} abgenommen oder c_{n+1} zugenommen hat. Weil dieselbe Schlussfolgerung sich beliebig wiederholen lässt, muss sich ein weiteres i_ν angeben lassen, für welches $b_{n+1} = c_{n+1} = a_{n+1}$ geworden ist, dessen Endelemente also dieselben ersten $n + 1$ Ziffernkomplexe besitzen. Seien $a_1 \ldots a_{n+m} b_{n+m+1} \ldots$ und $a_1 \ldots a_{n+m} c_{n+m+1} \ldots$ $(b_{n+m+1} > c_{n+m+1})$ diese Endelemente, so können wir in derselben Weise, wie wir aus der Folge $a_1 \ldots a_n$ die Folge $a_1 \ldots a_{n+m}$ hergeleitet haben, aus $a_1 \ldots a_{n+m}$ zu einer weiteren Folge $a_1 \ldots a_{n+m+p}$ gelangen, und, in dieser Weise fortfahrend, eine unbegrenzt fortsetzbare Folge $a_1 a_2 \ldots$ konstruieren. Das von dieser Folge dargestellte Element von C gehört nun aber zu *allen* i_ν, womit wir zu einem Widerspruch gelangt sind, und die betrachtete geordnete

Menge als *abgeschlossen* erkannt haben, Schliesslich ist das Element $a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ Grenzelement der steigenden Fundamentalreihe $(a_1 + 1)\, 111 \ldots$; $a_1\, (a_2 + 1)\, 111 \ldots$; $a_1\, a_2\, (a_3 + 1)\, 111 \ldots$; $\ldots$, womit die Menge sich auch als *in sich dicht* herausgestellt hat.

Ein Beispiel einer *nirgends dichten, perfekten* Menge wird gebildet von der Vereinigung der Menge C und der Menge E der endlichen Folgen von zu ζ gehörigen Ziffernkomplexen, wenn wir jedem Elemente $a_1 \ldots a_n$ von E die reelle Zahl

$$\frac{2}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_1+a_2}} + \ldots + \frac{2}{3^{a_1+a_2+\ldots+a_n}}$$

und jedem Elemente $a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ von C die reelle Zahl

$$\frac{2}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_1+a_2}} + \frac{2}{3^{a_1+a_2+a_3}} + \ldots.$$

zuordnen, und sodann die Menge $\mathfrak{S}(C, E)$ ordnen auf Grund der natürlichen Rangordnung der entsprechenden reellen Zahlen. Zum geschlossenen Intervall mit den Endelementen $a_1 \ldots a_n\, b_{n+1} \ldots$ (bzw. $a_1 \ldots a_n$) und $a_1 \ldots a_n\, c_{n+1} \ldots$ $(b_{n+1} > c_{n+1})$ gehören nämlich die Elemente $a_1 \ldots a_n\, b_{n+1}\, 111 \ldots$ und $a_1 \ldots a_n\, (b_{n+1} - 1)$, zwischen denen keine weiteren Elemente liegen, sodass die Menge *nirgends dicht* ist. Versuchen wir weiter eine Fundamentalreihe von geschlossenen Intervallen $i_1, i_2, \ldots$ zu bestimmen, von denen $i_{\nu+1}$ für jedes ν in i_ν enthalten ist, und welche kein gemeinschaftliches Element besitzen. Seien $a_1 \ldots a_n\, b_{n+1} \ldots$ (bzw. $a_1 \ldots a_n$) und $a_1 \ldots a_n\, c_{n+1} \ldots (b_{n+1} > c_{n+1})$ die Endelemente von i_1, so besitzen die Endelemente eines willkürlichen i_ν dasselbe Anfangssegment $a_1 \ldots a_n$, während b_{n+1} für die weiteren i_ν nicht zunehmen oder verschwinden (wohl entstehen) und c_{n+1} für die weiteren i_ν nicht abnehmen kann. Solange nun b_{n+1} nicht existiert, gehört das Element $a_1 \ldots a_n$ zum entsprechenden i_ν, und solange b_{n+1} und c_{n+1} dieselben voneinander verschiedenen Werte behalten, gehört das Element $a_1 \ldots a_n\, (c_{n+1} + 1)\, 111 \ldots$ zum entsprechenden i_ν; damit man mithin sicher sei, dass jedes dieser beiden Elemente nicht zu allen i_ν gehört, muss sich ein gewisses i_ν angeben lassen, für welches b_{n+1} existiert, während, falls noch immer $b_{n+1} \neq c_{n+1}$, entweder b_{n+1} abgenommen, oder c_{n+1} zugenommen hat. Weil dieselbe Schlussfolgerung sich beliebig wiederholen lässt, muss man ein weiteres i_ν angeben können, für welches $b_{n+1} = c_{n+1} = a_{n+1}$ geworden ist, dessen Endelemente also die Form $a_1 \ldots a_{n+m}\, b_{n+m+1} \ldots$ (bzw. $a_1 \ldots a_{n+m}$) und $a_1 \ldots a_{n+m}\, c_{n+m+1} \ldots$ besitzen. Indem wir mit diesem Intervall in derselben Weise verfahren wie mit i_1 und diesen Prozess unbeschränkt fortsetzen, erzeugen wir eine unbeschränkt fortsetzbare Folge $a_1\, a_2\, a_3 \ldots$,

welche aber ein zu *allen* i_ν gehöriges Element darstellen würde, womit wir wieder zu einem Widerspruch gelangt sind, und die betrachtete geordnete Menge als *abgeschlossen* erkannt haben. Schliesslich ist das Element $a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ Grenzelement der steigenden Fundamentalreihe a_1; $a_1\, a_2$; $a_1\, a_2\, a_3$; . . ., und das Element $a_1\, a_2 \ldots a_n$ Grenzelement der fallenden Fundamentalreihe $a_1 \ldots a_n 1$; $a_1 \ldots a_n 2$; $a_1 \ldots a_n 3$; . . ., womit die Menge sich als *in sich dicht* herausgestellt hat.

Die Ordinalzahl der Menge der rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 (exklusive 0 und 1) in ihrer natürlichen Rangordnung wird mit η bezeichnet. Wir werden zeigen, dass *jede abzählbar unendliche, im engeren Sinne überall dichte geordnete Species die Ordinalzahl* η *besitzt.*

Sei M die gegebene geordnete Species, m_1, m_2, m_3, . . . ihre Elemente, R die auf Grund der natürlichen Rangordnung geordnete Menge der rationalen Zahlen zwischen 0 und 1, r_1, r_2, r_3, . . . ihre Elemente, wobei die Indizes auf Grund einer (z.B. nach S. 7 hergestellten) eineindeutigen Beziehung zwischen R und der Folge ζ bestimmt sind. Dem Elemente m_1 ordnen wir das Element r_1 zu; sodann dem Elemente r_2 dasjenige mit m'_2 zu bezeichnende Element m_ν mit möglichst kleinem Index ν, das zu m_1 dieselbe ordnende Relation besitzt, wie r_2 zu r_1; sodann dem Elemente m'_3 (welches mit m_3 oder mit m_2 identisch ist, je nachdem wir m_2 schon benutzt haben oder nicht) dasjenige mit r'_3 zu bezeichnende Element r_ν mit möglichst kleinem Index ν, das zu r_1 und r_2 dieselben ordnenden Relationen besitzt, wie m'_3 zu m_1 und m'_2; sodann dem Elemente r'_4 (d.h. dem noch nicht benutzten Elemente r_ν mit möglichst kleinem Index ν) dasjenige mit m'_4 zu bezeichnende Element m_ν mit möglichst kleinem Index ν, das zu m_1, m'_2 und m'_3 dieselben ordnenden Relationen besitzt, wie r'_4 zu r_1, r_2 und r'_3. Indem wir in dieser Weise fortfahren, bestimmen wir zwischen M und R eine solche eineindeutige Beziehung, welche die beiden Species als ähnlich erkennen lässt.

Eine geordnete Species heisst *differenziert geordnet*, wenn bezüglich zweier willkürlicher Elemente a und b entweder Sicherheit erlangt werden kann, dass zwischen ihnen kein weiteres Element liegt, oder ein zwischen a und b liegendes Element angegeben werden kann. Wir werden zeigen, dass *jede abzählbar unendliche, differenziert geordnete Species* M *sich als abtrennbare Teilspecies einer geordneten Species der Ordinalzahl* η *auffassen lässt.*

Die obige Konstruktion einer eineindeutigen Beziehung zwischen M und R lässt sich nämlich auf diesen Fall erweitern, wenn wir

nur jedesmal dass in M zu einem vorgegebenen Elemente r'_ν kein die erforderten ordnenden Relationen besitzendes Element m'_ν existiert, ein solches Element der Species M hinzufügen.

Die Menge T der endlichen Ternalbrüche zwischen 0 und 1 (exklusive 0 und 1) der Form

$$\frac{2}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_1+a_2}}+\ldots+\frac{2}{3^{a_1+a_2+\ldots a_n}} \text{ oder } \frac{2}{3^{a_1}}+\ldots+\frac{2}{3^{a_1+\ldots a_{n-1}}}+\frac{1}{3^{a_1+\ldots a_n}}$$

in ihrer natürlichen Rangordnung besitzt, wie man unmittelbar einsieht, die Ordinalzahl $2.\ \eta$. Man hat nun den Satz: *jede abzählbar unendliche geordnete Species S, von der jedes Element a entweder rechtes Endelement eines freien Intervalls ist, während zu a spätere Elemente existieren und zwischen a und einem willkürlichen späteren Elemente andere Elemente liegen, oder linkes Endelement eines freien Intervalls ist, während zu a frühere Elemente existieren und zwischen a und einem willkürlichen früheren Elemente andere Elemente liegen, besitzt die Ordinalzahl* $2.\ \eta$.

Man kann nämlich nach der obigen Methode zwischen der Species der freien Intervalle von T und der Species der freien Intervalle von S eine eineindeutige Beziehung herstellen, welche die beiden Intervallspecies als ähnlich erkennen lässt.

Die Ordinalzahl der Menge C, geordnet auf Grund der natürlichen Rangordnung der entsprechenden reellen Zahlen zwischen 0 und 1 (diese also inklusive 1 aber exklusive 0), wird mit ϑ_1 und die Ordinalzahl $1+\vartheta_1$ mit ϑ bezeichnet. Es besteht der Satz: *jede geordnete Species P, welche eine solche abzählbar unendliche, im engeren Sinne überall dichte Teilspecies M enthält, dass zwischen je zwei Elementen von P Elemente von M liegen, dass die Species der vor einem willkürlichen Elemente p von P liegenden Elemente von M eine abtrennbare Teilspecies von M ist, welche entweder elementlos ist, oder wenigstens ein bestimmbares Element besitzt, und dass zu jeder der Ordnungseigenschaft genügenden Fundamentalreihe von Relationen „nach" oder „nicht nach" zu den Elementen von M ein diese Relationen erfüllendes Element von P konstruiert werden kann, besitzt die Ordinalzahl* ϑ.

Die Species M lässt sich nämlich nach dem obigen Verfahren auf die der natürlichen Rangordnung entsprechend geordnete Menge D der endlichen Dualbrüche zwischen 0 und 1 ähnlich abbilden. Wenn wir nun jedem Elemente γ der Menge $\mathfrak{S}(E, C)$, wo C in obiger Weise geordnet ist und E nur ein einziges, allen Elementen von C vorangehendes Element besitzt, dasjenige Element α von P zuordnen, welches zu den Elementen von M dieselben Relationen

„nach" oder „nicht nach" besitzt, wie γ zu den entsprechenden Elementen von D, so erzeugen wir eine eineindentige Beziehung zwischen $\mathfrak{S}(E, C)$ und P, welche diese beiden Species als ähnlich darstellt.

Unter der Menge S werden wir verstehen die Menge der Ternalbrüche der Form

$$\frac{s_1}{3} + \frac{s_2}{3^2} + \frac{s_3}{3^3} + \cdots,$$

wo für jedes s_ν entweder die Ziffer 0 oder die Ziffer 2 gewählt werden darf, und die Ordinalzahl der auf Grund der natürlichen Rangordnung geordneten Menge S werden wir mit ζ bezeichnen. Es gilt der Satz: *jede nirgends dichte geordnete Species P, deren Species I der freien Intervalle abzählbar unendlich und im engeren Sinne überall dicht ist, während für ein willkürliches Element p von P und ein willkürliches Intervall i von I mit dem linken Endelement i_1 und dem rechten Endelement i_2 sich entscheiden lässt, entweder dass p vor i, d.h. nicht nach i_1, oder dass p nach i, d.h. nicht vor i_2 liegt, und zu jeder der Ordnungseigenschaft genügenden Fundamentalreihe von ordnenden Relationen zu den Intervallen von I ein diese Relationen erfüllendes Element von P konstruiert werden kann, besitzt die Ordinalzahl ζ.*

Die Species Q der Endelemente der freien Intervalle lässt sich nämlich auf die obige geordnete Menge T von endlichen Ternalbrüchen ähnlich abbilden. Wenn wir nun jedem Elemente γ von S dasjenige Element α von P zuordnen, welches zu den Intervallen von I dieselben ordnenden Relationen besitzt, wie γ zu den entsprechenden freien Intervallen von T, so erzeugen wir eine eineindeutige Beziehung zwischen S und P, welche diese beiden Species als ähnlich darstellt.

Als Beispiel einer Species P der letztgenannten Art können wir wählen die Menge $G_{n_1 n_2 n_3 \ldots}$ der Fundamentalreihen $z_1 z_2 z_3 \ldots$ von solchen positiven ganzen Zahlen, von denen die erste nicht grösser als n_1, die zweite nicht grösser als n_2, die dritte nicht grösser als n_3, usw. ist, wenn wir diese Fundamentalreihen auf Grund der natürlichen Rangordnung der entsprechenden reellen Zahlen

$$\frac{2(z_1-1)}{2n_1-1} + \frac{2(z_2-1)}{(2n_1-1)(2n_2-1)} + \frac{2(z_3-1)}{2n_1-1)(2n_2-1)(2n_3-1)} + \cdots$$

ordnen. Alsdann entspricht jedes Paar von Endelementen eines Intervalles von I einem aus den Zahlen

$$\frac{2(z_1-1)}{2n_1-1}+\frac{2(z_2-1)}{(2n_1-1)(2n_2-1)}+\cdots+\frac{2z_\nu-1}{(2n_1-1)\ldots(2n_\nu-1)}$$

und

$$\frac{2(z_1-1)}{2n_1-1}+\frac{2(z_2-1)}{(2n_1-1)(2n_2-1)}+\cdots+\frac{2z_\nu}{(2n_1-1)\ldots(2n_\nu-1)}$$

gebildeten Zahlenpaar, wo z_1 nicht grösser als $n_1, \ldots,$ $z_{\nu-1}$ nicht grösser als $n_{\nu-1}$, z_ν aber nicht grösser als $n_\nu-1$ ist. Aus der ähnlichen Beziehung zwischen dieser Menge P und der Menge S folgern wir beiläufig, dass die Mengen $G_{n_1 n_2 n_3\ldots}$ und $G_{222\ldots}$ gleichmächtig sind.

3. *Die wohlgeordneten Ordinalzahlen.*

Die *wohlgeordneten Species* sind geordnete Species, welche auf Grund folgender Annahmen definiert sind:

1. Eine Species ohne Element oder mit einem einzigen Element ist eine wohlgeordnete Species, und wird insbesondere eine *Urspecies* genannt.

2. Aus bekannten wohlgeordneten Species werden weitere wohlgeordnete Species hergeleitet durch die beiden *erzeugenden Operationen*, welche in der Addition von zwei bzw. von einer Fundamentalreihe von bekannten wohlgeordneten Species bestehen. [1])

Jede wohlgeordnete Species, welche bei der Herstellung der wohlgeordneten Species F eine Rolle gespielt hat, heisst eine *konstruktive Unterspecies* von F. Diejenigen konstruktiven Unterspecies, welche bei der letzten erzeugenden Operation von F eine Rolle gespielt haben, heissen *konstruktive Unterspecies erster Ordnung* und werden durch einen Index ν voneinander unterschieden, also mit F_1 und F_2 bzw. mit $F_1, F_2, F_3, \ldots$ bezeichnet. Die konstruktiven Unterspecies erster Ordnung einer F_ν heissen *konstruktive Unterspecies zweiter Ordnung* von F, und werden mit $F_{\nu 1}$ und $F_{\nu 2}$ bzw.

[1]) Jede wohlgeordnete Species lässt sich ebenfalls mittels der beiden *erzeugenden Operationen zweiter Art* herstellen, welche zu einer bekannten wohlgeordneten Species ein einziges Element bzw. eine Fundamentalreihe von bekannten wohlgeordneten Species addieren. Wenn nämlich die Konstruktion sowohl von ξ_1 wie von ξ_2 sich auf die beiden erzeugenden Operationen zweiter Art zurückführen lässt, so lässt auch die Addition von ξ_2 zu ξ_1, d. h. die Konstruktion von $\xi_1+\xi_2$, sich auf die beiden erzeugenden Operationen zweiter Art zurückführen. Und wenn die Konstruktion jedes ξ_ν $(\nu=1,2,3,\ldots)$ sich auf die beiden erzeugenden Operationen zweiter Art zurückführen lässt, so lässt auch die Addition von $\sum_{\nu=2}^{\infty}\xi_\nu$ zu ξ_1, d. h. die Konstruktion von $\sum_{\nu=1}^{\infty}\xi_\nu$, sich auf die beiden erzeugenden Operationen zweiter Art zurückführen.

mit $F_{\nu 1}$, $F_{\nu 2}$, $F_{\nu 3}$, ... bezeichnet. Die konstruktiven Unterspecies erster Ordnung einer $F_{\nu_1 \ldots \nu_m}$ heissen *konstruktive Unterspecies* $(m+1)$*-ter Ordnung*, und werden mit $F_{\nu_1 \ldots \nu_m 1}$ und $F_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}$ bzw. mit $F_{\nu_1 \ldots \nu_m 1}$, $F_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}$, $F_{\nu_1 \ldots \nu_m 3}$, ... bezeichnet. Jede bei der Herstellung von F benutzte Urspecies erscheint in dieser Weise als eine *konstruktive Unterspecies endlicher Ordnung* von F (obgleich es natürlich möglich ist, dass diese Ordnung für passend gewählte Urspecies von F unbeschränkt wächst). Um dies einzusehen, braucht man nur die *induktive Methode* anzuwenden, d.h. zu beachten, dass F mittels einer endlichen Zahl von erzeugenden Operationen konstruiert ist, und dass die fragliche Eigenschaft, wenn sie für ξ_1 und ξ_2 bewiesen ist, ebenfalls für $\xi_1 + \xi_2$ gilt, und wenn sie für jedes ξ_ν bewiesen ist, ebenfalls für $\sum_{\nu=1}^{\infty} \xi_\nu$ gilt.

1. Es sei

$$F_{\nu_1 \ldots \nu_m} = F_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + F_{\nu_1 \ldots \nu_m 2};$$

$$F_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} = \sum_{n=1}^{r_1} F^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1};$$

$$F_{\nu_1 \ldots \nu_m 2} = \sum_{n=1}^{r_2} F^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 2};$$

alsdann ist

$$F_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \sum_{n=1}^{r_1-1} F^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + (F^{(r_1)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + F'_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}) + \sum_{n=2}^{r_2} F^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{r_1+r_2-1} F^{(k)}_{\nu_1 \ldots \nu_m}.$$

2. Es sei

$$F_{\nu_1 \ldots \nu_m} = F_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + F_{\nu_1 \ldots \nu_m 2};$$

$$F_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} = \sum_{n=1}^{r} F^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1};$$

$$F_{\nu_1 \ldots \nu_m 2} = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 2};$$

alsdann ist

$$F_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \sum_{n=1}^{r-1} F^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + (F^{(r)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + F'_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}) + \sum_{n=2}^{\infty} F^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}_{\nu_1 \ldots \nu_m}.$$

3. Es sei

$$F_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{\nu_1 \ldots \nu_m \nu};$$

$$F_{\nu_1 \ldots \nu_m \nu} = \sum_{n=1}^{r_\nu} F^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m \nu} \quad (\nu = 1, \ldots p);$$

alsdann ist

$$F_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \sum_{n=1}^{r_1-1} F^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + (F^{(r_1)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + F'_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}) + \sum_{n=2}^{r_2-1} F^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 2} +$$

$$+ (F^{(r_2)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 2} + F'_{\nu_1 \ldots \nu_m 3}) + \ldots + (F^{(r_{p-1})}_{\nu_1 \ldots \nu_m, p-1} +$$

$$+ F'_{\nu_1 \ldots \nu_m p}) + \sum_{n=2}^{r_p-1} F^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m p} + (F^{(r_p)}_{\nu_1 \ldots \nu_m p} + \sum_{\nu=p+1}^{\infty} F_{\nu_1, \ldots \nu_m \nu}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{r_1+\ldots+r_p-p+1} F^{(k)}_{\nu_1 \ldots \nu_m}.$$

4. Es sei

$$F_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{\nu_1 \ldots \nu_m \nu};$$

$$F_{\nu_1 \ldots \nu_m \nu} = \sum_{n=1}^{r_\nu} F^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m \nu};$$

alsdann ist

$$F_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \sum_{n=1}^{r_1-1} F^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + \sum_{h=2}^{\infty} \left[(F^{(r_h-1)}_{\nu_1 \ldots \nu_m, h-1} + F'_{\nu_1 \ldots \nu_m h}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{r_h-1} F^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m h} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}_{\nu_1 \ldots \nu_m}.$$

Um eine wohlgeordnete Species F als Summe von einer endlichen Zahl oder einer Fundamentalreihe von wohlgeordneten Species $F^{(n)}$, welche *keine* konstruktiven Unterspecies von F sind, darzustellen, ist der einzige Weg, dass man gewisse konstruktive Unterspecies σ beliebiger Ordnung von F in eine endliche oder abzählbar unendliche Summe von Teilspecies ${}_\sigma\tau_\nu$ zerlegt, deren jede entweder eine konstruktive Unterspecies erster Ordnung van σ ist, oder durch Assoziation von solchen entsteht; die erste konstruktive Unterspecies erster Ordnung von σ, welche zu ${}_\sigma\tau_{\nu+1}$ gehört, werde als ν^{te} *Schnittspecies* von σ bezeichnet; die auf Grund der Rangordnung in F geordnete Species von allen in F vorhandenen Schnittspecies muss

entweder endlich gewählt sein, oder eine solche Fundamentalreihe bilden, dass vor einer willkürlichen konstruktiven Unterspecies von F nur eine bestimmte endliche Zahl von Schnittspecies liegt.

Alsdann kann man auf Grund der obigen Formeln 1—4 die Zerlegungen der σ auf diejenigen konstruktiven Unterspecies von F übertragen, welche die σ als Unterspecies enthalten, und in dieser Weise fortfahrend, schliesslich eine Zerlegung von F in eine Summe von $F^{(\alpha)}$, welche *keine* konstruktiven Unterspecies von F sind, und *Unterspecies* von F genannt werden, erlangen. Indem wir denselben Prozess auf die $F^{(\alpha)}$ anwenden und in dieser Weise beliebig fortfahren, gelangen wir zu mannigfachen auf Grund der beiden erzeugenden Operationen möglichen *neuen Erzeugungsarten* von F.

Wenn F, F' und F'' wohlgeordnete Species sind, und $F = F' + F''$, so heisst F' ein *Anfangssegment* oder ein *Abschnitt* von F, F'' ein *Endsegment* oder ein *Rest* von F. Wir schreiben auch: $F'' = F - F'$ und nennen F'' die *Differenz* von F und F'. Wenn F einen Abschnitt $i(F)$ mit einem einzigen Element besitzt, so heisst sie eine *kondensierte* wohlgeordnete Species, und $h(F) = F - i(F)$ wird der *Hauptrest* von F genannt. Ein Abschnitt von F, dem ein wenigstens ein Element besitzender Rest entspricht, heisst ein *echter Abschnitt* von F; der zugehörige Rest ein *echter Rest*.

Aus der Definition der wohlgeordneten Species folgt, dass *die Summe einer endlichen Zahl oder einer Fundamentalreihe von wohlgeordneten Ordinalzahlen wieder eine wohlgeordnete Ordinalzahl ist.* Weil, wie man leicht einsieht, das Produkt von zwei elementefremden wohlgeordneten Species F_1 und F_2 wieder eine wohlgeordnete Species $F_1 . F_2$ ist (aus F_2 wird nämlich eine mit $F_1 . F_2$ ähnliche Species erhalten, indem man die Elemente von F_2 durch mit F_1 ähnliche Species ersetzt, sodass mit der Erzeugung von F_2 eine Erzeugung von $F_1 . F_2$ parallel läuft), so haben wir weiter, dass *das Produkt einer endlichen Zahl von wohlgeordneten Ordinalzahlen* $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ *wieder eine wohlgeordnete Ordinalzahl* $\beta_1 . \beta_2 \ldots \beta_n$ *ist.* Weil mit einer neuen Erzeugungsart eines willkürlichen β_ν eine neue Erzeugungsart von $\beta_1 . \beta_2 \ldots \beta_n$ parallel läuft, so liefern verschiedene Erzeugungsarten der β_ν gleiche Ordinalzahlen $\beta_1 . \beta_2 \ldots \beta_n$.

Sei α eine kondensierte wohlgeordnete Ordinalzahl, β eine willkürliche wohlgeordnete Ordinalzahl. Alsdann wird die *Potenz* α^β, in welcher α das *Argument*, β der *Exponent* heisst, auf Grund der folgenden Festsetzungen definiert:

$$\alpha^0 = 1; \qquad \alpha^1 = \alpha;$$

wenn $\beta = \beta_1 + \beta_2$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, so ist

$$\alpha^\beta = \alpha^{\beta_1} \cdot \alpha^{\beta_2} = \alpha^{\beta_1} + \alpha^{\beta_1} \cdot h(\alpha^{\beta_2});$$

wenn $\beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, so ist

$$\alpha^\beta = \alpha^{\beta_1} + \alpha^{\beta_1} \cdot h(\alpha^{\beta_2}) + \alpha^{\beta_1+\beta_2} \cdot h(\alpha^{\beta_3}) + \alpha^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} \cdot h(\alpha^{\beta_4}) + \ldots$$

Aus diesen Festsetzungen folgt, dass α^β wiederum eine kondensierte wohlgeordnete Ordinalzahl ist.

Es sei

$$\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \beta_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + \beta_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}$$

auf Grund der ersten erzeugenden Operation, und

$$\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} = \beta'_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + \beta''_{\nu_1 \ldots \nu_m 1},$$

und es sei die Formel

$$\alpha^{\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m 1}} = \alpha^{\beta'_{\nu_1 \ldots \nu_m 1}} \cdot \alpha^{\beta''_{\nu_1 \ldots \nu_m 1}}$$

bewiesen. Alsdann ist

$$\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \beta'_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + (\beta''_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + \beta_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}) = \beta'_{\nu_1 \ldots \nu_m} + \beta''_{\nu_1 \ldots \nu_m},$$

und wir haben

$$\alpha^{\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m}} = \alpha^{\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m 1}} \cdot \alpha^{\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}} = \alpha^{\beta'_{\nu_1 \ldots \nu_m 1}} \cdot \alpha^{\beta''_{\nu_1 \ldots \nu_m 1}} \cdot \alpha^{\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}} =$$

$$= \alpha^{\beta'_{\nu_1 \ldots \nu_m 1}} \cdot (\alpha^{\beta''_{\nu_1 \ldots \nu_m 1}} \cdot \alpha^{\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}}) = \alpha^{\beta'_{\nu_1 \ldots \nu_m}} \cdot \alpha^{\beta''_{\nu_1 \ldots \nu_m}}.$$

Es sei

$$\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_{\nu_1 \ldots \nu_m \nu}$$

auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, und

$$\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m p} = \beta'_{\nu_1 \ldots \nu_m p} + \beta''_{\nu_1 \ldots \nu_m p},$$

und es sei die Formel

$$\alpha^{\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m p}} = \alpha^{\beta'_{\nu_1 \ldots \nu_m p}} \cdot \alpha^{\beta''_{\nu_1 \ldots \nu_m p}}$$

bewiesen. Alsdann ist

$$\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \left(\sum_{\nu=1}^{p-1} \beta_{\nu_1 \ldots \nu_m \nu} + \beta'_{\nu_1 \ldots \nu_m p}\right) + \left(\beta''_{\nu_1 \ldots \nu_m p} + \sum_{\nu=p+1}^{\infty} \beta_{\nu_1 \ldots \nu_m \nu}\right) =$$

$$= \beta'_{\nu_1 \ldots \nu_m} + \beta''_{\nu_1 \ldots \nu_m},$$

und wir haben

$$\alpha^{\beta_{\nu_1..\nu_m}} = \alpha^{\sum_{\nu=1}^{p-1} \beta_{\nu_1..\nu_m\nu}} \cdot \alpha^{\beta'_{\nu_1..\nu_m p}} \cdot \alpha^{\beta''_{\nu_1..\nu_m p}} \cdot \alpha^{\sum_{\nu=p+1}^{\infty} \beta_{\nu_1..\nu_m\nu}} =$$

$$= (\alpha^{\sum_{\nu=1}^{p-1} \beta_{\nu_1..\nu_m\nu}} \cdot \alpha^{\beta'_{\nu_1..\nu_m p}}) (\alpha^{\beta''_{\nu_1..\nu_m p}} \cdot \alpha^{\sum_{\nu=p+1}^{\infty} \beta_{\nu_1..\nu_m\nu}}) =$$

$$= \alpha^{\beta'_{\nu_1..\nu_m}} \cdot \alpha^{\beta''_{\nu_1..\nu_m}}.$$

Indem wir in dieser Weise hinreichend oft zu einer konstruktiven Unterzahl geringerer Ordnung von β übergehen, beweisen wir auf Grund des vorstehenden allgemein den Satz, dass *für* $\beta = \beta' + \beta''$, $\alpha^{\beta} = \alpha^{\beta'} \cdot \alpha^{\beta''}$, *auch wenn* β' *und* β'' *keine konstruktiven Unterzahlen von* β *sind.*

Es sei

$$\beta_{\nu_1..\nu_m} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_{\nu_1..\nu_m\nu}$$

auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, und

$$\beta_{\nu_1..\nu_m\nu} = \sum_{n=1}^{r_\nu} \beta^{(n)}_{\nu_1..\nu_m\nu};$$

mithin einerseits

$$\beta_{\nu_1..\nu_m} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{r_\nu} \beta^{(n)}_{\nu_1..\nu_m\nu} = \sum_{h=1}^{\infty}{}_1 \beta^{(h)}_{\nu_1..\nu_m},$$

andererseits

$$\beta_{\nu_1..\nu_m} = \sum_{n=1}^{r_1-1} \beta^{(n)}_{\nu_1..\nu_m 1} + \sum_{s=2}^{\infty} [(\beta^{(r_s-1)}_{\nu_1..\nu_m,\, s-1} + \beta'_{\nu_1..\nu_m s}) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{r_s-1} \beta^{(n)}_{\nu_1..\nu_m s}] = \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{(k)}_{\nu_1..\nu_m}.$$

Alsdann ist

$$\alpha^{\sum_{h=1}^{\infty}{}_1 \beta^{(h)}_{\nu_1..\nu_m}}$$

auf Grund des eben bewiesenen Satzes gleich

$$\alpha^{\beta_{\nu_1..\nu_m}},$$

und auf Grund der Definition des Potenzbegriffes gleich

$$\alpha^{\sum_{k=1}^{\infty} \beta^{(k)}_{\nu_1 \ldots \nu_m}}.$$

Mithin ist auch

$$\alpha^{\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m}} = \alpha^{\sum_{k=1}^{\infty} \beta^{(k)}_{\nu_1 \ldots \nu_m}} = \alpha^{\beta'_{\nu_1 \ldots \nu_m}} + \alpha^{\beta'_{\nu_1 \ldots \nu_m}} . h\,(\alpha^{\beta''_{\nu_1 \ldots \nu_m}}) +$$

$$+ \alpha^{\beta'_{\nu_1 \ldots \nu_m} + \beta''_{\nu_1 \ldots \nu_m}} . h\,(\alpha^{\beta'''_{\nu_1 \ldots \nu_m}}) + \ldots .$$

Es sei

$$\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \beta_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + \beta_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}$$

auf Grund der ersten erzeugenden Operation, weiter

$$\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} = \sum_{n=1}^{r} \beta^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1}, \text{ und } \beta_{\nu_1 \ldots \nu_m 2} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 2},$$

und es sei die Formel

$$\alpha^{\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}} = \alpha^{\sum_{n=1}^{\infty} \beta^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}}$$

bewiesen. Alsdann ist

$$\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \sum_{n=1}^{r-1} \beta^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + (\beta^{(r)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + \beta'_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}) + \sum_{n=2}^{\infty} \beta^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{(k)}_{\nu_1 \ldots \nu_m},$$

und wir haben

$$\alpha^{\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m}} = \alpha^{\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m 1}} . \alpha^{\beta_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}} = \alpha^{\sum_{n=1}^{r} \beta^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1}} . \alpha^{\sum_{n=1}^{\infty} \beta^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}} =$$

$$= \alpha^{\sum_{n=1}^{r} \beta^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{(n)}_{\nu_1 \ldots \nu_m 2}} =$$

(auf Grund der Definition des Potenzbegriffes)

$$= \alpha^{\sum_{k=1}^{\infty} \beta^{(k)}_{\nu_1 \ldots \nu_m}}.$$

Indem wir nun anfangen mit der Herstellung der *letzten konstruktiven Unterzahl* höchster Ordnung von β mittels der zweiten erzeugenden Operation, und sodann mittels der ersten erzeugenden

Operation hinreichend oft zu einer letzten konstruktiven Unterzahl geringerer Ordnung von β heraufsteigen, beweisen wir auf Grund des vorstehenden allgemein den Satz, dass *für* $\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{(n)}$, $\alpha^{\beta} = \alpha^{\beta'} + \alpha^{\beta'} \cdot h(\alpha^{\beta''}) + \alpha^{\beta'+\beta''} \cdot h(\alpha^{\beta'''}) + \ldots$, *auch wenn die* $\beta^{(n)}$ *keine konstruktiven Unterzahlen von* β *sind.*

Aus den beiden zuletzt bewiesenen Sätzen folgt weiter, dass die Konstruktion von α^{β} *auf Grund von verschiedenen Erzeugungsarten von* β zu gleichen wohlgeordneten Ordinalzahlen führt. Weil verschiedene Erzeugungsarten der Faktoren eines Produktes gleiche Ordinalzahlen für das Produkt liefern, so führt auch die Konstruktion von α^{β} *auf Grund von verschiedenen Erzeugungsarten von* α zu gleichen wohlgeordneten Ordinalzahlen.

Mittels der induktiven Methode beweisen wir noch den Satz:

$$(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma}.$$

Es sei nämlich $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, und es seien die Formeln

$$(\alpha^{\beta})^{\gamma_1} = \alpha^{\beta\gamma_1} \text{ und } (\alpha^{\beta})^{\gamma_2} = \alpha^{\beta\gamma_2}$$

bewiesen. Alsdann ist

$$\alpha^{\beta\gamma} = \alpha^{\beta\gamma_1+\beta\gamma_2} = \alpha^{\beta\gamma_1} \cdot \alpha^{\beta\gamma_2} = (\alpha^{\beta})^{\gamma_1} \cdot (\alpha^{\beta})^{\gamma_2} = (\alpha^{\beta})^{\gamma_1+\gamma_2} = (\alpha^{\beta})^{\gamma}.$$

Es sei weiter $\gamma = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, und es seien die Formeln

$$(\alpha^{\beta})^{\gamma_\nu} = \alpha^{\beta\gamma_\nu},$$

mithin auch die Formeln

$$(\alpha^{\beta})^{\sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu} = \alpha^{\beta \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu}$$

bewiesen. Alsdann ist

$$\alpha^{\beta\gamma} = \alpha^{\beta \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu} = \alpha^{\beta\gamma_1} + \alpha^{\beta\gamma_1} \cdot h(\alpha^{\beta\gamma_2}) + \alpha^{\beta\gamma_1+\beta\gamma_2} \cdot h(\alpha^{\beta\gamma_3}) + \ldots =$$

$$= (\alpha^{\beta})^{\gamma_1} + (\alpha^{\beta})^{\gamma_1} \cdot h[(\alpha^{\beta})^{\gamma_2}] + (\alpha^{\beta})^{\gamma_1+\gamma_2} \cdot h[(\alpha^{\beta})^{\gamma_3}] + \ldots =$$

$$= (\alpha^{\beta})^{\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu} = (\alpha^{\beta})^{\gamma}.$$

Mittels der induktiven Methode beweisen wir leicht folgende Sätze:

1. *Ein Gesetz, welches in einer wohlgeordneten Species F eine konstruktive Unterspecies F' bestimmt, und jeder schon bestimmten konstruktiven Unterspecies $F^{(\nu)}$ entweder die Hemmung des Prozesses, oder eine in F vor $F^{(\nu)}$ liegende konstruktive Unterspecies $F^{(\nu+1)}$ zuordnet, bestimmt sicher eine endliche Zahl n und eine zugehörige konstruktive Unterspecies $F^{(n)}$, welcher es die Hemmung des Prozesses zuordnet.* Insbesondere gilt diese Eigenschaft, wenn jedes $F^{(\nu)}$ ein *Element* von F ist, und hieraus folgern wir unmittelbar die Unmöglichkeit, jedem Elemente von F unter Erhaltung der ordnenden Relationen ein verschiedenes Element eines echten Abschnittes F_1 von F zuzuordnen.

2. *Jede wohlgeordnete Species ist zählbar.* Mithin ist die Species derjenigen Ziffernkomplexe, welche als Indizeskomplex eines als konstruktive Unterspecies aufgefassten Elementes auftreten, eine *Menge*, sodass *zu jeder wohlgeordneten Species eine zählbare geordnete Menge von endlichen Ziffernkomplexen gehört, welche die Eigenschaft besitzt, dass jedes Gesetz, welches in ihr einen Ziffernkomplex z' bestimmt, und jedem schon bestimmten Ziffernkomplex $z^{(\nu)}$ entweder die Hemmung des Prozesses, oder einen vor $z^{(\nu)}$ liegenden Ziffernkomplex $z^{(\nu+1)}$ zuordnet, sicher eine endliche Zahl n und einen zugehörigen Ziffernkomplex $z^{(n)}$, dem die Hemmung des Prozesses zugeordnet ist, bestimmt.*

Wenn die wohlgeordnete Species F' einem echten Abschnitt der wohlgeordneten Species F'' ähnlich ist, so schreiben wir $F' < F''$ oder $F'' > F'$, und sagen, dass F'' *grösser* ist als F', und dass F' *kleiner* ist als F''. Schreiben wir noch $F' = F''$, wenn F' und F'' ähnlich sind, und $F' < F''$ oder $F'' \geq F'$, wenn F' einem Abschnitte von F'' ähnlich ist, so gelangen wir, indem wir die Folgerung des obigen Satzes 1 berücksichtigen, sofort zu den folgenden Eigenschaften:

1. *Die Relationen $F' < F''$ und $F' \geq F''$ schliessen einander aus.*

2. *Aus $F' < F''$ und $F'' < F'''$ ebenso wie aus $F' < F''$ und $F'' < F'''$ folgt $F' < F'''$.*

3. *Aus $F' = F''$ und $F'' = F'''$ folgt $F' = F'''$.*

4. *Aus $F' \leq F''$ und $F'' < F'''$ folgt $F' < F'''$.*

5. *Die Relationen $F' < F''$ und $G' < G''$ schliessen zusammen die Relation $F' + G' \geq F'' + G''$ aus.*

6. *Die Relationen $F' < F''$ und $G' < G''$ schliessen zusammen die Relation $F' + G' > F'' + G''$ aus.*

Wenn jedem Elemente der wohlgeordneten Species F' ein verschiedenes Element eines echten Abschnittes der wohlgeordneten

Species F'' unter Erhaltung der ordnenden Relationen zugeordnet ist, so schreiben wir $F' \dot{<} F''$ oder $F'' \dot{>} F'$, und sagen, dass F'' *unbestimmt grösser* ist als F' und dass F' *unbestimmt kleiner* ist als F''. Schreiben wir noch $F' \dot{\leq} F''$ oder $F'' \dot{\geq} F'$, wenn jedem Elemente von F' unter Erhaltung der ordnenden Relationen ein verschiedenes Element von F'' zugeordnet ist, so gelten folgende Eigenschaften:

1. *Die Relationen* $F' \dot{<} F''$ *und* $F' \dot{\geq} F''$ *schliessen einander aus.*
2. *Aus* $F' \dot{<} F''$ *und* $F'' \dot{\leq} F'''$ *sowie aus* $F' \dot{<} F''$ *und* $F'' \dot{<} F'''$ *folgt* $F' \dot{<} F'''$.
3. *Aus* $F' \dot{\leq} F''$ *und* $F'' \dot{\leq} F'''$ *folgt* $F' \dot{\leq} F'''$.
4. *Aus* $F' \dot{\leq} F''$ *und* $G' \dot{\leq} G''$ *folgt* $F' + G' \dot{\leq} F'' + G''$.
5. *Aus* $F' \dot{\leq} F''$ *und* $G' \dot{\leq} G''$ *folgt* $F' + G' \dot{\leq} F'' + G''$.

Unter den *wohlgeordneten Ordinalzahlen des ersten Bereichs* verstehen wir die endlichen Ordinalzahlen, inklusive 0. Weil jeder Abschnitt einer endlichen Ordinalzahl wiederum eine endliche Ordinalzahl ist, so *ist der erste Bereich wohlgeordneter Ordinalzahlen ununterbrochen*, d.h. es kann keine wohlgeordnete Ordinalzahl existieren, welche nicht zum ersten Bereich gehört, und kleiner ist als eine gewisse wohlgeordnete Ordinalzahl des ersten Bereichs.

Eine wohlgeordnete Species α heisst *vollständig induziert in bezug auf den ersten Bereich*, wenn sie selbst, sowie ihre konstruktiven Unterspecies beliebiger Ordnung, sich in der Form $a_\alpha + r_\alpha$ darstellen lässt, wo r_α eine Ordinalzahl des ersten Bereichs besitzt, während a_α entweder fortfällt, oder jedes ihrer echten Endsegmente eine Ordinalzahl $\geq \omega$ besitzt. Dies wird erreicht, wenn bei jeder Anwendung der zweiten erzeugenden Operation $F = F_1 + F_2 + \ldots$ die betreffende Fundamentalreihe *in bezug auf den ersten Bereich vollständig induzierbar ist*, d.h. *erstens* entweder eine Fundamentalreihe $\nu_1, \nu_2, \ldots$ existiert, für welche $a_{F_{\nu_1}}, a_{F_{\nu_2}}, \ldots$ *nicht* fortfallen, oder ein solches n_1 angegeben werden kann, dass a_{F_m} für $m > n_1$ fortfällt, *zweitens* im letzteren Falle entweder eine Fundamentalreihe $m_1, m_2, \ldots$ $(m_\nu > n_1)$ existiert, für welche $r_{F_{m_1}}, r_{F_{m_2}}, \ldots$ *nicht* fortfallen, oder ein solches n_2 angegeben werden kann, dass r_{F_m} für $m > n_2$ fortfällt.

Eine wohlgeordnete Species α heisst *unbestimmt induziert in bezug auf den ersten Bereich*, wenn sie selbst, sowie ihre konstruktiven Unterspecies beliebiger Ordnung, sich in der Form $u_\alpha + o_\alpha$ darstellen lässt, wo o_α eine Ordinalzahl des ersten Bereichs besitzt, während u_α entweder fortfällt, oder jedes ihrer echten Endsegmente

eine Ordinalzahl $\geq \omega$ besitzt. Dies wird erreicht, wenn bei jeder Anwendung der zweiten erzeugenden Operation $F = F_1 + F_2 + \ldots$ die betreffende Fundamentalreihe *in bezug auf den ersten Bereich unbestimmt induzierbar ist*, d.h. *entweder* eine Fundamentalreihe $p_1, p_2, \ldots$ existiert, für welche $F_{p_1}, F_{p_2}, \ldots$ *nicht* fortfallen, *oder* ein solches u angegeben werden kann, dass F_m für $m > u$ fortfällt.

Bezeichnen wir diejenigen wohlgeordneten Species welche bei Zulassung als Urspecies nur von Species mit einem einzigen Element, nicht von Species ohne Element, erzeugt werden, als *vollständige* wohlgeordnete Species, und ihre Ordinalzahlen als *vollständige* wohlgeordnete Ordinalzahlen, so *sind alle vollständigen wohlgeordneten Species unbestimmt induziert in bezug auf den ersten Bereich.*

Die vollständigen wohlgeordneten Species $\varkappa$ sind offenbar entweder endlich oder abzählbar unendlich und besitzen folgende weitere Eigenschaften:

1. *Es existiert entweder ein letztes Element, oder eine solche steigende Fundamentalreihe von Elementen* $e_1, e_2, \ldots$, *dass zu jedem Elemente e von* $\varkappa$ *ein nach e liegendes Element* e_ν *bestimmt werden kann.*

2. *Jeder echte Rest von* $\varkappa$ *besitzt ein erstes Element.*

3. *Jedes Element e von* $\varkappa$, *mit Ausnahme des ersten, besitzt entweder ein unmittelbar vorhergehendes Element oder ist Grenzelement einer steigenden Fundamentalreihe von Elementen von* $\varkappa$. Schreiben wir nämlich $\varkappa = a_e + r_e$, wo r_e derjenige Rest von $\varkappa$ ist, welcher e als erstes Element besitzt, so ist Satz 3 eine unmittelbare Folge des auf a_e angewandten Satzes 1.

4. *Jedes Element von* $\varkappa$, *mit Ausnahme des letzten, falls ein solches existiert, besitzt ein nächstfolgendes Element*, wie am einfachsten mittels der induktiven Methode eingesehen wird.

5. *Die Species derjenigen wohlgeordneten Ordinalzahlen, welche kleiner sind als eine gegebene vollständige wohlgeordnete Ordinalzahl* β, *besitzt (wenn sie nach der Grösse ihrer Elemente geordnet und 0 mit hinzugerechnet wird) die Ordinalzahl* β. Zwischen den Elementen und den echten Abschnitten einer wohlgeordneten Species der Ordinalzahl β besteht nämlich eine solche eineindeutige Beziehung, dass, wenn das Element e_2 *nach* dem Elemente e_1 liegt, der Abschnitt a_{e_2} *grösser* als der Abschnitt a_{e_1} ist.

Die wohlgeordneten Ordinalzahlen des ersten Bereichs mit Ausnahme von 0 sind offenbar kondensiert und vollständig, und je zwei von ihnen sind *vergleichbar*, d.h. sie sind entweder einander gleich oder eine von ihnen ist grösser als die andere. Die Summe

oder das Produkt einer endlichen Zahl von Ordinalzahlen des ersten Bereichs ist wiederum eine Ordinalzahl des ersten Bereichs.

Die Summe einer Fundamentalreihe von Ordinalzahlen des ersten Bereichs ist, wenn sie in bezug auf den ersten Bereich vollständig induzierbar ist, entweder ω oder wiederum eine Ordinalzahl des ersten Bereichs.

Unter einer *wohlgeordneten Ordinalzahl des zweiten Bereichs vom Grade Null* verstehen wir eine wohlgeordnete Ordinalzahl des ersten Bereichs. Unter einer *wohlgeordneten Ordinalzahl des zweiten Bereichs vom Grade p* (p eine nicht verschwindende endliche Ordinalzahl) verstehen wir eine Zahl

$$\omega^{p_1}.\, a_1 + \omega^{p_2}.\, a_2 + \ldots + \omega^{p_n}.\, a_n,$$

wo jedes p_ν eine wohlgeordnete Ordinalzahl des ersten Bereichs, jedes a_ν eine nicht verschwindende endliche Ordinalzahl und p der Maximalwert der p_ν ist. Alsdann dürfen wir annehmen, dass jedes $p_{\nu+1} \leqq p_\nu$ ist. Die wohlgeordneten Ordinalzahlen des zweiten Bereichs mit Ausnahme von 0 sind offenbar kondensiert und vollständig, und je zwei von ihnen sind vergleichbar. Die Summe und das Produkt einer endlichen Zahl von Ordinalzahlen des zweiten Bereichs sind wiederum Ordinalzahlen des zweiten Bereichs.

Eine Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ von Ordinalzahlen des zweiten Bereichs heisst *vollständig induzierbar in bezug auf den zweiten Bereich*, wenn eine solche steigende Fundamentalreihe $\nu_1, \nu_2, \ldots$ existiert, dass die Grade von $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_2}, \ldots$ entweder beständig wachsen, oder einander gleich sind, während für m zwischen ν_n und ν_{n+1} der Grad von β_m kleiner ist als der Grad von $\beta_{\nu_{n+1}}$, und, falls die β_{ν_n} vom Grade 0 sind, die Fundamentalreihe $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_1+1}, \beta_{\nu_1+2}, \ldots$ in bezug auf den ersten Bereich vollständig induzierbar ist.

Die Summe einer in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induzierbaren Fundamentalreihe von Ordinalzahlen des zweiten Bereichs ist entweder ω^ω oder wiederum eine Ordinalzahl des zweiten Bereichs.

Jeder Abschnitt einer Ordinalzahl des zweiten Bereichs ist wiederum eine Ordinalzahl des zweiten Bereichs. Man sieht dies am einfachsten ein, wenn man den Satz für die Ordinalzahlen $(n-1)$-ten Grades als bewiesen annimmt, und hieraus seine Gültigkeit für die Ordinalzahlen n-ten Grades folgert. *Mithin ist der zweite ebenso wie der erste Bereich wohlgeordneter Ordinalzahlen ununterbrochen.*

Eine wohlgeordnete Species α heisst *vollständig induziert in bezug auf den zweiten Bereich*, wenn sie selbst, sowie ihre konstruktiven Unterspecies beliebiger Ordnung, sich in die Form $a_\alpha' + r_\alpha'$ bringen

lässt, wo r'_α eine Ordinalzahl des zweiten Bereichs besitzt, während a_α' entweder fortfällt, oder jedes ihrer echten Endsegmente eine Ordinalzahl $\geq \omega^\omega$ besitzt. Dies wird erreicht, wenn bei jeder Anwendung der zweiten erzeugenden Operation $F = F_1 + F_2 + \ldots$ die betreffende Fundamentalreihe *in bezug auf den zweiten Bereich vollständig induzierbar* ist, d.h. *erstens* entweder eine solche Fundamentalreihe $\nu_1, \nu_2, \ldots$ existiert, dass $a'_{F^{\nu_1}}, a'_{F^{\nu_2}}, \ldots$ *nicht* fortfallen, oder ein solches n angegeben werden kann, dass a'_{F^m} für $m > n$ fortfällt, *zweitens* im letzteren Falle die Fundamentalreihe der Ordinalzahlen von $r'_{F^{n+1}}, r'_{F^{n+2}}, \ldots$ vollständig induzierbar in bezug auf den zweiten Bereich ist.

Unter einer *unbestimmten wohlgeordneten Ordinalzahl des zweiten Bereichs vom Grade Null* verstehen wir eine wohlgeordnete Ordinalzahl des ersten Bereichs. Unter einer *unbestimmten wohlgeordneten Ordinalzahl des zweiten Bereichs vom Grade p* (p eine nicht verschwindende endliche Ordinalzahl) verstehen wir eine wohlgeordnete Ordinalzahl $\dot{>} \omega^p$, aber $\dot{<} \omega^{p+1}$. Die Summe von zwei unbestimmten wohlgeordneten Ordinalzahlen β_1 vom Grade p_1 und β_2 vom Grade p_2 ist offenbar eine unbestimmte wohlgeordnete Ordinalzahl, deren Grad gleich der grösseren der Zahlen p_1 und p_2 ist.

Eine Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ von unbestimmten Ordinalzahlen des zweiten Bereichs heisst *unbestimmt induzierbar in bezug auf den zweiten Bereich*, wenn *entweder* jedes β_ν vom Grade 0, und die betreffende Fundamentalreihe in bezug auf den ersten Bereich unbestimmt induzierbar ist, *oder* ein solches n angegeben werden kann, dass für $m > n$ der Grad von β_m kleiner als der Grad von β_n ist, *oder aber* eine Fundamentalreihe $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_2}, \ldots$ mit nicht verschwindenden Graden existiert, für welche die Grade entweder unbeschränkt waehsen, oder einander gleich sind, während für m zwischen ν_n und ν_{n+1} der Grad von β_m kleiner ist als der Grad von $\beta_{\nu_{n+1}}$. *Die Summe einer in bezug auf den zweiten Bereich unbestimmt induzierbaren Fundamentalreihe von unbestimmten Ordinalzahlen des zweiten Bereichs ist entweder $\dot{>} \omega^\omega$ oder wiederum eine unbestimmte Ordinalzahl des zweiten Bereichs.*

Eine wohlgeordnete Species α heisst *unbestimmt induziert in bezug auf den zweiten Bereich*, wenn sie selbst, sowie ihre konstruktiven Unterspecies beliebiger Ordnung, sich in die Form $u_\alpha' + o_\alpha'$ bringen lässt, wo o_α' eine unbestimmte Ordinalzahl des zweiten Bereichs besitzt, während u_α' entweder fortfällt, oder jedes ihrer echten Endsegmente eine Ordinalzahl $\dot{>} \omega^\omega$ besitzt. Dies wird erreicht, wenn bei jeder Anwendung der zweiten erzeugenden Operation

$F = F_1 + F_2 + \ldots$ die betreffende Fundamentalreihe *in bezug auf den zweiten Bereich unbestimmt induzierbar* ist, d.h. *entweder* eine Fundamentalreihe $o_{F'_{\nu_1}}, o_{F'_{\nu_2}}, \ldots$, deren Ordinalzahlen unbeschränkt wachsende Grade besitzen oder eine Fundamentalreihe $u_{F'_{\nu_1}}, u_{F'_{\nu_2}}, \ldots$, welche *nicht* fortfallen, existiert, *oder* ein solches n angegeben werden kann, dass $u_{F'_m}$ für $m > n$ fortfällt, während die Fundamentalreihe der Ordinalzahlen von $o_{F'_{n+1}}, o_{F'_{n+2}}, \ldots$ unbestimmt induzierbar in bezug auf den zweiten Bereich ist.

Unter den *wohlgeordneten Ordinalzahlen des dritten Bereichs vom Range Null* verstehen wir die wohlgeordneten Ordinalzahlen des zweiten Bereichs. Unter den *wohlgeordneten Ordinalzahlen des dritten Bereichs vom Range 1* verstehen wir die Zahlen

$$\omega^{p_1} \cdot a_1 + \ldots + \omega^{p_n} \cdot a_n,$$

wo n und die a_ν nicht verschwindende endliche Ordinalzahlen sind und die p_ν wohlgeordnete Ordinalzahlen des zweiten Bereichs, deren Maximalgrad nicht verschwindet. Unter den *wohlgeordneten Ordinalzahlen des dritten Bereichs vom Range $n+1$* verstehen wir die Zahlen

$$\omega^{p_1} \cdot a_1 + \ldots + \omega^{p_n} \cdot a_n,$$

wo n und die a_ν nicht verschwindende endliche Ordinalzahlen sind und die p_ν wohlgeordnete Ordinalzahlen des dritten Bereichs vom Maximalrange n. Die wohlgeordneten Ordinalzahlen des dritten Bereichs mit Ausnahme von 0 sind offenbar kondensiert und vollständig. Weiter gelten folgende Eigenschaften, von denen die zweite eine unmittelbare Folge der ersten ist:

1. *Je zwei Ordinalzahlen des dritten Bereichs sind vergleichbar.*

2. *Bei der Ordinalzahl $\omega^{p_1} \cdot a_1 + \ldots + \omega^{p_n} \cdot a_n$ darf man annehmen, dass jedes $p_{\nu+1} < p_\nu$ ist.*

Diese Sätze begründen wir, indem wir den ersten für Zahlen, deren Rang $< n$ ist, mithin den zweiten für Zahlen, deren Rang $\leq n$ ist, als bewiesen annehmen, und hieraus die Gültigkeit des ersten für Zahlen, deren Rang $\leq n$ ist, folgern.

Nennen wir nämlich den h-ten Exponent p_h das $(2h-1)$-te Bestimmungselement und den h-ten Koeffizient a_h das $2h$-te Bestimmungselement, so wird unter den angegebenen Voraussetzungen von zwei Zahlen, deren Rang $\leq n$ ist, diejenige als die grössere erkannt, von der das erste Bestimmungselement, das nicht für beide Zahlen gleich ist, das grössere ist.

Sei r_n eine Zahl n-ten Ranges. Es gibt eine solche Zahl $(n-1)$-ten

Ranges s_{n-1}, dass $\omega^{s_{n-1}} \leq r_n < \omega^{s_{n-1}+1}$; ebenso eine solche Zahl $(n-2)$-ten Ranges s_{n-2}, dass $\omega^{s_{n-2}} \leq s_{n-1}$ und $s_{n-1} + 1 < \omega^{s_{n-2}+1}$, mithin

$$\omega^{\omega^{s_{n-2}}} \leq r_n < \omega^{\omega^{s_{n-2}+1}}.$$

Indem wir in dieser Weise fortfahren, gelangen wir schliesslich zur Formel

$$\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^m \cdot a}}}} \quad (n+1 \text{ Buchstaben } \omega) \leq r_n < \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^m \cdot (a+1)}}}} \quad (n+1 \text{ Buchstaben } \omega),$$

wo m und a gewisse nicht verschwindende endliche Ordinalzahlen, welche der *Grad* und der *Koeffizient* von r_n genannt werden, sind.

Die Summe einer endlichen Zahl von Ordinalzahlen des dritten Bereichs ist wiederum eine Ordinalzahl des dritten Bereichs.

Es seien $\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu} \cdot a_\nu$ und ω^p, wo weder a_1 noch p verschwindet, zwei Zahlen des dritten Bereichs. Indem wir an der Hand der Konstruktion von p mittels der beiden erzeugenden Operationen die induktive Methode anwenden, zeigen wir, dass ω^p sich mittels der beiden erzeugenden Operationen aus *Urzahlen* ω herstellen lässt. An der Hand *dieser* Konstruktion von ω^p können wir nun die Formel

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu} \cdot a_\nu\right] \cdot \omega^p = \omega^{p_1} \cdot \omega^p$$

mittels der induktiven Methode beweisen, und zwar auf Grund der Tatsachen, dass

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu} \cdot a_\nu\right] \cdot \omega = \omega^{p_1} \cdot \omega;$$

dass für $\beta = \beta_1 + \beta_2$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, aus

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu} \cdot a_\nu\right] \cdot \beta_1 = \omega^{p_1} \cdot \beta_1 \text{ und } \left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu} \cdot a_\nu\right] \cdot \beta_2 = \omega^{p_1} \cdot \beta_2$$

folgt

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu} \cdot a_\nu\right] \cdot \beta = \omega^{p_1} \cdot \beta;$$

und dass für $\beta = \sum_{\mu=1}^{\infty} \beta_\mu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, aus

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a_\nu\right].\ \beta_\mu = \omega^{p_1}.\ \beta_\mu \text{ für jedes } \mu\ .$$

folgt

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a^\nu\right].\ \beta = \omega^{p_1}.\ \beta.$$

Es seien $\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a_\nu$ und $\sum_{\mu=1}^{m} \omega^{q_\mu}.\ b_\mu + b_{m+1}$, wo a_1, b_{m+1} und die q_μ nicht verschwinden, zwei Zahlen des dritten Bereichs. Alsdann ist das Produkt

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a_\nu\right].\ \left[\sum_{\mu=1}^{m} \omega^{q_\mu}.\ b_\mu + b_{m+1}\right] = \sum_{\mu=1}^{m} \left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a_\nu\right].\ \omega^{q_\mu}.\ b_\mu +$$

$$+ \left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a_\nu\right].\ b_{m+1} = \sum_{\mu=1}^{m} \omega^{p_1+q_\mu}.\ b_\mu + \omega^{p_1}.\ (a_1\, b_{m+1}) + \sum_{\nu=2}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a^\nu.$$

Mithin ist das Produkt von zwei, also auch einer beliebigen endlichen Zahl von Ordinalzahlen des dritten Bereichs wiederum eine Ordinalzahl des dritten Bereichs.

Insbesondere ist, wenn p_1 nicht verschwindet, $\left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a_\nu\right]^2$ eine Zahl des dritten Bereichs mit dem ersten Glied $\omega^{p_1 \cdot 2}.\ a_1$; $\left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a_\nu\right]^3$ eine Zahl des dritten Bereichs mit dem ersten Glied $\omega^{p_1 \cdot 3}.\ a_1$; $\left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a^\nu\right]^m$ (m eine beliebige nicht verschwindende endliche Ordinalzahl) eine Zahl des dritten Bereichs mit dem ersten Glied $\omega^{p_1 \cdot m}.\ a_1$. Mithin ist $\left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a_\nu\right]^\omega = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a^\nu\right]^\mu = \sum_{\mu=1}^{\infty} \omega^{p_1 \cdot \mu}.\ a_1 = \omega^{p_1 \cdot \omega}$.

Auf Grund dieser Eigenschaft können wir, wenn ω^p, wo p nicht verschwindet, eine Zahl des dritten Bereichs ist, an der Hand einer Konstruktion von ω^p mittels der beiden erzeugenden Operationen aus *Urzahlen* ω, die Formel

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n} \omega^{p_\nu}.\ a_\nu\right]^{\omega^p} = \omega^{p_1 \cdot \omega^p}$$

mittels der induktiven Methode herleiten.

Sei nun $\sum_{\mu=1}^{m} \omega^{q_\mu}.\ b_\mu + b_{m+1}$, wo die q_μ und b_{m+1} nicht verschwinden, eine weitere Zahl des dritten Bereichs, so ist

$$\Big[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}.a_\nu\Big]^{\sum_{\mu=1}^{m}\omega^{q_\mu}.b_\mu+b_{m+1}} = \Big[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}.a_\nu\Big]^{\sum_{\mu=1}^{m}\omega^{q_\mu}.b_\mu}.\Big[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}.a_\nu\Big]^{b_{m+1}} =$$

$$= \omega^{p_1.\sum_{\mu=1}^{m}\omega^{q_\mu}.b_\mu}.\Big[\sum_{\nu=1}^{n}\omega^{p_\nu}.a_\nu\Big]^{b_{m+1}},$$

welcher Ausdruck als Produkt von zwei Zahlen des dritten Bereichs wiederum eine Zahl des dritten Bereichs ist.

Also gilt folgender Satz:

Eine Potenz, deren Argument und Exponent zum dritten Bereich gehören, ist ebenfalls eine Zahl des dritten Bereichs.

Eine Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ von Ordinalzahlen des dritten Bereichs vom Range 0 heisst *vollständig induzierbar in bezug auf den 0-ten Rang*, wenn sie vollständig induzierbar in bezug auf den zweiten Bereich ist.

Eine Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ von Ordinalzahlen des dritten Bereichs, deren Maximalrang p nicht übersteigt, heisst *vollständig induzierbar in bezug auf den p-ten Rang*, wenn *erstens* eine solche steigende Fundamentalreihe $\nu_1, \nu_2, \ldots$ existiert, dass die Exponenten $\beta'_{\nu_1}, \beta'_{\nu_2}, \ldots$ der Anfangsglieder von $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_2}, \ldots$ entweder beständig wachsen, oder einander gleich sind, während für m zwischen ν_n und ν_{n+1} die Exponenten von β_m kleiner sind als $\beta'_{\nu_{n+1}}$, *zweitens* im ersteren Falle die Fundamentalreihe $\beta_1'', \beta_2'', \ldots$ (in der jedes $\beta_n'' = \beta'_{\nu_n} - \beta'_{\nu_{n-1}}$, während $\beta_1'' = \beta'_{\nu_1}$) vollständig induzierbar in bezug auf den $(p-1)$-ten Rang ist, *drittens*, falls alle β_{ν_n} zum ersten Bereich gehören, die Fundamentalreihe $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_1+1}, \ldots$ vollständig induzierbar in bezug auf den ersten Bereich ist.

Eine Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ von Ordinalzahlen des dritten Bereichs heisst *vollständig induzierbar in bezug auf den dritten Bereich*, wenn *erstens* eine solche steigende Fundamentalreihe $\nu_1, \nu_2, \ldots$ existiert, dass die Ränge von $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_2}, \ldots$ entweder beständig wachsen oder alle gleich p sind, während für m zwischen ν_n und ν_{n+1} der Rang von β_m kleiner ist als der Rang von $\beta_{\nu_{n+1}}$, *zweitens* im letzteren Falle die Fundamentalreihe $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_2}, \ldots$ vollständig induzierbar in bezug auf den p-ten Rang ist.

Die Summe einer in bezug auf den dritten Bereich vollständig induzierbaren Fundamentalreihe von Ordinalzahlen des dritten Bereichs ist entweder $\varepsilon = \omega + \omega^\omega + \omega^{\omega^\omega} + \ldots$, oder wiederum eine Ordinalzahl des dritten Bereichs.

Jeder Abschnitt einer Ordinalzahl β des dritten Bereichs ist wiederum

eine Ordinalzahl des dritten Bereichs (Gilt nämlich innerhalb des dritten Bereichs der Satz für β_1 und β_2, so gilt er, falls $\beta = \beta_1 + \beta_2$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, ebenfalls für β; und gilt der Satz für jedes β_ν, so gilt er, falls $\beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, ebenfalls für β). *Mithin ist der dritte ebenso wie der erste und zweite Bereich wohlgeordneter Ordinalzahlen ununterbrochen.*

Eine wohlgeordnete Species α heisst *vollständig induziert in bezug auf den dritten Bereich*, wenn sie selbst, sowie ihre konstruktiven Unterspecies beliebiger Ordnung, sich in die Form $a_x'' + r_x''$ bringen lässt, wo r_x'' eine Ordinalzahl des dritten Bereichs besitzt, während a''_x entweder fortfällt, oder jedes ihrer echten Endsegmente eine Ordinalzahl $\geq \varepsilon$ besitzt. Dies wird erreicht, wenn bei jeder Anwendung der zweiten erzeugenden Operation $F = F_1 + F_2 + \ldots$ die betreffende Fundamentalreihe *in bezug auf den dritten Bereich vollständig induzierbar* ist, d.h. *erstens* entweder eine solche Fundamentalreihe $\nu_1, \nu_2, \ldots$ existiert, dass $a''_{F_{\nu_1}}, a''_{F_{\nu_2}}, \ldots$ *nicht* fortfallen, oder ein solches n angegeben werden kann, dass a''_{F_m} für $m > n$ fortfällt, *zweitens* im letzteren Falle die Fundamentalreihe der Ordinalzahlen von $r''_{F_{n+1}}, r''_{F_{n+2}}, \ldots$ vollständig induzierbar in bezug auf den dritten Bereich ist.

Unter einer *unbestimmten wohlgeordneten Ordinalzahl des dritten Bereichs vom Range Null und vom Grade m* verstehen wir eine unbestimmte wohlgeordnete Ordinalzahl des zweiten Bereichs vom Grade m. Unter einer *unbestimmten wohlgeordneten Ordinalzahl des dritten Bereichs vom Range p und vom Grade m* (p und m nicht verschwindende endliche Ordinalzahlen) verstehen wir eine wohlgeordnete Ordinalzahl, welche gleichzeitig

$$\geq \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^m}}}} \quad (p+1 \text{ Buchstaben } \omega) \text{ und } < \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{m+1}}}}} \quad (p+1 \text{ Buchstaben } \omega)$$

ist. Die Summe von zwei unbestimmten wohlgeordneten Ordinalzahlen β_1 (vom Range p_1 und vom Grade m_1) und β_2 (vom Range p_2 und vom Grade m_2) ist, wenn p_1 und p_2 nicht beide verschwinden, eine unbestimmte wohlgeordnete Ordinalzahl, deren Rang und Grad der grösseren der beiden Zahlen

$$\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{m_1}}}}} \quad (p_1+1 \text{ Buchstaben } \omega) \text{ und } \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{m_2}}}}} \quad (p_2+1 \text{ Buchstaben } \omega)$$

zu entnehmen sind.

Eine Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ von unbestimmten Ordinalzahlen des dritten Bereichs, welche alle den (nicht verschwindenden)

Rang p und den Grad m besitzen, heisst *unbestimmt induzierbar in bezug auf den dritten Bereich*, wenn *entweder* eine solche endliche Ordinalzahl h existiert, dass jedes β_ν

$$< \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^m \cdot h}}}} \qquad (p+1 \text{ Buchstaben } \omega)$$

ist, *oder* eine solche Fundamentalreihe $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_2}, \ldots$ und eine solche Fundamentalreihe $h_1, h_2, \ldots$ von unbeschränkt wachsenden endlichen Ordinalzahlen definiert werden können, dass β_{ν_n} für jedes n

$$\geq \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^m \cdot h_n}}}} \qquad (p+1 \text{ Buchstaben } \omega)$$

ist.

Eine Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ von unbestimmten Ordinalzahlen des dritten Bereichs (wo β_ν den Rang p_ν und den Grad m_ν besitzt) heisst *unbestimmt induzierbar in bezug auf den dritten Bereich*, wenn *entweder* jedes β_ν vom Range 0, und die betreffende Fundamentalreihe in bezug auf den zweiten Bereich unbestimmt induzierbar ist, *oder* ein solches u angegeben werden kann, dass für $m > u$ der Rang, oder bei gleichem Rang der Grad, von β_m kleiner als der Rang bzw. Grad von β_u ist, *oder aber* eine solche Fundamentalreihe $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_2}, \ldots$ mit nicht verschwindenden Rängen existiert, dass für m zwischen ν_n und ν_{n+1} der Rang oder bei gleichem Range der Grad von β_m kleiner ist als der Rang bzw. Grad von $\beta_{\nu_{n+1}}$, dass von den β_{ν_σ} entweder die Ränge unbeschränkt wachsen, oder die Ränge einander gleich sind und die Grade unbeschränkt wachsen, oder sowohl die Ränge wie die Grade einander gleich sind, und dass im letzten Falle die Fundamentalreihe der β_{ν_σ} unbestimmt induzierbar in bezug auf den dritten Bereich ist. *Die Summe einer in bezug auf den dritten Bereich unbestimmt induzierbaren Fundamentalreihe von unbestimmten Ordinalzahlen des dritten Bereichs ist entweder* $\geq \varepsilon$ *oder wiederum eine unbestimmte Ordinalzahl des dritten Bereichs.*

Eine wohlgeordnete Species α heisst *unbestimmt induziert in bezug auf den dritten Bereich*, wenn sie selbst, sowie ihre konstruktiven Unterspecies beliebiger Ordnung, sich in die Form $u_\alpha'' + o_\alpha''$ bringen lässt, wo o_α'' eine unbestimmte Ordinalzahl des dritten Bereichs besitzt, während u_α'' entweder fortfällt, oder jedes ihrer echten Endsegmente eine Ordinalzahl $\geq \varepsilon$ besitzt. Dies wird erreicht, wenn bei jeder Anwendung der zweiten erzeugenden Operation $F = F_1 + F_2 + \ldots$ die betreffende Fundamentalreihe *in bezug auf den dritten Bereich unbestimmt induzierbar* ist, d.h. *entweder* eine Fundamentalreihe $o''_{F_{\nu_1}}, o''_{F_{\nu_2}}, \ldots$, deren Ordinalzahlen unbeschränkt

waehsende Ränge besitzen oder eine Fundamentalreihe $u''_{F_{\nu_1}}, u''_{F_{\nu_2}}, \ldots$, welche *nicht* fortfallen, existiert, *oder* ein solches n angegeben werden kann, dass u''_{F_m} für $m > n$ fortfällt, während die Fundamentalreihe der Ordinalzahlen von $o''_{F_{n+1}}, o''_{F_{n+2}}, \ldots$ unbestimmt induzierbar in bezug auf den dritten Bereich ist.

Im vorigen haben wir gesehen, wie zur endlichen Bezeichnung von wohlgeordneten Ordinalzahlen zweierlei Elementarsymbole benutzt werden, nämlich *Zahlsymbole*, welche je eine bestimmte wohlgeordnete Ordinalzahl repräsentieren, und *Verknüpfungssymbole*, welche je eine aus einer beliebig vorgegebenen endlichen Gruppe von wohlgeordneten Ordinalzahlen eine neue wohlgeordnete Ordinalzahl herleitende Methode repräsentieren. Zur Bezeichnung der Zahlen des ersten Bereichs genügten dabei das Zahlsymbol 1 und das Verknüpfungssymbol der Addition; zur Bezeichnung der Zahlen des zweiten Bereichs kamen das Zahlsymbol ω und das Verknüpfungssymbol der Multiplikation hinzu, während die weitere Hinzunahme des Verknüpfungssymbols der Potenzierung die Bezeichnung der Zahlen des dritten Bereichs erlaubte. Sodann eröffnete das Zahlsymbol ε die Möglichkeit der Bezeichnung auch über den dritten Bereich hinausgehender, jedoch unterhalb $\varepsilon_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\cdot^{\cdot^{\varepsilon}}}$ (ν Buchstaben ε) liegender wohlgeordneter Ordinalzahlen. Indem wir auf den Aufbau systematischer Theorien von über den dritten Bereich hinausgehenden Zahlbereichen verzichten, beschränken wir uns nunmehr darauf, ein Beispiel eines Verknüpfungssymbols anzugeben, welches die Bezeichnung von Zahlen grösser als ε_1 erlaubt.

Wenn α eine kondensierte und β eine willkürliche wohlgeordnete Ordinalzahl ist, so definieren wir das Symbol $\{\alpha, \beta\}$ durch die folgenden Festsetzungen: $\{\alpha, 0\} = \alpha$; $\{\alpha, 1\} = \alpha^\alpha$; wenn $\{\alpha, \beta\}$ für jedes kondensierte α als kondensierte wohlgeordnete Ordinalzahl definiert ist, und überdies die Differenz $\{\alpha, \beta\} - \alpha$ existiert, so ist $\{\alpha, \beta + 1\} = \{\alpha, \beta\}^{\{\alpha, \beta\}} = \{\alpha, \beta\} + \{\alpha, \beta\} \, h \, [\{\alpha, \beta\}^{h\{\alpha, \beta\}}]$, sodass auch $\{\alpha, \beta + 1\}$ für jedes kondensierte α als kondensierte wohlgeordnete Ordinalzahl definiert ist, und überdies die Differenz $\{\alpha, \beta + 1\} - \alpha$ existiert; wenn $\beta = \beta_1 + \beta_2$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation und sowohl $\{\alpha, \beta_1\}$ wie $\{\alpha, \beta_2\}$ für jedes kondensierte α als kondensierte wohlgeordnete Ordinalzahlen definiert ist, und überdies die Differenzen $\{\alpha, \beta_1\} - \alpha$ und $\{\alpha, \beta_2\} - \alpha$ existieren, so ist $\{\alpha, \beta\} = \{\{\alpha, \beta_1\}, \beta_2\} = \{\alpha, \beta_1\} + [\{\{\alpha, \beta_1\}, \beta_2\} - \{\alpha, \beta_1\}]$, sodass auch $\{\alpha, \beta\}$ für jedes kondensierte α als

kondensierte wohlgeordnete Ordinalzahl definiert ist, und überdies die Differenz $\{\alpha, \beta\} - \alpha$ existiert; wenn $\beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation und $\{\alpha, \beta_\nu\}$ für jedes ν und jedes kondensierte α als kondensierte wohlgeordnete Ordinalzahl definiert ist, und überdies die Differenz $\{\alpha, \beta_\nu\} - \alpha$ existiert, so ist $\{\alpha, \beta\} = \{\alpha, \beta_1\} + [\{\alpha, (\beta_1 + \beta_2)\} - \{\alpha, \beta_1\}] + [\{\alpha, (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)\} - \{\alpha, (\beta_1 + \beta_2)\}] + \ldots$, sodass auch $\{\alpha, \beta\}$ für jedes kondensierte α als kondensierte wohlgeordnete Ordinalzahl definiert ist, und überdies die Differenz $\{\alpha, \beta\} - \alpha$ existiert.

Auf Grund dieser Definition beweist man, in derselben Weise wie die analogen Eigenschaften der Potenz α^β, zunächst dass, für $\beta = \beta' + \beta''$, $\{\alpha, \beta\} = \{\alpha, \beta'\} + [\{\{\alpha, \beta'\}, \beta''\} - \{\alpha, \beta'\}]$, auch wenn β' und β'' keine konstruktiven Unterzahlen von β sind, und sodann weiter dass, für $\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{(n)}$, $\{\alpha, \beta\} = \{\alpha, \beta'\} + [\{\alpha, (\beta' + \beta'')\} - \{\alpha, \beta'\}] + [\{\alpha, (\beta' + \beta'' + \beta''')\} - \{\alpha, (\beta' + \beta'')\}] + \ldots$, auch wenn die $\beta^{(n)}$ keine konstruktiven Unterzahlen von β sind, und hieraus folgert man wieder, dass die Konstruktion von $\{\alpha, \beta\}$ *auf Grund von verschiedenen Erzeugungsarten von* β zu gleichen wohlgeordneten Ordinalzahlen führt.

Auch zeigt man, mittels der induktiven Methode an der Hand der erzeugenden Operationen von β, leicht, dass für ein bestimmtes β und ein willkürliches kondensiertes α, die Konstruktion von $\{\alpha, \beta\}$ *auf Grund von verschiedenen Erzeugungsarten von* α zu gleichen wohlgeordneten Ordinalzahlen führt.

Wie weit man inzwischen die Einführung neuer Elementarsymbole zur Bezeichnung wohlgeordneter Ordinalzahlen auch fortsetzt, so lässt sich doch die Species der eingeführten Symbole in jedem Stadium als endlich betrachten, weil jede Definition einer Fundamentalreihe $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ von Symbolen auf die Definition eines *einzigen*, auf ein *beliebiges* Element von A, d.h. auf eine *beliebige endliche* Gruppe von Zahlen 1 bezogenen Symboles σ hinauskommt; diejenigen Zusammensetzungen der eingeführten Symbole, welche wohlgeordnete Ordinalzahlen darstellen, bilden mithin eine abzählbar unendliche Species, von der übrigens mehrere Elemente dieselbe Ordinalzahl repräsentieren können.

Hieraus folgern wir die Unmöglichkeit, ein System σ von Elementarsymbolen einzuführen, das die Darstellung *aller* wohlgeordneten Ordinalzahlen erlaubt. Sei nämlich β_ν die von der der endlichen Zahl ν entsprechenden Symbolzusammensetzung von σ dargestellte Ordi-

nalzahl. Weil die wohlgeordnete Ordinalzahl $\beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ für jedes ν unbestimmt grösser als β_ν ist, so kann sie mit keinem β_ν identisch sein, und deshalb nicht von einer Symbolzusammensetzung von σ dargestellt werden.

In genau derselben Weise zeigt man, dass die Species W der wohlgeordneten Ordinalzahlen ebenso wie die Species V der *vollständigen* wohlgeordneten Ordinalzahlen *nicht aufzählbar* ist. Weil wir andererseits jeder endlichen vollständigen wohlgeordneten Ordinalzahl den entsprechenden Ziffernkomplex der Folge ζ und jeder unendlichen vollständigen wohlgeordneten Ordinalzahl die Ziffer 1 zuordnen können, so besitzt die Kardinalzahl v von V die Eigenschaft, dass $v \overset{\cdots}{\geq} a$, aber a *nicht* $\overset{\cdots}{\geq} v$ ist. Mithin gilt die Formel $v \overset{\cdots}{>} a$, d.h. *V ist von grösserem Gewicht als A.*

APR 14 1922

Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie

VON

J. A. SCHOUTEN.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

DEEL XII. N°. 6.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
Februari 1919.

Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie

VON

J. A. SCHOUTEN.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

DEEL XII. N°. 6.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1918.

Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie.

EINLEITUNG.

Die meisten Autoren, die sich mit der einfachen Relativitätstheorie befassten, haben das Bedürfnisz gefühlt die Rechnung mit Koordinaten auch auf diesem Gebiete durch eine direkte Analysis zu ersetzen. Bekanntlich verwendete MINKOWSKI [1]) dazu die CAYLEY'sche Matrizenrechnung, und haben nach ihm ABRAHAM [2]), SOMMERFELD [3]), FRANK [4]), und LAUE [5]) nach Analogie der gewöhnlichen Vektoranalysis eine Anzahl Bezeichnungen geschaffen, deren Gesamtheit als vierdimensionale Vektoranalysis bekannt ist. WILSON und LEWIS [6]) haben diese Bezeichnungen weiter ausgearbeitet und vervollständigt. JAHNKE [7]) hat eine kurze übersichtliche Darstellung gegeben, welche auch die Beziehungen zur GRASSMANN'schen Ausdehnungslehre beleuchtet. WAELSCH [8]) ist einen anderen Weg gegangen. Seine Binäranalyse verbindet die binären Formen mit den HAMILTON'schen Quaternionen und mit den Kugelfunktionen des vierdimensionalen Raumes, und er gewinnt in dieser Weise ein System, dessen Rechenregeln aus den Syzygieen der binären Invariantentheorie erhalten werden können. [9])

Für die allgemeine Relativitätstheorie, bei welcher Kovarianz bei beliebigen Transformationen gefordert wird, ging man nun wieder zur Koordinatenmethode zurück, und es wurde zunächst nicht versucht auch hier eine direkte Analysis zu begründen. [10]) Zwar haben sich EINSTEIN und GROSSMANN vom Anfang an einer vektoranalytischen

[1]) 08.1. *)
[2]) 10.1.
[3]) 10.2.
[4]) 11.1.
[5]) 11.2.
[6]) 10.3, 12.1.
[7]) 17.6.
[8]) 13.1, 16.5, 16.6.
[9]) Vgl. 16.9, ein Verzeichnisz der Arbeiten von WAELSCH über Binäranalyse findet sich zum Teil dort, zum Teil 14.2.
[10]) Vgl. S. 52 und 53.

*) Die Zahlen beziehen sich auf das am Schlusz befindliche Litteraturverzeichnisz.

Terminologie bedient, bei der Rechnung verwenden sie aber den absoluten Differentialkalkül von Ricci und Levi Civita, und dieser Kalkül kann bekanntlich nur mit den Bestimmungszahlen rechnen, wenn auch in einer abgekürzten Weise, nicht aber mit den Grösen selbst. Da nun eine Grösze sowohl kovariante als kontravariante Bestimmungszahlen hat und dazu noch oft die mit $\sqrt{-g}$ multiplizierten Bestimmungszahlen verwendet werden (Volumtensoren), eine und die selbe Grösze also in vier verschiedenen Formen auftreten kann, wird die Rechnung oft so kompliziert, dasz die allgemeine Relativitätstheorie der einfachen gegenüber als besonders schwer mathematisch zu bewältigen erscheint. Diesem Uebelstande tritt bei den verschiedenen Autoren stets mehr das Bestreben entgegen die Resultate der Rechnung möglichst in kovarianter Form zu bringen, und es ist hier insbesondere eine Arbeit von Fokker [1]) zu erwähnen. Die logische Fortbildung dieses Bestrebens ist die Verwendung einer direkten Analysis, da diese überhaupt nur die kovariante Form kennt. Zwar ist es eine verkehrte Illusion die Koordinatenrechnung stets und überall durch eine direkte Rechnung ersetzen zu wollen, eine gute direkte Analysis kann aber in manchen Fällen die Rechnung befreien von Komplikationen, die nicht der Sache selbst anhaften, und die Resultate in eine Form bringen, welche die Theorie dem Verständnisz und der Vorstellung weiterer Kreise zugänglich macht. Besonders wäre dies von einer direkten Analysis zu erwarten, welcher es gelänge die kovariante Differentiation, die sich bisher nur mit der ziemlich umständlichen Christoffel'schen Symbolik bewältigen liesz, in einer einfacheren Weise dar zu stellen. J. B. Shaw [2]) und F. Jung [3]) sind schon in dieser Richtung tätig gewesen.[a])

Nun liegt die Schwierigkeit bei der Bildung einer direkten Analysis nicht bei den Multiplikationen, die sich leicht definieren lassen, sondern gerade bei der Differentiation. Diese Schwierigkeit kann aber vollständig beseitigt werden durch Einführung der Begriffe: „*geodätisch mitbewegtes Koordinatensystem*" und „*Produkt idealer Vektoren*". Das kovariante oder kogrediente Differential ist eben nichts anderes als ein Differential in Bezug auf ein solches mitbewegtes Koordinatensystem, und wenn der Fundamentaltensor als ideales Vektorquadrat geschrieben wird, läszt sich dieses Differential sehr einfach in einer Vektorformel angeben. Der Operatorkern ∇ erhält dann eine neue Bedeutung, behält aber in dieser

a) Vgl. S. 52 und 53.

[1]) 17. 2.

[2]) 13. 3.

[3]) 17. 8, 18. 4.

neuen Bedeutung *sämtliche Eigenschaften des alten* ∇, insbesondere die algebraische Vektoreigenschaft, mit der einzigen Ausnahme, dasz das vektorische Produkt von ∇ mit sich selbst, $\nabla \times \nabla$, nicht mehr stets identisch Null ist.

Wird ∇ mit dieser erweiterten Bedeutung eingeführt, so entsteht die gewünschte Analysis, die für viele Fälle Vereinfachung der Rechnung herbeiführt. Die Ableitung des RIEMANN-CHRISTOFFEL'schen Tensors, welche bisher eine „wegen ihres Umfanges berüchtigte Rechnung" [1]) erforderte, gestaltet sich in einer Weise, die einfach und leicht geometrisch interpretierbar ist, während die elektromagnetischen Feldgleichungen und die Impuls-Energiegleichung der einfachen Relativitätstheorie *ohne ihre Form zu ändern unmittelbar für den allgemeinen Fall gültig werden.* Die allgemeine Kovarianz wird also erreicht durch blosse Aenderung der Bedeutung von ∇. Ein besonderer Vorzug der direkten Methode dürfte sein, dasz die nicht invariante Grösze $\sqrt{-g}$ nur bei Rechnungen, bei denen der Fundamentaltensor variiert wird, verwendet wird, und sonst weder bei der Rechnung noch in den Formeln auftritt. Auch die Ableitung der Gleichungen aus einem Variationsprinzip wird einfacher und übersichtlicher, wie an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

Die praktische Verwendung einer direkten Analysis, d. h. das *wirkliche Rechnen* mit derselben, ist nun, insbesondere in den Differentiationsformeln, nur möglich, wenn *sämtliche* Umformungsregeln dem Rechner stets unmittelbar zu Gebote stehen. In dieser Beziehung erfüllen die bestehenden Systeme die Anforderungen der Praxis nicht. [a]) Bei allen Autoren, ausser bei WAELSCH, dem ja prinzipiell die Syzygieen der binären Invariantentheorie zu Gebote stehen, fehlen Rechenregeln, bei allen aber treten sie in einer solchen Form auf, dasz das Anschreiben aus dem Gedächtnisz ausgeschlossen und nur tabellarische Verwendung möglich ist. Es soll daher im ersten Abschnitte zunächst das auf gruppentheoretischer Grundlage berechnete System $R^{\rho}_{1\varkappa}$ angegeben werden, welches die bestehenden vierdimensionalen vektoranalytischen Systeme umfasst und

a) Das Selbe gilt auch für die gewöhnliche Vektoranalysis. Sämtliche ∇ enthaltende Formeln, die in der GIBBS'schen Form der Vektoranalysis jede für sich bewiesen werden, und dort lose nebeneinanderstehend nur tabellarischen Gebrauch zulassen, können nicht nur mit Hülfe der allgemeinen Formel mit einem Schlage bewiesen werden, sondern lassen sich auch mit Hülfe einer Ueberschiebungsregel [2]) aus dem Gedächtnisz sofort anschreiben, wenn diese Form ersetzt wird durch das auf gruppentheoretischer Grundlage berechnete System R^{r}_{3}. Erst dann erlangt die Vektoranalysis ihren vollen Wert für das praktische Rechnen.

[1]) HESSENBERG, 17. 5. S. 190.

[2]) 16. 8. S. 249, 17. 7. S. 575, 18. 1.

ergänzt, und dessen Rechenregeln nach der Ueberschiebungsregel aus dem Gedächtnisz angeschrieben werden können.[a])

Dieses System wird dann im zweiten Abschnitte der Behandlung der vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten mit beliebiger Maszbestimmung zugrunde gelegt. Als besondere Ergebnisse dieses Abschnittes treten hervor:

1°. der Beweis für die Gültigkeit der drei mit dem Gausz'schen und Stokes'schen Satz im R_3 korrespondierenden Integralsätze für vierdimensionale Mannigfaltigkeiten mit beliebiger Maszbestimmung.

2°. der Begriff des geodetisch bewegenden Bezugssystems, dessen Bewegungsmöglichkeiten die Mannigfaltigkeit, auch hinsichtlich der möglichen Einbettung in Mannigfaltigkeiten höherer Dimensionenzahl vollständig bestimmen.

3°. die einfache Ableitung der geometrischen Bedeutung des Riemann-Christoffel'schen Affinors vierter Hauptordnung $\overset{4}{\mathbf{K}}$ und der für die Relativitätstheorie wichtigen Tensoren zweiter Hauptordnung $\overset{2}{\mathbf{K}}$ und $\overset{2}{\mathbf{G}}$.

Im dritten Abschnitte wird die entwickelte Methode angewandt auf die Variationsprobleme der neueren Relativitätstheorie. Durch Variation des elektromagnetischen Potentials entsteht das erste Maxwell'sche Gleichungssystem, und virtuelle Verrückung der geladenen Materie ergiebt die mechanisch-electrische Bewegungsgleichung. Durch Variation des Gravitationspotentials wird die Feldgleichung der Gravitation gewonnen. Es ergiebt sich ein Zusammenhang zwischen der neuen Einstein'schen Konstante λ und der Berücksichtigung nichtincohärenter Massen. Die mechanisch-elektrischen Bewegungsgleichungen können durch Anwendung des Operators $\nabla^{\,1}$ aus den Feldgleichungen der Gravitation gewonnen werden. Die zuerst von Hilbert hervorgehobene Abhängigkeit dieser Gleichungen dürfte darin ihren einfachsten mathematischen Ausdruck finden.

In dieser Arbeit werden, dem particularen Zwecke entsprechend, grundsätzlich nur vierdimensionale Mannigfaltigkeiten betrachtet. Die Methode ist aber selbstverständlich auch für eine beliebige Dimensionenzahl n brauchbar. Es braucht dazu nur das System $R^{\circ}_{n\infty}$ zugrunde gelegt zu werden.

---

a) Der Wert der vielen ausgezeichneten Arbeiten anderer Autoren auf diesem Gebiet soll durch diese Bemerkungen natürlich in keiner Weise herabgedrückt werden. Die Erschaffung der invariantentheoretisch begründeten Systeme ist dem Verfasser überhaupt nur durch eingehende Beschäftigung mit diesen Arbeiten und Verarbeitung der in denselben niedergelegten Resultaten möglich geworden.

I. DAS ZAHLENSYSTEM $R^{\circ}_{4\infty}$ DER ORTHOGONALEN GRUPPE IN VIER GRUNDVARIABLEN.

Höhere Gröszen und ihre Zahlensysteme.

Unter einer Grösze verstehen wir mit F. Klein den Inbegriff einer Anzahl Bestimmungszahlen, die sich bei den Transformationen einer in gewissen Grundvariablen gegebenen Gruppe „in sich" transformieren, d. h. sich so transformieren, dasz bei einer Transformation die neuen Bestimmungszahlen rein als Funktionen der alten und der Parameter der Transformation ohne Verwendung irgend welcher fremder Parameter gegeben werden können. Eine Grösze hat also nur Bedeutung in Bezug auf ganz bestimmte Gruppen und kann bei anderen Gruppen als solche verschwinden. Die Orientierungsweise, d. h. die Transformationsweise der Bestimmungszahlen bei verschiedenen Gruppen ist das einzig wesentliche an einer Grösze, die geometrische Deutung, die in verschiedenen Weisen erfolgen kann, hat erst an zweiter Stelle Bedeutung. Haben zwei Gröszen bei einer bestimmten Gruppe dieselbe Orientierungsweise, so sind sie in Bezug auf diese Gruppe gleichartig. Sind überdies die Bestimmungszahlen proportional und ist die Gruppe eine Untergruppe der linearen homogenen, so sind die Gröszen bis auf einen Zahlenfaktor in Bezug auf diese Gruppe gleich. Auch die Gleichheit und Ungleichheit von Gröszen hängt also von der zu Grunde gelegten Gruppe ab und kann bei verschieden Gruppen verschieden sein. Zu bestimmten Klassen von Gröszen gehören höhere komplexe Zahlensysteme, die sich, wenn die vorgelegte Gruppe gegeben ist, nach einem vom Verfasser in 1914 angegebenen Prinzip [1]), in eindeutiger Weise berechnen lassen, und direkte Analysen bilden, mit deren Hülfe es möglich ist mit den Gröszen selbst ohne Verwendung irgend eines Bezugssystemes zu rechnen. An anderer Stelle [2]) werden die Systeme berechnet für Lineargröszen bei der linearen homogenen Gruppe und fünf ihrer Untergruppen für eine beliebige Anzahl Grundvariablen. Von diesen Systemen bildet das zur orthogonalen Gruppe für vier Grundvariablen gehörige, R°_{4}, die Analysis der Lineargröszen der einfachen Relativitätstheorie. Es ist der Zweck dieser Arbeit diese Untersuchung auszudehnen auf höhere Gröszen und auf die allgemeinere Gruppe, welche der neueren Relativitätstheorie zu Grunde liegt.

[1]) 14. 2.
[2]) 18. 1.

Die allgemeine, symmetrische und alternierende Multiplikation der orthogonalen Gruppe.

Sind x_μ, $\mu = a, \ldots, d$ die Grundvariablen der linearen homogenen Gruppe:

$$(1) \qquad {}'x_\mu = \sum_\nu^{a,\ldots,d} \alpha_{\mu\nu}\, x_\nu \quad , \quad x_\mu = \sum_\nu^{a,\ldots,d} \beta_{\mu\nu}\, {}'x_\nu, \quad |\alpha| = \frac{1}{|\beta|} \neq o,$$

so wird der Inbegriff jedes Satzes von 4 Zahlen v_μ, welche dieselbe Transformationsweise haben als x_μ, *kovariantes Grundelement* genannt und als komplexe Zahl geschrieben:

$$(2) \qquad \mathbf{V} = \sum_\lambda^{a,\ldots,d} v_\lambda\, \mathbf{e}_\lambda.$$

Zu der zu (1) kontragredienten Transformation:

$$(3) \qquad {}'x^\mu = \sum_\nu^{a,\ldots,d} \beta_{\nu\mu}\, x^\nu \quad , \quad {}'x^\mu = \sum_\nu^{a,\ldots,d} \alpha_{\nu\mu}\, x^\nu$$

gehören in der selben Weise *kontravariante Grundelemente*:

$$(4) \qquad \mathbf{V}' = \sum_\lambda^{a,\ldots,d} v^\lambda\, \mathbf{e}'_\lambda\, ^{a)}.$$

Werden nur diejenige Transformationen der Gruppe betrachtet, welche die kwadratische Form:

$$\sum_\lambda^{a,\ldots,d} x_\lambda{}^2$$

und folglich auch:

$$\sum_\lambda^{a,\ldots,d} x^{\lambda 2}$$

invariant lassen, so bilden diese für sich die *orthogonale* Gruppe, die selbstkontragredient ist, und bei der also der Unterschied zwischen kovarianten und kontravarianten Gröszen verschwindet. $\mathbf{e}_\lambda$ wird bei dieser Gruppe bis auf einen Zahlenfaktor gleich $\mathbf{e}_\lambda'$. Wir setzen diesen Faktor einfachheitshalber gleich 1, und führen die Bezeichnung ein:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \mathbf{i}_1 &= \mathbf{e}_a = \mathbf{e}'_a, \\ \mathbf{i}_2 &= \mathbf{e}_b = \mathbf{e}'_b, \\ \mathbf{i}_3 &= \mathbf{e}_c = \mathbf{e}'_c, \\ \mathbf{i}_4 &= \mathbf{e}_d = \mathbf{e}'_d. \end{aligned}$$

Wir legen die orthogonale Gruppe zu Grunde, deuten die Grundvariablen als nicht-homogene rechtwinklige Koordinaten und nennen ein Grundelement *Vektor*. Die orthogonale Gruppe enthält dann alle Drehungen und Spiegelungen bei festgehaltenem Ursprung.

---

a) Die Einheiten $\mathbf{e}$ selbst transformieren sich *kontragredient*, die Einheiten $\mathbf{e}'$ *kogredient*.

Für die Einheiten $\mathbf{i}$ verwenden wir *lateinische* allgemeine Indizes:

$$\mathbf{i}_j, \qquad j = 1, \ldots, 4$$

Unter *allgemeines Produkt* $\circ$ [a]) von p Vektoren:

$$\overset{p}{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_1 \circ \mathbf{v}_2 \circ \ldots\ldots\ldots \circ \mathbf{v}_p = \mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_p \tag{6}$$

verstehen wir die Grösze mit den 4^p Bestimmungszalen:

$$\overset{p}{v}_{j_1 \ldots j_p} = v_{1j_1} v_{2j_2} \ldots v_{pj_p}, \quad j_1, \ldots, j_p = 1, \ldots, 4. \tag{7}$$

Die zugehörigen 4^p Einheiten sind

$$\mathbf{i}_{j_1 \ldots j_p} = \mathbf{i}_{1j_1} \mathbf{i}_{2j_2} \ldots \mathbf{i}_{pj_p}. \tag{8}$$

Das Zeichen $\circ$ wird, wo es nicht unbedingt erforderlich ist, unterdrückt. Jede Grösze $\overset{p}{\mathbf{v}}$, die sich als Summe von allgemeinen Produkten von p und nicht weniger als p Vektoren darstellen läszt heiszt *Affinor, oder Grösze, p-ter Hauptordnung*. Die einzelnen Produkte heiszen die *Konstituanten* von $\overset{p}{\mathbf{v}}$ [b]). Jede Grösze $\overset{p}{\mathbf{v}}$ kann als ein Produkt von p *idealen Vektoren* [c]) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ geschrieben werden, deren Bestimmungszahlen den Gleichungen:

$$v_{1j_1} v_{2j_2} \ldots \ldots v_{pj_p} = \overset{p}{v}_{j_1 \ldots j_p} \tag{9}$$

genügen. Die p Faktoren in jeder Konstituante von $\overset{p}{\mathbf{v}}$ können in $p!$ verschiedenen Reihenfolgen geschrieben werden. Sie bestimmen dann die $p!$ *Isomere* von $\overset{p}{\mathbf{v}}$, $\overset{p}{\mathbf{v}}$ selbst einbegriffen. Jedes Isomer kann mit Hülfe derselben idealen Vektorfaktoren dargestellt werden.

Unter *symmetrisches Produkt* $\smile$ von $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$:

$$\mathbf{v}_1 \smile \ldots \smile \mathbf{v}_p$$

a) In 14.2 wurde für die allgemeine Multiplitation das Zeichen $\multimap$ verwendet und $\circ\!\!-$ für die umgekehrte Verknüpfung: $\mathbf{v} \circ\!\!- \mathbf{w} = \mathbf{w} \multimap \mathbf{v}$. Einfachheitshalber ist hier $\circ$ gewählt. Für die seltener vorkommende Umkehrung werde $\circ\!\!-$ verwendet.

b) Bei F. Jung [1]) heiszen sie *Polyaden*.

c) Ideale Vektoren sind zuerst angewendet von Waelsch [2]). Ihre Bestimmungszahlen sind die Symbole der von Waelsch und Weitzenböck erweiterten Aronhold-Clebsch'schen Invariantentheorie. Der Gebrauch dieser Symbole beruht auf den 1913 von R. Weitzenböck [3]) bewiesenen „ersten Fundamentalsatz", nach welchem dieselben zur Darstellung sämtlicher rationaler Kovarianten ausreichen, (Vgl. S. 28 und 31 Fuszn. *b*)).

[1]) 17. 8.
[2]) 06. 1, S. 259.
[3]) 13. 4.

verstehen wir die Summe sämtlicher Isomere von $\overset{p}{\mathfrak{V}}$ dividiert durch $p!$. Jede Grösze, die sich als Summe solcher Produkte von p und nicht weniger als p Faktoren schreiben läszt, ist eine *symmetrische Grösze*, oder *Tensor*, p-ter Hauptordnung, sie heiszt auch *Grösze p-ten Hauptranges*, und wird geschrieben ${}^{p}\mathfrak{V}$.

Unter *alternierendes Produkt* $\frown$ von $\mathfrak{V}_1, \ldots, \mathfrak{V}_p$:

$$\mathfrak{V}_1 \overset{\frown}{\ldots} \mathfrak{V}_p$$

verstehen wir die Summe sämtlicher gerader (zu geraden Permutationen gehöriger) Isomere vermindert mit der Summe sämtlicher ungerader Isomere, dividiert durch $p!$. Eine Grösze, die in bestimmten Faktoren symmetrisch oder alternierend ist, heiszt *stellenweise symmetrisch* bez. *alternierend*. Jede Grösze, die sich als Summe solcher Produkte von p und nicht weniger Vektoren darstellen läszt, ist eine *alternierende Grösze p-ter Hauptordnung*, sie heiszt auch *p-Vektor* (Monovektor oder kurz Vektor, Bivektor, etc.) oder *Vektor p-ter Hauptstufe*, und wird geschrieben ${}_{p}\mathfrak{V}$. Offenbar ist $p \leq n$. Ein n-Vektor hat eine einzige invariante Bestimmungszahl und heiszt auch *Skalar*.

Symmetrische und alternierende Gröszen können als Potenz eines idealen Vektors geschrieben werden:

$$(10) \qquad {}_{p}\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^{p} \ , \ {}_{p}\mathfrak{W} = \mathfrak{W}^{p}.$$

Die Bestimmungszahlen dieses Vektors genügen dann den Gleichungen:

$$(11) \qquad v_{j_1} \ldots v_{j_p} = {}^{p}v_{j_1 \ldots j_p},$$

bez.:

$$(12) \qquad w_{j_1} \ldots w_{j_p} = {}_{p}w_{j_1 \ldots j_p}.$$

Bei einer alternierenden Grösze ist ihre Multiplikation also *antikommutativ*.

Gehören zwei ideale Zahlen zur selben Grösze, so heiszen sie zu einander *idealeigen*, sonst *idealfremd*. Die Verknüpfungen idealer Zahlen mit gewöhnlichen oder idealfremden Zahlen sind die der gewöhnlichen Zahlen, während der Rechnung braucht man also die Idealität oder Realität nur da zu beachten, wo Verknüpfungen idealeigener Zahlen auftreten. Eine Grösze, die sich als $\circ$, $\smile$ oder $\frown$ Produkt von realen Vektoren schreiben läszt, heiszt *einfach*, jede andere *zusammengesetzt*. Mit Hülfe der idealen Faktoren kann *jede zusammengesetzte Grösze wie eine einfache behandelt werden*.

Kommt ein idealer Vektor $\mathfrak{v}$ in seiner Definitionsgleichung p mal vor, so heiszt er p-faltig. Irgend ein Produkt kann offenbar nur dann reale Bedeutung haben, wenn es $\mathfrak{v}$ gerade mp mal enthält, wo m eine ganze Zahl ist. Ist $m > 1$, so ist es zur Vermeidung von Mehrdeutigkeiten nötig m *gleichberechtigte* Symbole $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_m$ einzuführen, die während der Rechnung auseinander zu halten sind, und sich als gegenseitig idealfremd verhalten.[a]) Ein ähnlicher Sachverhalt liegt bekanntlich in der Clebsch-Aronhold'schen Invariantensymbolik vor.

Das Zahlensystem R_4^2 der Lineargrößen.[b])

Unter Lineargrösze verstehen wir jede Grösze, welche die rotationale Orientierungsweise einer alternierenden Grösze hat. Zu den Lineargrößen der orthogonalen Gruppe in vier Grundvariablen gehört das Zahlensystem R_4^2 mit den 16 Einheiten $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_{12}, \ldots \mathbf{i}_{123}, \ldots, \mathbf{I}, 1$ und den Rechenregeln:

13) $\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_1 \cap \mathbf{i}_2 = \dfrac{\mathbf{i}_{12} - \mathbf{i}_{21}}{2} = \mathbf{i}_{\overline{12}}$ $\quad \mathbf{i}_{\overline{234}} \times \mathbf{i}_{\overline{134}} = -\mathbf{i}_{\overline{134}} \times \mathbf{i}_{\overline{234}} = \mathbf{i}_{\overline{12}}$

$\mathbf{i}_{\overline{234}} \cdot \mathbf{i}_{\overline{234}} = -1$

$\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = 1$ [c])

$\mathbf{i}_{\overline{234}} \times \mathbf{i}_{\overline{23}} = \mathbf{i}_{\overline{23}} \times \mathbf{i}_{\overline{234}} = -\mathbf{i}_4$

$\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_{\overline{23}} = \mathbf{i}_{\overline{23}} \times \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_1 \cap \mathbf{i}_{\overline{23}} = \mathbf{i}_1 \widehat{\mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3} = \mathbf{i}_{\overline{123}}$ $\quad \mathbf{i}_{\overline{234}} \cdot \mathbf{i}_{12} = -\mathbf{i}_{\overline{12}} \cdot \mathbf{i}_{\overline{234}} = -\mathbf{i}_{\overline{134}}$

$\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_{\overline{12}} = -\mathbf{i}_{\overline{12}} \cdot \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2$

$$\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_{\overline{234}} = -\mathbf{i}_{\overline{234}} \cdot \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_1 \cap \mathbf{i}_{\overline{234}} = \mathbf{i}_1 \widehat{\mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3} \mathbf{i}_4 = \mathbf{I}$$
$$\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_{\overline{123}} = \mathbf{i}_{\overline{123}} \times \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_{\overline{23}}$$

$$\mathbf{i}_1 \overset{*}{_1} \mathbf{I} = -\mathbf{I} \overset{*}{_1} \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_{\overline{234}} \qquad \mathbf{i}_{234} \overset{*}{_1} \mathbf{I} = -\mathbf{I} \overset{*}{_1} \mathbf{i}_{234} = \mathbf{i}_1$$

$$\mathbf{i}_{12} \times \mathbf{i}_{\overline{34}} = \mathbf{i}_{\overline{34}} \times \mathbf{i}_{\overline{12}} = \mathbf{i}_{\overline{12}} \cap \mathbf{i}_{\overline{34}} = \mathbf{I}$$
$$\mathbf{i}_{12} * \mathbf{i}_{\overline{23}} = -\mathbf{i}_{23} * \mathbf{i}_{\overline{12}} = \mathbf{i}_{\overline{12}}$$
$$\mathbf{i}_{12} \cdot \mathbf{i}_{\overline{12}} = -1$$
$$\mathbf{i}_{12} \overset{*}{_1} \mathbf{I} = \mathbf{I} \overset{*}{_1} \mathbf{i}_{\overline{12}} = -\mathbf{i}_{34}$$
$$\mathbf{I} \overset{*}{_1} \mathbf{I} = 1$$
$$\text{cycl. } 1, 2, 3, 4\ [d]).$$

Nicht angegebene Verknüpfungen sind Null. Das System enthält fünf Grösze narten, Vektoren, Bivektoren, Trivectoren und die Skalare 1 und I, sowie vier Multiplikationen, die *skalare* $\cdot$, die *vektorische* $\times$, die *erste mittlere* $\overset{*}{_1}$ und die *zweite mittlere* $\overset{*}{_2}$[e]). Die Multiplikation $\overset{*}{_1}$,

a) Beispiel s. S. 17.

b) Die Ableitung der Systeme R_n^0 erfolgt 18.1. Vergl. auch 17.7.

c) In den Systemen R_n^0 ist $\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, vergl. 18. 1.

d) Die Beifügung „cycl. 1, 2, 3, 4" bei einer Formel bedeutet, dasz die Elemente 1, 2, 3, 4, durch jede *gerade* Permutation (vgl. S. 10) ersetzt werden dürfen.

e) Der Index 2 ist hier einfachheitshalber fortgelassen, vergl. 18. 1.

die nur vorkommt, wenn wenigstens ein Faktor ein Skalar ist, wird als identisch mit der gewöhnlichen algebraischen Multiplikation betrachtet[a]), und ihr Zeichen kann dann, wie üblich, unterdrückt werden. Von hier an verstehen wir also unter

$$(14)\quad \mathbf{I}\,\mathbf{v} = -\,\mathbf{v}\,\mathbf{I}\ ,\ \mathbf{I}_2\mathbf{v} = {}_2\mathbf{v}\,\mathbf{I}\ ,\ \mathbf{I}_3\mathbf{v} = -\,{}_3\mathbf{v}\,\mathbf{I}\ ,\ \mathbf{II}$$

die $\overset{*}{1}$ Produkte, und schreiben die *allgemeinen* Produkte

$$\mathbf{I}\circ\mathbf{v}\ ,\ \mathbf{v}\circ\mathbf{I},\ \text{etc.}$$

Die Summe $\dashv = . + \times + \overset{*}{1} + *$ ist eine *associative* Multiplikation, die *sedenionische*[b]). Für das sedenionische Produkt einiger Einheiten gilt, dasz Verwechslung zweier benachbarter ungleicher Faktoren mit Zeichenwechsel erlaubt ist (*Wechselregel*), während:

$$(15)\quad \mathbf{i}_j \dashv \mathbf{i}_j = \mathbf{i}_j\,.\,\mathbf{i}_j = 1,\quad j = 1, \ldots, 4.\quad \textit{(Substitutionsregel).}$$

Da das Resultat der oben angegebenen nicht Null erzeugenden Verknüpfungen von Einheiten *stets dem sedenionischen Produkt der Faktoren gleich ist*, gestatten diese beiden Regeln dieses Resultat sofort ohne Gedächtniszarbeit anzuschreiben, z.B.:

$$(16)\quad \mathbf{i}_{234} \times \mathbf{i}_{23} = \mathbf{i}_2\,\mathbf{i}_3\,\overset{\dashv}{\mathbf{i}_4}\,\mathbf{i}_2\,\mathbf{i}_3 = -\,\mathbf{i}_2\,\mathbf{i}_2\,\overset{\dashv}{\mathbf{i}_3}\,\mathbf{i}_3\,\mathbf{i}_4 = -\,\mathbf{i}_4.$$

Zur Bestimmung des Multiplikationszeichens führen wir den Begriff *Ueberschiebungsnummer* ein. Es sei die Überschiebungs nummer eines Produktes zweier Einheiten gleich der Anzahl gemeinschaftlicher Indizes. Es gilt dann folgende Regel[c]). Sind die *Stufenzahlen*, d.s. die Anzahlen der Vektorfaktoren[d]), der Faktoren derart, dasz es nur eine *mögliche* Überschiebungsnummer giebt, so korrespondiert $\dashv$ mit $\overset{*}{1}$, z. B.:

Übersch.nummer:

$$(17)\quad \begin{array}{lll} 1 & \mathbf{i}_1 \dashv \mathbf{I} = \mathbf{i}_1\ \mathbf{I} \\ 2 & \mathbf{i}_{12} \dashv \mathbf{I} = \mathbf{i}_{12}\ \mathbf{I} \\ 3 & \mathbf{i}_{123} \dashv \mathbf{I} = \mathbf{i}_{123}\,\mathbf{I} \\ 4 & \mathbf{I} \dashv \mathbf{I} = \mathbf{I}\ \ \mathbf{I}. \end{array}$$

Giebt es zwei mögliche Überschiebungsnummern, so korrespondiert $\dashv$ bei der höchsten mit . und bei der niedrigsten mit $\times$, falls

a) Dies hängt zusammen mit der Identifizierung des Produktes **I I** mit 1, vergl. 11. 2. S. 41 und 18. 1.

b) In Bezug auf die sedenionische Multiplikation bilden die 16 Einheiten ein sogenanntes ursprüngliches associatives System vierter Ordnung, nach Sylvester System der Sedenionen genannt. Zu den Lineargröszen der orthogonalen Gruppe in n Grundvariablen gehört allgemein ein System $\mathfrak{k}_n^0$ mit 2^n Einheiten und associativer Multiplikation. Durch Zerlegung entstehen die Teilmultiplikationen. Ein Produkt zerfällt höchstens in $\frac{n+2}{2}$ bez. $\frac{n+1}{2}$ Teilprodukte für n gerade bez. ungerade. Für $n = 1 + 4p - q$, $q = 0, 1, 2, 3$, giebt es p vektorische und p skalare Multiplikationen und für $n = -1 + 4r - s$, $s = 0, 1, 2, 3$, r mittlere. Näheres siehe 18. 1.

c) Diese Regel ist ein besonderer Fall der allgemeinen Überschiebungsregel auf S. 24.

d) Vergl. S. 29.

beide Stufenzahlen < 2 oder *beide* > 2 sind, im anderen Falle ist die Korrespondenz umgekehrt, z. B.:

	Ü.n.:			Ü.n.:		
	0	$\mathfrak{i}_1 \dashv \mathfrak{i}_2$	$= \mathfrak{i}_1 \times \mathfrak{i}_2$	2	$\mathfrak{i}_{\overline{12}} \dashv \mathfrak{i}_{\overline{123}}$	$= \mathfrak{i}_{\overline{12}} \times \mathfrak{i}_{\overline{123}}$
(18)	1	$\mathfrak{i}_1 \dashv \mathfrak{i}_1$	$= \mathfrak{i}_1 \,.\, \mathfrak{i}_1$	1	$\mathfrak{i}_{\overline{12}} \dashv \mathfrak{i}_{\overline{234}}$	$= \mathfrak{i}_{12} \,.\, \mathfrak{i}_{\overline{234}}$
	0	$\mathfrak{i}_1 \dashv \mathfrak{i}_{\overline{23}}$	$= \mathfrak{i}_1 \times \mathfrak{i}_{\overline{23}}$	3	$\mathfrak{i}_{\overline{123}} \dashv \mathfrak{i}_{\overline{123}}$	$= \mathfrak{i}_{\overline{123}} \,.\, \mathfrak{i}_{\overline{123}}$
	1	$\mathfrak{i}_1 \dashv \mathfrak{i}_{12}$	$= \mathfrak{i}_1 \,.\, \mathfrak{i}_{12}$	2	$\mathfrak{i}_{\overline{123}} \dashv \mathfrak{i}_{\overline{234}}$	$= \mathfrak{i}_{\overline{123}} \times \mathfrak{i}_{\overline{234}}$.
	1	$\mathfrak{i}_1 \dashv \mathfrak{i}_{\overline{123}}$	$= \mathfrak{i}_1 \times \mathfrak{i}_{\overline{123}}$			
	0	$\mathfrak{i}_1 \dashv \mathfrak{i}_{\overline{234}}$	$= \mathfrak{i}_1 \,.\, \mathfrak{i}_{\overline{234}}$			

Giebt es drei mögliche Überschiebungsnummern, so korrespondiert $\dashv$ bei der höchsten mit $.$, bei der mittleren mit $*$ und bei der niedrigsten mit $\times$, z. B.:

	Ü.n.:	
(19)	2	$\mathfrak{i}_{12} \dashv \mathfrak{i}_{\overline{12}} = \mathfrak{i}_{12} \,.\, \mathfrak{i}_{12}$
	1	$\mathfrak{i}_{12} \dashv \mathfrak{i}_{\overline{23}} = \mathfrak{i}_{12} * \mathfrak{i}_{\overline{23}}$
	0	$\mathfrak{i}_{12} \dashv \mathfrak{i}_{\overline{34}} = \mathfrak{i}_{12} \times \mathfrak{i}_{34}$.

Folgende Tabelle giebt eine Übersicht:

Übersch.-Stufen- nummer: / zahlen der Faktoren:	0	1	2	3	4
1,1	$\times$	.			
1,2	$\times$	.			
1,3	.	$\times$			
1,4		$*_1$	.		
2,2	$\times$	*	.		
2,3		.	$\times$		
2,4			$*_1$		
3,3			$\times$	.	
3,4				$*_1$	
4,4					$*_1$

Die Grösen

$$\mathbf{i}^*_1 = \mathbf{i}_{\overline{234}} = -\mathbf{I}\,\mathbf{i}_1\ ,\quad \mathbf{i}^*_{12} = \mathbf{i}_{\overline{34}} = -\mathbf{I}\,\mathbf{i}_{\overline{12}}\ , \tag{20}$$
$$\mathbf{i}^*_{234} = -\mathbf{i}_1 = \mathbf{I}\,\mathbf{i}_{\overline{234}},\ \text{cycl. } 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

nennen wir in Anschliesung an GRASSMANN die *Ergänzungen* von $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_{\overline{12}}$ und $\mathbf{i}_{\overline{234}}$. Allgemein gilt also die Regel, *dasz eine Einheit (links) sedenionisch multipliziert mit ihrer Ergänzung (rechts)* $\mathbf{I}$ *erzeugt.* Unter Ergänzung einer Summe wird die Summe der Ergänzungen der einzelnen Summanden verstanden. Wird in einem Produkt einer der Faktoren durch seine Ergänzung ersetzt, so geht auch das Produkt in seine positive oder negative Ergänzung über. Das Vorzeichen ist nach der Wechselregel zu bestimmen. Ist der gewählte Faktor zweiter Hauptstufe, so geht dabei . in $\times$ und $\times$ in . über, z. B.:

$$(21)\ a)\ \mathbf{i}_{234}\ .\ \mathbf{i}^*_{23} = \mathbf{i}_{\overline{234}}\ .\ -\mathbf{I}\,\mathbf{i}_{23} = \mathbf{I}\,\mathbf{i}_{234} \times \mathbf{i}_{23} = -\mathbf{I}\,\mathbf{i}_4 = \mathbf{i}^*_4.$$

$$b)\ (\mathbf{u}\ .\ {}_2\mathbf{v})\ .\ {}_2\mathbf{w} = \{(\mathbf{u}\mathbf{I} \times {}_2\mathbf{v}^*)\,\mathbf{I}\} \times {}_2\mathbf{w}^* = -\mathbf{I}\,\{(\mathbf{u} \times {}_2\mathbf{v}^*)\,\mathbf{I}\} \times$$
$$\times\, {}_2\mathbf{w}^* = \mathbf{I}^2(\mathbf{u} \times {}_2\mathbf{v}^*) \times {}_2\mathbf{w}^* = (\mathbf{u} \times {}_2\mathbf{v}^*) \times {}_2\mathbf{w}^*.$$

In allen anderen Fällen bleiben die Multiplikationszeichen erhalten.[a])

Setzen wir:

$$(22)\qquad \begin{aligned} \mathbf{i}_1' &= i\,\mathbf{i}_{\overline{234}} \\ \mathbf{i}_2' &= -i\,\mathbf{i}_{\overline{341}} \qquad i = \sqrt{-1} \\ \mathbf{i}_3' &= i\,\mathbf{i}_{\overline{412}} \\ \mathbf{i}_4' &= -i\,\mathbf{i}_{\overline{123}}, \end{aligned}$$

oder allgemein:

$$(23)\qquad \mathbf{i}_j\,\mathbf{i}_j' = i\,\mathbf{I},\ j = 1, \ldots, 4,$$

so sind die Rechenregeln invariant bei Ersetzung von $\mathbf{i}$ durch $\mathbf{i}'$ und gleichzeitiger Ersetzung von $\mathbf{i}'$ durch $-\mathbf{i}$. Die Einheiten $\mathbf{i}_{\overline{jk}}$ und $\mathbf{I}$ bleiben dabei unverändert. Zwischen $\mathbf{i}$ und $\mathbf{i}'$ besteht also eine komplizierte Art Dualität[b]). Diese Dualität kann in eine gewöhnliche umgesetzt werden durch den Uebergang zu den neuen Einheiten:

---

a) Dies findet seine Ursache darin, dasz für Verknüpfungen, die bei der *rotationalen* Gruppe gleich sind, dieselben Zeichen gewählt sind.

b) Dualitäten dieser Art treten auch bei GRASSMANN stets auf in Systemen mit gerader Anzahl Grundeinheiten.

(24)
$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1 &\to \mathbf{i}_0 & i\,\mathbf{i}_{234} &= \mathbf{i}_1' \to \mathbf{i}_0' \\ -i\,\mathbf{i}_2 &\to \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_{341} &= i\,\mathbf{i}_2' \to \mathbf{i}_1' \\ -i\,\mathbf{i}_3 &\to \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_{412} &= i\,\mathbf{i}_3' \to \mathbf{i}_2' \\ -i\,\mathbf{i}_4 &\to \mathbf{i}_3 & \mathbf{i}_{123} &= i\,\mathbf{i}_4' \to \mathbf{i}_3' \end{aligned}$$

$$i\,\mathbf{I} \to \mathbf{H}.$$

Die Rechenregeln lauten dann:

(25)
$$\begin{aligned} &\mathbf{i}_0 \times \mathbf{i}_1 = -\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_0 = \mathbf{i}_{\overline{01}} = -\mathbf{i}'_{\overline{01}} \\ &\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_{\overline{12}} = \mathbf{i}'_{12} \\ &\mathbf{i}_0 \,.\, \mathbf{i}_0 = +1 \qquad \mathbf{i}_1 \,.\, \mathbf{i}_1 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_{\overline{23}} = \mathbf{i}_{23} \times \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_{\overline{123}} = \mathbf{i}'_0 \quad ; \quad \mathbf{i}_0 \times \mathbf{i}_{12} = \mathbf{i}_{12} \times \mathbf{i}_0 = \mathbf{i}_{\overline{012}} = -\mathbf{i}'_3 \\ &\mathbf{i}_1 \,.\, \mathbf{i}_{12} = -\mathbf{i}_{\overline{12}} \,.\, \mathbf{i}_1 = -\mathbf{i}_2 \,;\; \mathbf{i}_1 \,.\, \mathbf{i}_{\overline{10}} = -\mathbf{i}_{\overline{10}} \,.\, \mathbf{i}_1 = -\mathbf{i}_0 \,;\; \mathbf{i}_0 \,.\, \mathbf{i}_{\overline{01}} = -\mathbf{i}_{\overline{01}} \,.\, \mathbf{i}_0 = \mathbf{i}_1 \\ &\mathbf{i}_0 \,.\, \mathbf{i}'_0 = -\mathbf{i}'_0 \,.\, \mathbf{i}_0 = \mathbf{H} \quad ; \quad \mathbf{i}_1 \,.\, \mathbf{i}'_1 = -\mathbf{i}'_1 \,.\, \mathbf{i}_1 = \mathbf{H} \\ &\mathbf{i}_0 \times \mathbf{i}'_1 = \mathbf{i}'_1 \times \mathbf{i}_0 = -\mathbf{i}_{23} = -\mathbf{i}'_{\overline{23}} \,;\; \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}'_2 = \mathbf{i}'_2 \times \mathbf{i}_1 = +\mathbf{i}_{\overline{03}} = -\mathbf{i}'_{\overline{03}} \\ &\mathbf{i}_0 \mathbf{H} = -\mathbf{H}\,\mathbf{i}_0 = \mathbf{i}_{\overline{123}} = -\mathbf{i}'_0 \quad ; \quad \mathbf{i}_1 \mathbf{H} = -\mathbf{H}\,\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_{\overline{023}} = -\mathbf{i}'_1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{i}_{01} \times \mathbf{i}_{\overline{23}} = \mathbf{i}_{23} \times \mathbf{i}_{\overline{01}} = \mathbf{H}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{i}_{\overline{01}} * \mathbf{i}_{\overline{02}} = -\mathbf{i}_{\overline{12}} = \mathbf{i}'_{\overline{12}} \,;\; \mathbf{i}_{\overline{23}} * \mathbf{i}_{\overline{31}} = \mathbf{i}_{\overline{12}} = \mathbf{i}'_{\overline{12}} \,;\; \mathbf{i}_{\overline{01}} * \mathbf{i}_{\overline{12}} = -\mathbf{i}_{\overline{02}} = \mathbf{i}'_{\overline{02}} \\ &\mathbf{i}_{\overline{01}} \,.\, \mathbf{i}_{\overline{01}} = 1 \quad ; \quad \mathbf{i}_{\overline{12}} \,.\, \mathbf{i}_{\overline{12}} = -1 \\ &\mathbf{i}_{\overline{01}}\,\mathbf{H} = \mathbf{H}\,\mathbf{i}_{\overline{01}} = \mathbf{i}_{23} = \mathbf{i}'_{\overline{23}} \quad ; \quad \mathbf{i}_{12}\,\mathbf{H} = \mathbf{H}\,\mathbf{i}_{\overline{12}} = -\mathbf{i}_{\overline{03}} = \mathbf{i}'_{\overline{03}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}\,\mathbf{H} = -1.$$

Cycl. 1, 2, 3.
Dual:
$\mathbf{i} \longleftrightarrow \mathbf{i}'$
$\mathbf{H} \longleftrightarrow -\mathbf{H}$

und es besteht gewöhnliche Dualität zwischen $\mathbf{i}_j$ und $\mathbf{i}'_j$. Unter den Einheiten ist jetzt aber $\mathbf{i}_0$ bevorzugt. Diese Bevorzugung ist gerade die, welche auch in der Relativitätstheorie stattfindet. Es ist bemerkenswert, dasz die rein mathematische Forderung, die bestehende Dualität, welche die einzige bei der orthogonalen Gruppe existierende ist[a]), in den Rechenregeln der Einheiten zum Ausdruck zu bringen, gerade zu einer solchen direkt physisch verwertbaren Bevorzugung führt.[b])

Die freien Rechenregeln des Systemes R_4^0.

Die vom Bezugssystem freien Rechenregeln sind unabhängig von der Wahl der Einheiten, und können aus der Associativität von $\dashv$ abgeleitet werden. Für Produkte von Vektoren lauten sie[c]):

---

a) Vgl. für die bei den verschiedenen Gruppen existierenden Dualitäten 17. 7. S. 570 sowie 18. 1.

b) Die Einheiten $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$, $\mathbf{i}_{\overline{23}}$, $\mathbf{i}_{\overline{31}}$, $\mathbf{i}_{12}$, $\mathbf{I}$ und 1, mit den Multiplikationen $.$, $\underset{1}{*}$, $\times$ (zwischen $\mathbf{i}_j$ und $\mathbf{i}_k$) und $*$ (zwischen $\mathbf{i}_{jk}$ und $\mathbf{i}_{kl}$) bilden gerade das System R_3^0 der gewöhnlichen Vektoranalysis mit polaren und axialen Vektoren, und zwar mit dem richtigen Vorzeichen des skalaren Produktes. (Vgl. 17. 7 S. 577 und 18. 1).

c) Für den Ueberschiebungsfaktor siehe S. 24.

	Übersch. Faktor $(^p_i)\,(^q_i)\,i!$	Übersch. Nummer i	
	1	0	$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \frown \mathfrak{b} =$ Grösse zweiter Hauptstufe
	1	1	$\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b} =$ Skalar in 1
	1	0	$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \times \mathfrak{c} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$
	2	1	$\mathfrak{a} \,.\, (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b})\,\mathfrak{c} - (\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{c})\,\mathfrak{b}$
	1	0	$\mathfrak{a} \,.\, (\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}) \,.\, \mathfrak{d} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d} =$ Skalar in $\mathbf{I}$
	3	1	$\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b})\,\mathfrak{c} \times \mathfrak{d} + (\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{c})\,\mathfrak{d} \times \mathfrak{b} + (\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{d})\,\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$
	4	1	$\mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}) = (\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b})\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{e} - (\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{c})\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{e} + (\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{d})\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{e} + \ldots.$
	1	0	$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$
(26)	4	1	$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) * (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) = (\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{c})\,\mathfrak{a} \times \mathfrak{d} - (\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{d})\,\mathfrak{a} \times \mathfrak{c} + \ldots.$
	2	2	$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \,.\, (\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) = (\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{c})\,(\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{d}) - (\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{d})\,(\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{c})$
	6	1	$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \,.\, (\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}) = (\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{c})\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{e} + \ldots.$
	6	2	$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) \times (\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}) = (\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{c})\,(\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{d})\,\mathfrak{e} + \ldots.$
	12	2	$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})\,(\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{f}) = (\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{c})\,(\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{d})\,\mathfrak{e} \times \mathfrak{f} + \ldots.$
	18	2	$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})\,(\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{f}) = (\mathfrak{c} \,.\, \mathfrak{d})\,(\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{e})\,\mathfrak{a} \times \mathfrak{f} + \ldots.$
	6	3	$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})\,(\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{f}) = (\mathfrak{c} \,.\, \mathfrak{n})\,(\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{c})\,(\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{f}) + \ldots.$
	24	3	$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})\,(\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{f}\,\mathfrak{g}) = (\mathfrak{c} \,.\, \mathfrak{d})\,(\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{e})\,(\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{f})\,\mathfrak{g} + \ldots.$
	24	4	$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d})\,(\mathfrak{e}\,\mathfrak{f}\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}) = (\mathfrak{d} \,.\, \mathfrak{e})\,(\mathfrak{c} \,.\, \mathfrak{f})\,(\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{g})\,(\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{h}) + \ldots.$

Die Rechenregeln für Trivektoren $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ etc. sind, der bestehenden Dualität zufolge, gleichlautend. [a]) Sämtliche Formen gelten auch für zusammengesetzte Grösen, die Vektoren haben dann nur ideale Bedeutung.

Beispiele einiger Produkte.

Als Beispiele seien folgende Produkte angeführt:

$$(27) \qquad \mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$$

$$(28) \qquad \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, \mathfrak{i}_{12} + \text{etc.}$$

$$(29) \qquad \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \times \mathfrak{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \mathfrak{i}_{\overline{123}} + \text{etc.}$$

$$(30) \qquad \mathfrak{a} \,.\, (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) = (a_1 b_1 + \ldots + a_4 b_4)\mathfrak{c} - (a_1 c_1 + \ldots + a_4 c_4)\mathfrak{b}$$

$$(31) \qquad {}_2\mathfrak{V} \cdot {}_2\mathfrak{W} = -v_{12} w_{12} - v_{13} w_{13} - v_{14} w_{14} - v_{23} w_{23} - v_{34} w_{34} - v_{42} w_{42}$$

a) Für mehrfaktorige Produkte von Bivektoren bestehen Rechenregeln, die nur Bivektoren enthalten, sie können aus den angegebenen abgeleitet werden und werden im folgenden nicht benutzt. [1])

[1]) 17. 7 8. 577, 18. 1.

$$(32)\qquad {}_2\mathbf{V} * {}_2\mathbf{W} = \begin{aligned} &v_{12}\,w_{23}\,\mathbf{i}_{\bar{13}} + v_{12}\,w_{24}\,\mathbf{i}_{\bar{14}} - \\ &- v_{12}\,w_{13}\,\mathbf{i}_{23} - v_{12}\,w_{14}\,\mathbf{i}_{\bar{34}} + \text{etc.} \end{aligned}$$

$$(33)\qquad {}_2\mathbf{V} \times {}_2\mathbf{W} = \begin{aligned} &(v_{12}\,w_{34} - v_{13}\,w_{24} + v_{14}\,w_{23} \\ &+ v_{23}\,w_{14} - v_{24}\,w_{13} + v_{34}\,w_{12})\,\mathbf{I}. \end{aligned}$$

Beispiel der Einführung idealer Vektoren.

Als Beispiel der Einführung idealer Vektoren schreiben wir die einfachen Bivectoren

$$(34)\qquad {}_2\mathbf{p} = \mathbf{q} \times \mathbf{r} \qquad {}_2\mathbf{s} = \mathbf{t} \times \mathbf{u}$$

als Potenzen der idealen Vektoren $\mathbf{p}$ bez. $\mathbf{s}$:

$$(35)\qquad {}_2\mathbf{p} = \mathbf{p}^2 \qquad {}_2\mathbf{s} = \mathbf{s}^2.$$

Die Definitionsgleichungen der idealen Bestimmungszahlen von $\mathbf{p}$ und $\mathbf{s}$ sind dann:

$$(36)\qquad \begin{aligned} &p_i\,p_i = 0 \qquad\qquad s_i\,s_i = 0 \\ &p_i\,p_j = -p_j\,p_i = {}^1/_2\,(q_i\,r_j - q_j\,r_i);\quad s_i\,s_j = -s_j\,s_i = {}^1/_2\,(t_i\,u_j - t_j\,u_i) \\ &\qquad\qquad i,j = 1,\ldots,4. \end{aligned}$$

Das skalare Produkt von ${}_2\mathbf{p}$ und ${}_2\mathbf{s}$ ist:

$$(37)\qquad \begin{aligned} {}_2\mathbf{p} \cdot {}_2\mathbf{s} &= -(q_1\,r_2 - q_2\,r_1)\,(t_1\,u_2 - t_2\,u_1) - \text{cycl.} = \\ &= -4\,p_1\,p_2\,s_1\,s_2 - \text{cycl.} = -2\,(\mathbf{p}\,.\,\mathbf{s})^2. \end{aligned}$$

Eine Zweideutigkeit tritt hier noch nicht auf. Man kann aber nicht in derselben Weise das Produkt ${}_2\mathbf{p} \cdot {}_2\mathbf{p}$ darstellen:

$$(38)\qquad {}_2\mathbf{p} \cdot {}_2\mathbf{p} = -2\,(\mathbf{p}\,.\,\mathbf{p})^2 = -4\,p_1\,p_2\,p_1\,p_2 - \text{cycl. etc.},$$

da man von dem Ausdruck rechts nicht mehr in eindeutiger Weise zu den realen Grösen zurückkehren kann. In der Tat, berücksichtigt man zuerst die Gleichung

$$(39)\qquad p_i\,p_j = -p_j\,p_i = {}^1/_2\,(q_i\,r_j - q_j\,r_i),$$

so ergiebt sich richtig:

$$(40)\qquad -4\,p_1\,p_2\,p_1\,p_2 - \text{cycl.} = -(q_1\,r_2 - q_2\,r_1)^2 - \text{cycl.},$$

berücksichtigt man dagegen zuerst die Gleichung $p_i\,p_i = 0$, so entsteht das falsche Resultat:

$$(41)\qquad -4\,p_1\,p_2\,p_1\,p_2 - \text{cycl.} = 0.$$

Die Zweideutigkeit wird aufgehoben durch Einführung zweier gleichberechtigter Vektoren $\mathfrak{p}$ und $'\mathfrak{p}$:

$$(42) \qquad {}_2\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2 = {}'\mathfrak{p}^2.$$

Es ist dann:

$$(43) \qquad {}_2\mathfrak{p} \cdot {}_2\mathfrak{p} = -2\,(\mathfrak{p} \,.\, {}'\mathfrak{p})^2 = -4\,p_1 p_2\, {}'p_1\, {}'p_2 \text{ etc.},$$

und dieser Ausdruek hat nur einen einzigen realen Wert.

Geometrische Deutung einiger Produkte.

Ein Vektor $\mathfrak{v}$ läszt sieh darstellen dureh einen Teil einer Geraden von bestimmter Riehtung, und mit einem bestimmten durch einen Pfeil angegebenen Richtungssinn, aber von übrigens unbestimmter Lage, dessen Länge dem Modulus des Vektors

$$(44) \qquad v_m = \sqrt{\mathfrak{v} \,.\, \mathfrak{v}}$$

gleich ist.

Ein einfaeher Bivektor ${}_2\mathfrak{v}$ läszt sieh darstellen dureh einen Teil einer Ebene von bestimmter Flächenrichtung, und mit einem bestimmten durch einen Drehpfeil angegebenen Richtungssinn, aber von übrigens unbestimmter Form und Lage, dessen Flächeninhalt dem Modulus

$$(45) \qquad {}_2v_m = \sqrt{-\,{}_2\mathfrak{v} \cdot {}_2\mathfrak{v}}$$

gleich ist. Das vektorisehe Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ ist der Bivektor ihres Parallellogrammes. Der Drehsinn wird dureh die

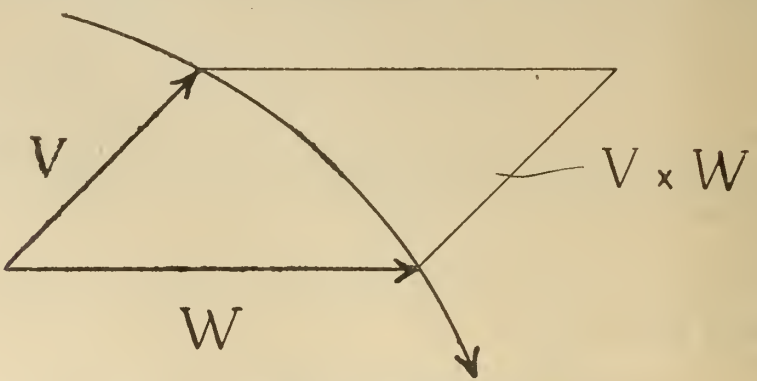


Abb. 1. Vektorisches Produkt zweier Vektoren.

Folge $\mathfrak{v}$ $\mathfrak{w}$ bestimmt (fig. 1). Ein zusammengesetzter Bivektor kann in versehiedenen Weisen als Summe zweier einfacher Bivektoren geschrieben werden, und stets als Summe zweier Bivektoren, deren

Ebenen vollständig senkrecht zueinander sind. Ein einfacher Bivektor ist zu seiner Ergänzung vollständig senkrecht und beide haben denselben Modulus.

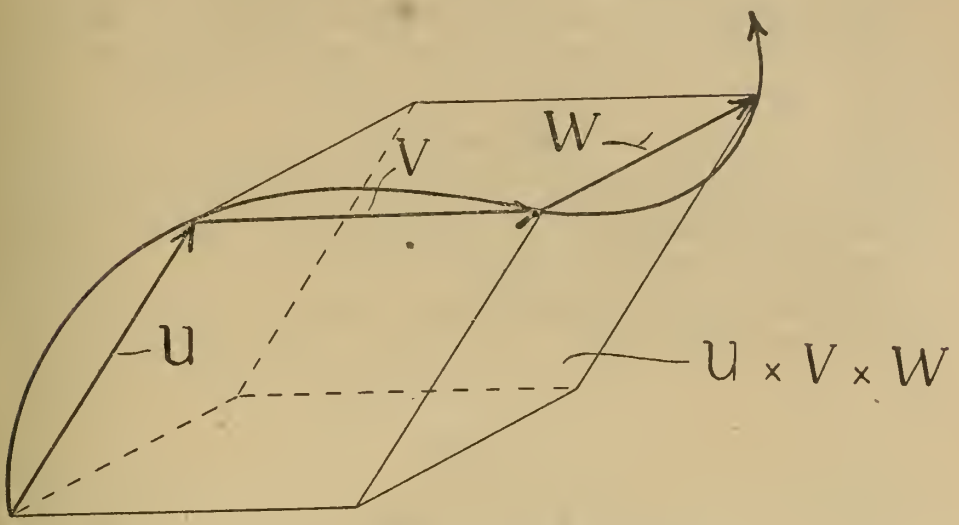


Abb. 2. Vektorisches Produkt dreier Vektoren.

Ein Trivektor ${}_3\mathfrak{V}$ läszt sich darstellen durch einen Teil einer Hyperebene von bestimmter Hyperflächenrichtung, und mit einem bestimmten durch einen Schraubpfeil angegebenen Richtungssinn, aber

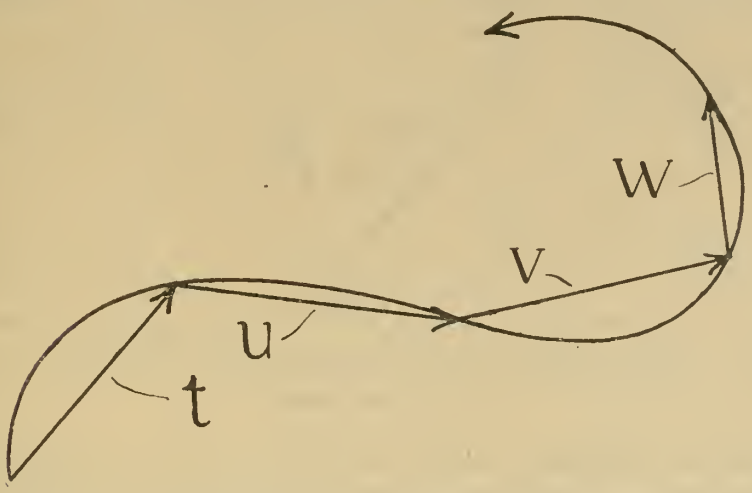


Abb. 3. Der Hyperschraubsinn des Quadrivektors $\mathfrak{t}\,\mathfrak{u}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{w}$, bestimmt durch die Reihenfolge der Faktoren.

von übrigens unbestimmter Form und Lage, dessen Inhalt dem Modulus

$$ {}_3v_m = \sqrt{-{}_3\mathfrak{V}\cdot{}_3\mathfrak{V}} \tag{46}$$

gleich ist. Das vektorische Produkt dreier Vektoren ist der Trivektor

ihres Spates. Der Schraubsinn wird durch die Reihenfolge der Faktoren bestimmt (fig. 2). Ein Vektor oder Trivektor ist senkrecht zu seiner Ergänzung und hat denselben Modulus.

Ein Quadrivektor ${}_4\mathbf{V}$ läszt sich darstellen durch einen vierdimensionalen Raumteil mit einem bestimmten Hyperschraubsinn, aber von unbestimmter Form und Lage, dessen Inhalt dem Modulus

$$(47) \qquad {}_4v_m = \sqrt{{}_4\mathbf{V}\,{}_4\mathbf{V}}$$

gleich ist. Das alternierende Produkt vierer Vektoren ist der Quadrivektor ihres Hyperspates. Der Hyperschraubsinn wird durch die Reihenfolge der Faktoren bestimmt (fig. 3).

Das skalare Produkt eines Vektors $\mathbf{V}$ mit einem einfachen Bivek-

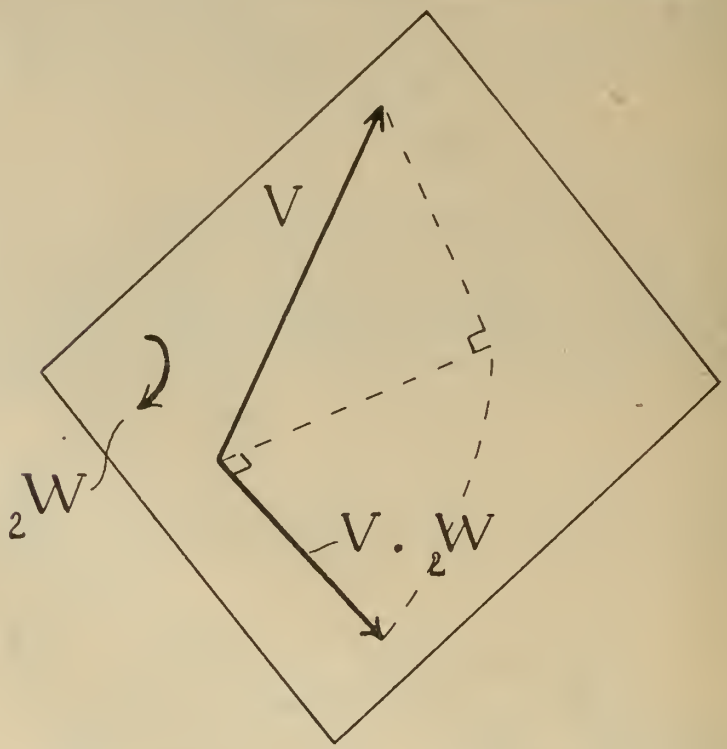


Abb. 4. Skalares Produkt eines Vektors mit einem einfachen Bivektor mit Modulus 1.

tor ${}_2\mathbf{W}$ mit Modulus 1 ist die um 90° gedrehte Projektion dieses Vektors auf die Ebene des Bivektors. Ist der Vektor erster Faktor, so bestimmt der Drehsinn des Bivektors den Sinn der Drehung (fig. 4), im anderen Falle ist der Sinn umgekehrt.

Bekanntlich findet eine allgemeine Drehung in vier Dimensionen um zwei gegenseitig vollständig senkrechte Ebenen statt. Sind ${}_2\mathbf{V}$ und ${}_2\mathbf{W}$ Bivektoren mit Modulus 1 in solchen durch den Ursprung gehenden Ebenen und ist $\mathbf{r}$ der Radiusvektor, so kann eine infini-

tesimale mit ${}_2\mathfrak{V}$ und ${}_2\mathfrak{W}$ gleichsinnige Drehung über $d\Phi$ um ${}_2\mathfrak{V}$ und über $d\Psi$ um ${}_2\mathfrak{W}$ dargestellt werden durch die Gleichung

$$(48) \qquad {}'\mathfrak{r} = \mathfrak{r} + \mathfrak{r} \cdot {}_2\mathfrak{V}\, d\Phi + \mathfrak{r} \cdot {}_2\mathfrak{W}\, d\Psi$$

Sind zwei einfache Bivektoren ${}_2\mathfrak{V}$ und ${}_2\mathfrak{W}$ vollständig senkrecht zu einander, so ist:

$$(49) \qquad {}_2\mathfrak{V} \cdot {}_2\mathfrak{W} = 0 \quad , \; {}_2\mathfrak{V} * {}_2\mathfrak{W} = 0 \quad ,$$

und das vektorische Produkt ist der Quadrivektor des durch ${}_2\mathfrak{V}$ und ${}_2\mathfrak{W}$ bestimmten Hyperspates. Sein Modulus ist ${}_2v_m\, {}_2w_m$. Sind ${}_2\mathfrak{V}$ und ${}_2\mathfrak{W}$ halbsenkrecht zueinander, so haben sie eine Richtung gemein, es ist

$$(50) \qquad {}_2\mathfrak{V} \cdot {}_2\mathfrak{W} = 0 \quad , \; {}_2\mathfrak{V} \times {}_2\mathfrak{W} = 0 \quad ,$$

und das mittlere Produkt stellt einen Bivektor dar, der zu ${}_2\mathfrak{V}$ und ${}_2\mathfrak{W}$ halbsenkrecht ist, und dessen Modulus gleich ${}_2v_m\, {}_2w_m$ ist. Liegen ${}_2\mathfrak{V}$ und ${}_2\mathfrak{W}$ in derselben Ebene, so ist

$$(51) \qquad {}_2\mathfrak{V} * {}_2\mathfrak{W} = 0 \quad , \; {}_2\mathfrak{V} \times {}_2\mathfrak{W} = 0 \quad ,$$

und das skalare Produkt ist gleich $-\,{}_2v_m\, {}_2w_m$, wenn die beiden Drehsinne übereinstimmen. Ist ${}_2\mathfrak{V}$ einfach und ${}_2\mathfrak{W}$ beliebig, so kann ${}_2\mathfrak{W}$ stets geschrieben werden als Summe von drei Bivektoren, ein einfacher in der Ebene von ${}_2\mathfrak{V}$, ein zusammengesetzter halbsenkrecht zu ${}_2\mathfrak{V}$ und ein einfacher vollständig senkrecht zu ${}_2\mathfrak{V}$. Hat ${}_2\mathfrak{V}$ den Modulus 1, so lautet die Zerlegung von ${}_2\mathfrak{W}$ infolge des associativen Gesetzes für $\dashv$:

$$(52) \; {}_2\mathfrak{W} = -({}_2\mathfrak{V} \cdot {}_2\mathfrak{V})\, {}_2\mathfrak{W} = -({}_2\mathfrak{V} \dashv {}_2\mathfrak{V}) \dashv {}_2\mathfrak{W} = -\,{}_2\mathfrak{V} \dashv ({}_2\mathfrak{V} \dashv {}_2\mathfrak{W}) =$$
$$= -\,{}_2\mathfrak{V}\,({}_2\mathfrak{V} \cdot {}_2\mathfrak{W}) - {}_2\mathfrak{V} * ({}_2\mathfrak{V} * {}_2\mathfrak{W}) - {}_2\mathfrak{V}\,({}_2\mathfrak{V} \times {}_2\mathfrak{W}).$$

Die geometrische Deutung der übrigen Produkte, die ebenso einfach ist, bleibe dem Leser überlassen.

Die skalaren Uebersehiebungen höherer Gröszen.

Zur Erlangung einer Regel, welche das ohne Gedächtnisarbeit anschreiben sämtlicher freier Regeln (26) gestattet, wenden wir uns zunächst zu den Produkten höherer Gröszen. Sind einige Gröszen verschiedener Hauptordnung als Produkte idealer Vektoren gegeben, so können aus den idealen Faktoren mit Hülfe der Multiplikationen $\circ$, $\frown$, $\smile$, $\cdot$ und $\times$ neue Gröszen gebildet werden, die orthogonale ganze simultane Kovarianten der gegebenen Gröszen sind.[a]) Die einfachsten Verknüpfungen dieser Art sind die *Uebersehiebungen*. Unter *i-te (gegenläufige) skalare Ueberschiebung* $\dashv$ der als geschriebenen Produkte idealer Vektoren Gröszen

---

a) Dasz alle ganze orthogonale Kovarianten in dieser Weise gebildet werden können ist Inhalt eines Satzes, der mit dem ersten Fundamentalsatz der symbolischen Methode der Invariantentheorie korrespondiert, und an anderer Stelle bewiesen wird.

$$(53) \qquad \overset{p}{\mathfrak{V}} = \mathfrak{V}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{V}_p$$

$$\overset{q}{\mathfrak{W}} = \mathfrak{W}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{W}_q$$

verstehen wir die Grösze:

$$(54) \qquad \overset{p}{\mathfrak{V}} \overset{i}{:} \overset{p}{\mathfrak{W}} = (\mathfrak{V}_p \cdot \mathfrak{W}_1) \ldots (\mathfrak{V}_{p-i+1} \cdot \mathfrak{W}_i)\, \mathfrak{V}_1 \ldots \mathfrak{V}_{p-i}\, \mathfrak{W}_{i+1} \ldots \mathfrak{W}_q .$$

Die nullte skalare Ueberschiebung ist offenbar mit dem algemeinen Produkt identisch. Unter *i-te (gegenläufige) alternierende skalare Ueberschiebung* $\overset{i}{:}$ verstehen wir ferner:

$$(55) \qquad \overset{p}{\mathfrak{V}} \overset{i}{:} \overset{q}{\mathfrak{W}} = (\mathfrak{V}_p \cdot \mathfrak{W}_1) \ldots (\mathfrak{V}_{p-i+1} \cdot \mathfrak{W}_i)\, \mathfrak{V}_1 \ldots \mathfrak{V}_{p-i} \overset{\frown}{\mathfrak{W}}_{i+1} \ldots \mathfrak{W}_q .$$

Die nullte alternierende skalare Uebersehiebung zweier alternierenden Gröszen ist offenbar mit dem alternierenden Produkt identisch. Die höchste skalare Überschiebung zweier Gröszen ist offenbar mit der höchsten alternierenden skalaren Überschiebung identisch, wenn die Faktoren von gleicher Hauptordnung sind, oder die Differenz der Hauptordungen 1 ist. Die skalaren Ueberschiebungen können auch nach anderen bestimmt angegebenen Faktoren gebildet werden, die angegebenen gegenläufigen sind aber für unsere Zweeke die wichtigsten. Sämtliche Uebersehiebungen sind distributive Verknüpfungen und also Produkte.

Für die skalaren Uebersehiebungen gelten offenbar folgende Hauptregeln:

1. Jede zweite oder höhere Uebersehiebung, bei der zwei symmetrisehe Faktoren des einen mit zwei alternierenden des anderen Faktors verknüpft werden, ist Null. Insbesondere ist also:

$$(56) \qquad {}^{2}\mathfrak{V} \overset{2}{:}_{2} \mathfrak{W} = 0.$$

2. Für $q \geq i + j$ gilt:

$$(57) \qquad \left(\overset{p}{\mathfrak{U}} \overset{i}{:} \overset{q}{\mathfrak{V}}\right) \overset{j}{:} \overset{r}{\mathfrak{W}} = \overset{p}{\mathfrak{U}} \overset{i}{:} \left(\overset{q}{\mathfrak{V}} \overset{j}{:} \overset{r}{\mathfrak{W}}\right) = \overset{p}{\mathfrak{U}} \overset{i}{:} \overset{q}{\mathfrak{V}} \overset{j}{:} \overset{r}{\mathfrak{W}},$$

insbesondere ist also:

$$(57a) \qquad \left(\mathfrak{U} \overset{1}{:} \overset{p}{\mathfrak{V}}\right) \overset{1}{:} \mathfrak{W} = \mathfrak{U} \overset{1}{:} \left(\overset{p}{\mathfrak{V}} \overset{1}{:} \mathfrak{W}\right) = \mathfrak{U} \overset{1}{:} \overset{p}{\mathfrak{V}} \overset{1}{:} \mathfrak{W}.$$

Allgemein gilt:

$$(58) \qquad \overset{p}{\mathfrak{U}} \overset{i}{:} \left(\overset{q}{\mathfrak{V}} \overset{q}{:} \overset{r}{\mathfrak{W}}\right) = \left(\overset{p}{\mathfrak{U}} \overset{q}{\mathfrak{V}}\right)^{i+q} \overset{r}{\mathfrak{W}},$$

insbesondere ist also:

$$(58a) \qquad \mathfrak{U} \overset{1}{:} \left(\mathfrak{V} \overset{1}{:} \overset{p}{\mathfrak{W}}\right) = (\mathfrak{U}\, \mathfrak{V}) \overset{2}{:} \overset{p}{\mathfrak{W}}.$$

3. Sind $\mathfrak{V}^p$ und $\mathfrak{W}^q$ als ideale Potenzen dargestellte symmetrisehe Gröszen, so ist:

$$(59) \qquad \mathfrak{V}^p \overset{i}{:} \mathfrak{W}^q = \mathfrak{V}^{p-i} \left[\mathfrak{V} \ldots \{\mathfrak{V} \cdot (\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{W})\, \mathfrak{W}\} \ldots \mathfrak{W}\right] \mathfrak{W}^{q-i}$$

$$= (\mathfrak{V} \cdot \mathfrak{W})^i\, \mathfrak{V}^{p-i}\, \mathfrak{W}^{q-i}.$$

Ebenso ist für alternierende Grösszen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}^p \overset{i}{:} \mathfrak{W}^q &= \mathfrak{V}^{p-i} \left[\mathfrak{V} \ldots . \left\{\mathfrak{V} . (\mathfrak{V} . \mathfrak{W})\, \mathfrak{W}\right\} \ldots . \mathfrak{W}\right] \mathfrak{W}^{q-i} \\ &= (-1)^{\frac{i(i-1)}{2}}\, \mathfrak{V}^{p-i}\, (\mathfrak{V} . \mathfrak{W})^i\, \mathfrak{W}^{q-i} \\ &= (-1)^{\frac{i(i-1)}{2} + (p-i)i}\, (\mathfrak{V} . \mathfrak{W})^i\, \mathfrak{V}^{p-i}\, \mathfrak{W}^{q-i} \end{aligned} \tag{60}$$

und:

$$\mathfrak{V}^p \overset{i}{:} \mathfrak{W}^q = (-1)^{\frac{i(i-1)}{2} + (p-i)i}\, (\mathfrak{V} . \mathfrak{W})^i\, \mathfrak{V}^{p-i} \overset{i}{\frown} \mathfrak{W}^{q-i}, \tag{61}$$

da hier infolge der Antikommutativität der idealen Bestimmungszahlen der $\mathfrak{V}$:

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{V} . \mathfrak{W}) = -(\mathfrak{V} . \mathfrak{W})\, \mathfrak{V}. \tag{62}$$

Infolgedessen ist:

$${}_p\mathfrak{V} \overset{i}{:} {}_q\mathfrak{W} = (-1)^{p\,q-i}\, {}_q\mathfrak{V} \overset{i}{:} {}_p\mathfrak{W}. \tag{63}$$

Die lineare homogene Transformation von Vektoren und Bivektoren.

Die erste skalare Ueberschiebung eines Affinors zweiter Hauptordnung mit einem Vektor:

$${}'\mathfrak{V} = \overset{2}{\mathfrak{p}} \overset{1}{:} \mathfrak{V} \tag{64}$$

stellt eine lineare homogene Transformation dar. Schreibt man

$$\overset{2}{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_1\, \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{q}_1\, \mathfrak{q}_2, \tag{65}$$

worin die $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ gleichberechtigte ideale Vektoren sind, so ist die korrespondierende Transformation des Bivektors ${}_2\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_1 \mathfrak{W}_2 = \mathfrak{W}_1 \times \mathfrak{W}_2$ ($\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$ sind ideal):

$$\begin{aligned} {}_2'\mathfrak{W} &= {}'\mathfrak{W}_1 \times {}'\mathfrak{W}_2 = \mathfrak{p}_1 (\mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{W}_1) \times \mathfrak{q}_1 (\mathfrak{q}_2 \cdot \mathfrak{W}_2) = \\ &= \mathfrak{p}_1 \times \mathfrak{q}_1\, (\mathfrak{p}_2\, \mathfrak{q}_2) \overset{2}{:} (\mathfrak{W}_2\, \mathfrak{W}_1) = \\ &= -(\mathfrak{p}_1 \times \mathfrak{q}_1)\, (\mathfrak{p}_2 \times \mathfrak{q}_2) \overset{2}{:} (\mathfrak{W}_1 \times \mathfrak{W}_2) \\ &= -(\mathfrak{p}_1 \times \mathfrak{q}_1)\, (\mathfrak{p}_2 \times \mathfrak{q}_2) \overset{2}{:} {}_2\mathfrak{W}. \end{aligned} \tag{66}$$

Der Affinor vierter Hauptordnung $\pm (\mathfrak{p}_1 \times \mathfrak{q})\, (\mathfrak{p}_2 \times \mathfrak{q}_2)$, der in den beiden ersten sowie in den beiden letzten Stellen alternierend ist, korrespondiert also mit einer linearen homogenen Transformation von Bivektoren, bei der einfache Bivektoren stets in einfache übergehen. Offenbar korrespondiert jeder Affinor der Form

$$(\mathfrak{r} \times \mathfrak{s})\, (\mathfrak{t} \times \mathfrak{u})$$

worin $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{u}$ ideale Vektoren sind, mit einer linearen homo-

gen Transformation von Bivektoren, und kann demnach treffend als *Bivektoraffinor* oder, wenn

$$(67) \qquad (\mathfrak{r} \times \mathfrak{s})(\mathfrak{t} \times \mathfrak{u}) = (\mathfrak{t} \times \mathfrak{u})(\mathfrak{r} \times \mathfrak{s}),$$

als *Bivektortensor* bezeichnet werden. Nicht jeder Bivektoraffinor korrespondiert aber mit einer *Vektortransformation*. Dazu ist notwendig und hinreichend, dasz die zugehörige Bivektortransformation alle *einfache* Bivektoren in *einfache* überführt. Ein Bivektortensor mit dieser besonderen Eigenschaft läszt sich schreiben:

$$\pm(\mathfrak{p} \times \mathfrak{q})(\mathfrak{p} \times \mathfrak{q})$$

und der zugehörige reelle reale Tensor zweiter Ordnung ist dann:

$$\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{q}^2.$$

Für die Theorie der höheren Mannigfaltigkeiten mit beliebiger Massbestimmung sind die Bivektortensoren wichtig, da der Riemann-Christoffelsche Affinor eine Grösze dieser Art ist.

Die Ueberschiebungsregel.[a])

Die alternierenden skalaren Ueberschiebungen sind besonders wichtig für die freien Rechenregeln (26). Jedes $.$, $\times$, $\overset{*}{1}$ oder $*$ Produkt zweier alternierender Gröszen ist nämlich bis auf einen Zahlenfaktor der alternierenden Ueberschiebung der Faktoren gleich. Dieser Faktor, der *Ueberschiebungsfaktor*, hat den Wert $\binom{p}{i}\binom{q}{i}i!$ wenn p und q die Anzahlen der Faktoren sind und i die Überschiebungsnummer, und ist also der *Anzahl der Terme des ausgeschriebenen Produktes* gleich. (Vgl. S. 16). Es ist aber nicht nötig den Ueberschiebungsfaktor zu kennen, da dieser gerade einen solchen Wert hat, dasz sämtliche *verschiedene* Anordnungen je *einmal* gezählt im Produkt auftreten. Dadurch ist es möglich ohne diesen Zahlenfaktor zu verwenden und also ohne Gedächtniszarbeit sämtliche Regeln sofort anzuschreiben, wenn nur die Ueberschiebungsnummer des Produktes bekannt ist. Diese Nummer ist folgendermaszen zu bestimmen. Sind die Stufen (Anzahlen der Vektorfaktoren in den Faktoren) p und q und die Hauptstufen p' und q', so ist die höchste Ueberschiebungsnummer u die kleinste der Zahlen p und q und die Anzahl der Ueberschiebungen v um 1 grösser als die kleinste der Zahlen p' und q'. Die Ueberschiebungsnummern sind also $u, \ldots, u - v + 1$. Für $n = 4$ ergiebt sich daraus folgende praktische Regel:

Giebt es nur eine Ueberschiebung, so korrespondiert diese mit der Multiplikation $\overset{*}{1}$, *giebt es zwei Ueberschiebungen, so korrespondiert*

a) Näheres siehe 18. 1.

die höchste mit ., und die niedrigste mit $\times$, *wenn die Anzahl der Vektorenfaktor in* **beiden** *Faktoren* ≤ 2 *ist oder in* **beiden** > 2, *im anderen Falle ist die Korrespondenz umgekehrt. Für drei Ueberschiebungen korrespondiert die höchste mit ., die mittlere mit* $*$ *und die niedrigste mit* $\times$ (vgl. S. 12).

Aus dem Umstande, dasz die höchste alternierende Ueberschiebung der höchsten gewöhnlichen gleich ist, folgen einige Regeln für die Produkte von Lineargröszen die sich in den folgenden Abschnitten als wichtig erweisen werden (vgl. S. 16):

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b} = \mathbf{a}\,{}^{1}\!:\mathbf{b} & {}_2\mathbf{a} \,.\, {}_2\mathbf{b} = 2\,{}_2\mathbf{a}\,{}^{2}\!:{}_2\mathbf{b} \\
\mathbf{a} \,.\, {}_2\mathbf{b} = 2\mathbf{a}\,{}^{1}\!:{}_2\mathbf{b} & {}_2\mathbf{a} \times {}_3\mathbf{b} = 6\,{}_2\mathbf{a}\,{}^{2}\!:{}_3\mathbf{b} \\
\mathbf{a} \times {}_3\mathbf{b} = 3\mathbf{a}\,{}^{1}\!:{}_3\mathbf{b} & {}_2\mathbf{a} \quad {}_4\mathbf{b} = 12\,{}_2\mathbf{a}\,{}^{2}\!:{}_4\mathbf{b} \\
\mathbf{a} \quad {}_4\mathbf{b} = 4\mathbf{a}\,{}^{1}\!:{}_4\mathbf{b} &
\end{array}
\tag{68}
$$

$$
\begin{array}{l}
{}_3\mathbf{a} \,.\, {}_3\mathbf{b} = 6\,{}_3\mathbf{a}\,{}^{3}\!:{}_3\mathbf{b} \\
{}_3\mathbf{a} \quad {}_4\mathbf{b} = 24\,{}_3\mathbf{a}\,{}^{3}\!:{}_4\mathbf{b} \\
{}_4\mathbf{a} \quad {}_4\mathbf{b} = 24\,{}_4\mathbf{a}\,{}^{4}\!:{}_4\mathbf{b}.
\end{array}
$$

Das System R_4^0 *und die einfache Relativitätstheorie.*

Verschiedene Autoren über die einfache Relativitätstheorie haben Fragmente des Systemes R_4^0 aufgefunden und verwertet. Bei Abraham, Sommerfeld, Frank und Laue [1]) treten im ganzen fünf multiplikative Verknüpfungen auf, und von diesen werden zwei durch Einführung des zu einem Bivektor ${}_2\mathbf{V}$ gehörigen „dualen" Bivektors, (dualer Sechservektor, in unserem System $-\mathbf{I}_2\mathbf{V} = -{}_2\mathbf{V}\mathbf{I}$), verdoppelt [a]). Wilson und Lewis [2]) haben auf diesen Grundlagen fortgebaut und erreichen alle Multiplikationen bis auf drei [b]). Alle Ableitungen beruhen auf Analogieen mit der gewöhnlichen Vektoranalysis, und die erhaltenen Multiplikationen sind keine Teile einer associativen Multiplikation. Infolge dessen können die freien Reehenregeln nicht nach der Ueberschiebungsregel ohne Gedächtniszarbeit sofort angeschrieben werden, sondern lassen nur tabellarischen Gebrauch zu. Auch sind nicht sämtliche Regeln vorhanden und sind die Namen

---

a) Das Verhältnisz von ${}_2\mathbf{V}$ und $-\mathbf{I}_2\mathbf{V}$ ist keine eigentliche Dualität. In der einzigen bei der orthogonalen Gruppe wirklich existierenden Dualität $\mathbf{i}$, $\mathbf{i}'$ (vgl. (25)), ist $\mathbf{i}_{\overline{12}}$ nicht dualistisch zu $\mathbf{I}\,\mathbf{i}_{\overline{12}}$ sondern zu sich selbst.

b) Auf das Fehlen dieser drei Multiplikationen sowie auf die Beziehungen zu einem Sedenionensystem hat zuerst J. B. Shaw 3) aufmerksam gemacht.

---

[1]) 10. 1, 10. 2, 11. 1, 11. 2
[2]) 10. 3, 12. 1.
[3]) 13. 2.

skalar und vektorisch nur analogiemäszig, und nicht nach einem bestimmten Prinzip, über die vorhandenen Multiplikationen verteilt. So kommt auch die Dualität $\mathbf{i}$, $\mathbf{i}'$ nicht zum Ausdruck, sogar nicht bei Wilson und Lewis, obwohl diese Autoren Einheiten der Art $\mathbf{i}_0$, $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ verwenden. Der Graszmann'schen Ausdehnungslehre liegt zunächst die lineare homogene Gruppe zugrunde, und insofern korrespondiert sie bis auf Vorzeichenänderungen mit dem Systeme S_n' (vergl. S. 30 und 31 Fuszn. [1])). Durch Verwendung der Ergänzung (vergl. S. 14) entsteht die innere Multiplikation, welche Anwendung auf die rotationale Gruppe ermöglicht. Auch für diese Gruppe gestattet die Ausdehnungslehre nur tabellarischen Gebrauch der Rechenregeln. Nachstehende dualistisch geordnete Tabelle giebt eine Uebersicht der bei einigen Autoren vorkommenden Produkte.[a])

Graszmann.	Wilson—Lewis.		Sommerfeld, Laue, etc.
$+[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$	$+\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$	$\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$	$+[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$ vektorisches Produkt.
$+[\mathfrak{a}\mid\mathfrak{b}]$	$-\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{b}$	$\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$	$+(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$ skalares Produkt.
$+[\mathfrak{a}\,{}_2\mathfrak{b}]$	$+\mathfrak{a}\times{}_2\mathfrak{b}$	$\mathfrak{a}\times{}_2\mathfrak{b}={}_3\mathfrak{c}$	$+\mathbf{I}\,\mathfrak{c}=[\mathfrak{a}\,{}_2\mathfrak{b}^*]$ vekt. Prod. mit dualem Bivector.
$+\mid[\mathfrak{a}\mid{}_2\mathfrak{b}]$	$+\mathfrak{a}\,.\,{}_2\mathfrak{b}$	$\mathfrak{a}\,.\,{}_2\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$	$-[\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}]$ vektorisches Produkt.
$\pm 1\,\mathfrak{a}=\pm\mathfrak{a}\,1$	$\pm k\,\mathfrak{a}=\pm\mathfrak{a}\,k$	$\mathfrak{a}\,\mathbf{I}=-\mathbf{I}\,\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$ *)	
$+[\mathfrak{a}\,{}_3\mathfrak{b}]$	$+\mathfrak{a}\times{}_3\mathfrak{b}$	$\mathfrak{a}\,.\,{}_3\mathfrak{b}={}_4\mathfrak{c}$ *)	Selbstdualistisch.
$+\mid[\mathfrak{a}\mid{}_3\mathfrak{b}]$	$-\mathfrak{a}\,.\,{}_3\mathfrak{b}$	$\mathfrak{a}\times{}_3\mathfrak{b}={}_2\mathfrak{c}$	$+\mathbf{I}\,{}_4\mathfrak{c}=({}_2\mathfrak{a}\,{}_2\mathfrak{b}^*)$ skal. Prod. mit dualem Bivector.
$+[{}_2\mathfrak{a}\,{}_2\mathfrak{b}]$	$+{}_2\mathfrak{a}\times{}_2\mathfrak{b}$	${}_2\mathfrak{a}\times{}_2\mathfrak{b}={}_4\mathfrak{c}$ *)	
		${}_2\mathfrak{a}*{}_2\mathfrak{b}={}_2\mathfrak{c}$	$+[{}_1\mathfrak{a}\,{}_2\mathfrak{b}]$ vekt. Produkt. (Mie).
$-[{}_2\mathfrak{a}\mid{}_2\mathfrak{b}]$	$-{}_2\mathfrak{a}\,.\,{}_2\mathfrak{b}$	${}_2\mathfrak{a}\,.\,{}_2\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$	$-({}_2\mathfrak{a}\,{}_2\mathfrak{b})$ skalares Produkt.
$\pm 1_2\,\mathfrak{a}=\pm{}_2\mathfrak{a}\,1$	$\pm k\,{}_2\mathfrak{a}=\pm{}_2\mathfrak{a}\,k$	${}_2\mathfrak{a}\,\mathbf{I}=\mathbf{I}\,{}_2\mathfrak{a}={}_2\mathfrak{b}$ *)	$-{}_2\mathfrak{b}=+{}_2\mathfrak{a}^*$.
$1\,.\,1=1$	$k\,k=-1$	$\mathbf{I}^2=+1$ *)	
$\pm 1_3\,\mathfrak{a}=\pm{}_3\mathfrak{a}\,1$	$\pm k\,{}_3\mathfrak{a}=\pm{}_3\mathfrak{a}\,k$	${}_3\mathfrak{a}\,\mathbf{I}=-\mathbf{I}\,{}_3\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$ *)	
		${}_3\mathfrak{a}\,.\,{}_2\mathfrak{b}={}_2\mathfrak{c}$	
$+[\mid{}_3\mathfrak{a}\mid{}_2\mathfrak{b}]$	$-{}_3\mathfrak{a}\,.\,{}_2\mathfrak{b}$	${}_3\mathfrak{a}\times{}_2\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$	
$-[{}_3\mathfrak{a}\mid{}_3\mathfrak{b}]$	$+{}_3\mathfrak{a}\,.\,{}_3\mathfrak{b}$	${}_3\mathfrak{a}\,.\,{}_3\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$	
$-[\mid{}_3\mathfrak{a}\mid{}_3\mathfrak{b}]$		${}_3\mathfrak{a}\times{}_3\mathfrak{b}={}_2\mathfrak{c}$	

Das System R_4^2 umfasst die existierenden Fragmente, es enthält alle Multiplikationen, die von Lineargröszen zu Lineargröszen führen, und dürfte, der einfachen Behandlung der Produkte mit Hülfe der Uebersehiebungsregel wegen, für den praktischen Gebrauch besonders

a) Jedes Produkt ist durch ein Beispiel angegeben, für die Multiplikationen ist die Schreibweise der verschiedenen Autoren verwendet, für die Grözen aber überall die hier gefolgte Schreibweise. Nur der duale Bivektor ist mit dem üblichen Stern bezeichnet, während k den kommutativen Skalar von Wilson und Lewis andeutet. Bei den mit *) bezeichneten Produkten ist die Korrespondenz mit den anderen Systemen eine mangelhafte, da diese Systeme den nichtkommutativen Skalar $\mathbf{I}$ nicht enthalten.

[1]) 13. 2.

geeignet sein. Von Anwendungen wird hier abgesehen, da diese sich von selbst in den beiden folgenden Abschnitten ergeben.

Die Faltungen.

Unter (skalare) *Faltung*[a]) der als Produkt idealer Vektoren geschriebenen Grösze $\overset{p}{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_p$ nach den Faktoren $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_j$, $i < j$, verstehen wir die Grösze:

$$(\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_j)\, \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_{i-1}\, \mathfrak{a}_{i+1} \ldots \mathfrak{a}_{j-1}\, \mathfrak{a}_{j+1} \ldots \mathfrak{a}_p .$$

Eine Grösze kann auch nach mehreren Paaren gefaltet werden, und jede skalare Ueberschiebung ist offenbar eine mehrfache Faltung des allgemeinen Produktes der Faktoren. Skalare Faltungen können, der bestehenden Dualität wegen, auch gebildet werden, wenn die Gröszen als Produkte von realen oder idealen Trivektoren gegeben sind.

Die vektorischen Ueberschiebungen höherer Gröszen.

Unter *i-te vektorische Ueberschiebung* $\overset{i}{\rightharpoonup}$ einer alternierenden Grösze ${}_p\mathfrak{a}$ mit einer allgemeinen Grösze $\overset{q}{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_q$, $p + i \leqq 4$, verstehen wir die in den ersten $p + i$ Faktoren alternierende Grösze

$$(69) \qquad {}_p\mathfrak{a} \overset{i}{\rightharpoonup} \overset{q}{\mathfrak{b}} = ({}_p\mathfrak{a}\, \mathfrak{b}_1 \overset{\frown}{\ldots} \mathfrak{b}_i)\, \mathfrak{b}_{i+1} \ldots \mathfrak{b}_q .$$

$\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_i$ heiszen die *ergänzenden Faktoren*. Die Ueberschiebung kann auch an der anderen Seite gebildet werden und auch für den Fall, dasz die Faktoren als Produkte realer oder idealer Trivektoren gegeben sind. Der Haken des Multiplikationszeichens zeigt stets nach der Seite des Faktors, dem die ergänzenden Faktoren entnommen werden. Für vektorische Ueberschiebungen gelten offenbar folgende Hauptregeln:

1. Eine vektorische Ueberschiebung ist stets Null, wenn zwei der ergänzenden Faktoren gegenseitig symmetrisch sind.

2. Für $j \geqq q + i$, $p + i + j \leqq 4$, gilt:

$$(70) \qquad {}_p\mathfrak{a} \overset{j}{\rightharpoonup} ({}_q\mathfrak{b} \overset{i}{\rightharpoonup} \overset{r}{\mathfrak{c}}) = ({}_p\mathfrak{a} \frown {}_q\mathfrak{b}) \overset{j-q}{\rightharpoonup} \overset{r}{\mathfrak{c}},$$

insbesondere also:

$$(71) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{a} \overset{1}{\rightharpoonup} (\mathfrak{a}\, \overset{q}{\mathfrak{b}}) &= (\mathfrak{a} \times \mathfrak{a})\, \overset{q}{\mathfrak{b}} = 0 \\ \mathfrak{a} \overset{2}{\rightharpoonup} (\mathfrak{a} \overset{1}{\rightharpoonup} \overset{q}{\mathfrak{b}}) &= 0 \\ \mathfrak{a} \overset{3}{\rightharpoonup} (\mathfrak{a} \overset{2}{\rightharpoonup} \overset{q}{\mathfrak{b}}) &= 0. \end{aligned}$$

3. Für $i + j \leqq q$, $p + i \leqq 4$, $q + j \leqq 4$, gilt:

a) Vergl. S. 31.

(72) $$({}_p\mathbf{a} \overset{i}{\rightharpoonup} \overset{q}{\mathbf{b}}) \overset{j}{\rightharpoondown} {}_r\mathbf{c} = {}_p\mathbf{a} \overset{i}{\rightharpoonup} (\overset{q}{\mathbf{b}} \overset{j}{\rightharpoondown} {}_r\mathbf{c}) = {}_p\mathbf{a} \overset{i}{\rightharpoonup} \overset{q}{\mathbf{b}} \overset{j}{\rightharpoondown} {}_r\mathbf{c}.$$

Das mit den Ueberschiebungen und Faltungen erweiterte System R_4^o nennen wir $R_{4\infty}^o$. Die theoretische Bedeutung der Systeme $R_{n\infty}^o$ gründet sich auf der an anderer Stelle zu beweisenden Eigenschaft, dasz sich sämtliche rationale ganze rotationale Kovarianten einer gegebenen Reihe von Gröszen aus den idealen Vektorfaktoren dieser Gröszen und einer beliebigen Anzahl Faktoren $\mathbf{I}$ und ${}^2\mathbf{g} = \mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_1 + \ldots + \mathbf{i}_4\,\mathbf{i}_4$ vermittels der Multiplikationen $\circ$ und . ableiten lassen. Ihre praktische Bedeutung beruht auf der Ueberschiebungsregel, welche das Rechnen ohne Tabellen ermöglicht.

Die Zerlegung eines Affinors zweiter Hauptordnung.

Jeder Affinor zweiter Hauptordnung $\mathbf{a}\,\mathbf{b}$ kann in drei Teile zerlegt werden, den *Skalarteil*:

(73) $$S\,\mathbf{a}\,\mathbf{b} = {}^1/_4\,(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,{}^2\mathbf{g},$$

wo:

(74) $${}^2\mathbf{g} = \mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_1 + \ldots + \mathbf{i}_4\,\mathbf{i}_4,$$

den *Bivektorteil*:

(75) $$B\,\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

und den *Deviatorteil*:

(76) $$D\,\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{a}\,\mathbf{b} - {}^1/_4\,(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,{}^2\mathbf{g} - \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Der *Tensorteil* ist:[1])

(77) $$T\,\mathbf{a}\,\mathbf{b} = S\,\mathbf{a}\,\mathbf{b} + D\,\mathbf{a}\,\mathbf{b} = {}^1/_2\,(\mathbf{a}\,\mathbf{b} + \mathbf{b}\,\mathbf{a}).$$

Die Zerlegung ist invariant, und jeder Teil kann als Produkt der idealen Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgefasst werden. Der dritte Teil heiszt das *deviatorische* Produkt $\times$ von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ [2]).

Wendet man diese Zerlegung an auf die erste Ueberschiebung zweier Bivektoren:

(78) $${}_2\mathbf{V} \overset{1}{:} {}_2\mathbf{W} = \mathbf{V}^2 \overset{1}{:} \mathbf{W}^2 = \mathbf{V}\,(\mathbf{V}\,.\,\mathbf{W})\,\mathbf{W} = -(\mathbf{V}\,.\,\mathbf{W})\,\mathbf{V}\,\mathbf{W},$$

so ist der Skalarteil (vgl. (68)):

(79) $$-{}^1/_4\,(\mathbf{V}\,.\,\mathbf{W})\,(\mathbf{V}\,.\,\mathbf{W})\,{}^2\mathbf{g} = {}^1/_4\,({}_2\mathbf{V} \overset{2}{:} {}_2\mathbf{W})\,{}^2\mathbf{g} = {}^1/_8\,({}_2\mathbf{V} \cdot\cdot {}_2\mathbf{W})\,{}_2\mathbf{g}$$

[1]) Vgl. 14. 2. S. 69.
[2]) Vgl. 14. 2. S. 73.

gleich $^1/_4$ der zweiten Ueberschiebung multipliziert mit $^2\mathfrak{g}$, und der Bivektorteil wird Null für ${}_2\mathfrak{V} = {}_2\mathfrak{W}$. Für die erste Ueberschiebung der Ergänzungen von ${}_2\mathfrak{V}$ und ${}_2\mathfrak{W}$ gilt:

$$\begin{aligned} S\,{}_2\mathfrak{V}^* \,{}^1{:}\, {}_2\mathfrak{W}^* &= \quad S\,{}_2\mathfrak{V} \,{}^1{:}\, {}_2\mathfrak{W} = {}^1/_4\,({}_2\mathfrak{V} \,{}^2{:}\, {}_2\mathfrak{W})\,{}^2\mathfrak{g} \\ B\,{}_2\mathfrak{V}^* \,{}^1{:}\, {}_2\mathfrak{W}^* &= \quad B\,{}_2\mathfrak{V} \,{}^1{:}\, {}_2\mathfrak{W} = {}^1/_4\,({}_2\mathfrak{V} * {}_2\mathfrak{W}) \\ D\,{}_2\mathfrak{V}^* \,{}^1{:}\, {}_2\mathfrak{W}^* &= -D\,{}_2\mathfrak{V} \,{}^1{:}\, {}_2\mathfrak{W}. \end{aligned} \tag{80}$$

Für den Deviatorteil von ${}_2\mathfrak{V} \,{}^1{:}\, {}_2\mathfrak{W}$ gelten also die Umformungen:

$$\begin{aligned} D\,{}_2\mathfrak{V} \,{}^1{:}\, {}_2\mathfrak{W} &= {}^1/_2\,({}_2\mathfrak{V} \,{}^1{:}\, {}_2\mathfrak{W} - {}_2\mathfrak{V}^* \,{}^1{:}\, {}_2\mathfrak{W}^*) = {}^1/_2\,({}_2\mathfrak{W} \,{}^1{:}\, {}_2\mathfrak{V} - {}_2\mathfrak{W}^* \,{}^1{:}\, {}_2\mathfrak{V}^*) = \\ &= {}^1/_2\,({}_2\mathfrak{V} \,{}^1{:}\, {}_2\mathfrak{W} + {}_2\mathfrak{W} \,{}^1{:}\, {}_2\mathfrak{V}) \quad - {}^1/_4\,({}_2\mathfrak{V} \,{}^2{:}\, {}_2\mathfrak{W})\,{}^2\mathfrak{g} = \\ &= \quad {}_2\mathfrak{V} \,{}^1{:}\, {}_2\mathfrak{W} - {}^1/_4\,{}_2\mathfrak{V} * {}_2\mathfrak{W} - {}^1/_4\,({}_2\mathfrak{V} \,{}^2{:}\, {}_2\mathfrak{W})\,{}^2\mathfrak{g} \end{aligned} \tag{81}$$

und für ${}_2\mathfrak{V} = {}_2\mathfrak{W}$:

$$D\,{}_2\mathfrak{V} \,{}^1{:}\, {}_2\mathfrak{V} = {}^1/_2\,({}_2\mathfrak{V} \,{}^1{:}\, {}_2\mathfrak{V} - {}_2\mathfrak{V}^* \,{}^1{:}\, {}_2\mathfrak{V}^*) = {}_2\mathfrak{V} \,{}^1{:}\, {}_2\mathfrak{V} - {}^1/_4\,({}_2\mathfrak{V} \,{}^2{:}\, {}_2\mathfrak{V})\,{}^2\mathfrak{g}. \tag{82}$$

Die Verknüpfung $D\,{}_2\mathfrak{V} \,{}^1{:}\, {}_2\mathfrak{W}$ ist ein *kommutatives* Produkt, das *deviatorische* Produkt [a]) $\times$ von ${}_2\mathfrak{V}$ und ${}_2\mathfrak{W}$:

$${}_2\mathfrak{V} \times {}_2\mathfrak{W} = D\,{}_2\mathfrak{V} \,{}^1{:}\, {}_2\mathfrak{W}. \tag{83}$$

Das System S^l_n der Lineargrößen.

Wir kehren zurück zu den vor Einführung der kwadratischen Form betrachteten ko- bez. kontravarianten Vektoren mit den Einheiten $\mathfrak{e}_\lambda$, $\mathfrak{e}'_\lambda$, $\lambda = a, \ldots, d$. In Bezug auf diese Größen läßt sich in derselben Weise wie oben eine allgemeine, eine symmetrische und eine alternierende Multiplikation definieren, und allgemeine sowie symmetrische und alternierende ko- bez. kontravariante Affinoren verschiedener Ordnung. Statt Hauptordnung, Hauptrang und Hauptstufe treten die Begriffe Ordnung, Rang und Stufe [b]). Dazu gesellen sich gemischte Größen, die in ihren Gliedern ko- und kontravariante Vektoren als Faktor enthalten. Allen diesen Größen liegt die lineare homogene Gruppe zu Grunde. Zu den Lineargrößen dieser Gruppe gehört das Zahlensystem S^l_4 [c]) mit den Rechenregeln:

---

a) Ist ${}_2\mathfrak{M}$ der elektromagnetische Bivektor, so ist ${}_2\mathfrak{M} \,{}^1{:}\, {}_2\mathfrak{M}$ der Sommerfeld'sche Tensor. $D_2\mathfrak{M} \,{}^1{:}\, {}_2\mathfrak{M}$ der Laue'sche Tensor [1]) und ${}^1/_4\,{}_2\mathfrak{M} \,{}^2{:}\, {}_2\mathfrak{M}$ der Laue'sche Skalar.

b) Vergl. 18. 1.

c) Die Ableitung der Systeme S^l_n erfolgt an anderer Stelle.

---

[1]) 10. 2. S. 765.

$$
\left.\begin{array}{l}
\mathfrak{e}_a \wedge \mathfrak{e}_b = -\mathfrak{e}_b \wedge \mathfrak{e}_a = \mathfrak{e}_a \wedge \mathfrak{e}_b = \mathfrak{e}_{\overline{ab}} = \dfrac{\mathfrak{e}_{ab} \wedge \mathfrak{e}_{ba}}{2} \\
\mathfrak{e}_a \wedge \mathfrak{e}'_a = \mathfrak{e}_a' \wedge \mathfrak{e}_a = 1 \\
\mathfrak{e}_a \wedge \mathfrak{e}_{\overline{bc}} = \mathfrak{e}_{\overline{bc}} \wedge \mathfrak{e}_a = \mathfrak{e}_a \frown \mathfrak{e}_{\overline{bc}} = \mathfrak{e}_{\overline{abc}} \\
\mathfrak{e}_a \wedge \mathfrak{e}'_{\overline{ab}} = -\mathfrak{e}'_{\overline{ab}} \wedge \mathfrak{e}_a = \mathfrak{e}'_b \\
\mathfrak{e}_a \wedge \mathfrak{e}_{\overline{bcd}} = -\mathfrak{e}_{\overline{bcd}} \wedge \mathfrak{e}_a = \mathfrak{e}_a \frown \mathfrak{e}_{\overline{bcd}} = \mathfrak{e}_{\overline{abcd}} = \mathbf{E} \\
\mathfrak{e}_a \wedge \mathfrak{e}'_{\overline{abc}} = \mathfrak{e}'_{\overline{abc}} \wedge \mathfrak{e}_a = \mathfrak{e}'_{\overline{bc}} \\
\mathfrak{e}_a \wedge \mathbf{E}' = -\mathbf{E}' \wedge \mathfrak{e}_a = \mathfrak{e}'_{\overline{bcd}} \\
\mathfrak{e}_{\overline{ab}} \wedge \mathfrak{e}_{\overline{cd}} = \mathfrak{e}_{\overline{cd}} \wedge \mathfrak{e}_{\overline{ab}} = \mathfrak{e}_{\overline{abcd}} = \mathbf{E} \\
\mathfrak{e}_{\overline{ab}} \wedge \mathfrak{e}'_{\overline{ab}} = \mathfrak{e}'_{\overline{ab}} \wedge \mathfrak{e}_{\overline{ab}} = -1 \\
\mathfrak{e}_{\overline{ab}} \wedge \mathbf{E}' = \mathbf{E}' \wedge \mathfrak{e}_{\overline{ab}} = -\mathfrak{e}'_{\overline{cd}} \\
\mathbf{E} \wedge \mathbf{E}' = \mathbf{E}' \wedge \mathbf{E} = +1 \\
\mathfrak{e}_{\overline{bcd}} \wedge \mathfrak{e}'_{\overline{bcd}} = -\mathfrak{e}'_{\overline{bcd}} \wedge \mathfrak{e}_{\overline{bcd}} = -1 \\
\mathfrak{e}_{\overline{bcd}} \wedge \mathfrak{e}'_{\overline{bc}} = \mathfrak{e}'_{\overline{bc}} \wedge \mathfrak{e}_{\overline{bcd}} = -\mathfrak{e}_d \\
\mathfrak{e}_{\overline{bcd}} \wedge \mathbf{E}' = \mathbf{E}' \wedge \mathfrak{e}_{\overline{bcd}} = \mathfrak{e}'_a
\end{array}\right\} \text{ cycl. } a, b, c, d, \text{ dual. } \mathfrak{e} \longleftrightarrow \mathfrak{e}'. \tag{83}
$$

$\wedge$ ist die *äussere Multiplikation*, die beim Uebergang zur speziellaffinen Gruppe bis auf Vorzeichenunterschiede mit der Grassmann'schen Multiplikation korrespondiert. (Vgl. S. 25 und 31.) Mit Hülfe dieser Multiplikation können Ueberschiebungen und Faltungen von Gröszen in ähnlicher Weise wie oben definiert werden.

Die *i-te (gegenläufige) skalare Ueberschiebung*[a]) $\overset{p}{\mathfrak{a}} \overset{i}{:} \overset{q}{\mathfrak{b}}'$ von $\overset{p}{\mathfrak{a}}$ und $\overset{q}{\mathfrak{b}}'$ ist

$$
\overset{p}{\mathfrak{a}} \overset{i}{:} \overset{q}{\mathfrak{b}}' = (\mathfrak{a}_p \wedge \mathfrak{b}'_1) \ldots (\mathfrak{a}_{p-i+1} \wedge \mathfrak{b}'_i)\, \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_{p-i}\, \mathfrak{b}'_{i+1} \ldots \mathfrak{b}'_q \text{ [b])}. \tag{84}
$$

Ebenso giebt es eine alternierende skalare Ueberschiebung. Für diese Ueberschiebungen gelten die S. 22 angegebenen Regeln, wenn $\mathfrak{b}$ überall ersetzt wird durch $\mathfrak{b}'$, und die zu diesen Regeln dualistischen.

Die *i-te vektorische Ueberschiebung* von ${}_p\mathfrak{a}$ und $\overset{q}{\mathfrak{b}}$, $p + i \leqq n$ ist:

$$
{}_p\mathfrak{a} \overset{i}{\rightharpoonup} \overset{q}{\mathfrak{b}} = ({}_p\mathfrak{a}\, \overset{\frown}{\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_i})\, \mathfrak{b}_{i+1} \ldots \mathfrak{b}_q. \tag{85}
$$

Für diese Ueberschiebungen gelten die S. 27 angegebenen Regeln und die zu diesen Regeln dualistischen.

---

a) Ähnliche Verknüpfungen treten auf bei E. Müller [1]) und F. Jung [2]) auf und heiszen dort *mehrfaltige* Multiplikationen.

b) Die Zeichen der skalaren Überschiebungen des Systems R_n^0 und S_n^l sind gleich genommen. Dies kann keinen Anlasz zu Verwirrungen geben, solange man sich stets darüber Rechenschaft giebt in welchem System die Rechnung erfolgt, d. h. welche Gruppe den Betrachtungen zu Grunde liegt. Beim Übergang zur orthogonalen Gruppe gehen die skalaren Überschiebungen von S_n^l in die von R_n^0 über.

---

[1]) 14. 3.

[2]) 17. 8 S. 5.

Auch nach anderen bestimmt angegebenen Faktoren können Ueberschiebungen gebildet werden.

Unter *skalare Faltung* einer gemischten Grösze, z. B. $\overset{p}{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,\overset{q}{\mathfrak{c}}\,\mathfrak{d}'\,\overset{r}{\mathfrak{e}}'$ nach den Faktoren $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}'$ verstehen wir die Grösze

$$(\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{d}')\,\overset{p\ q\ r}{\mathfrak{a}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{e}}'.$$

Jede skalare Ueberschiebung kann durch mehrfache Faltung des allgemeinen Produktes der Faktoren erhalten werden. [b]) Das mit den Ueberschiebungen und Faltungen erweiterte System S_4^l nennen wir $S_{4\infty}^l$.

Auch die freien Rechenregeln von S_4^l lassen sich, wie die von R_4^0, in systematischer Weise angeben. [c]) Da das System S_4^l hier nur vorübergehend verwendet zu werden braucht, geben wir nur einige der wichtigsten Regeln an:

(86)
$$\left.\begin{array}{l}
\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} = \text{Grösse zweiter Stufe} \\
\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}' = \text{Skalar in 1} \\
\mathfrak{a} \wedge (\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\,\hat{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\,\widehat{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{c} \\
\mathfrak{a} \wedge (\mathfrak{b}' \wedge \mathfrak{c}') = (\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}')\,\mathfrak{c}' - (\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{c}')\,\mathfrak{b}' \\
\mathfrak{a} \wedge (\mathfrak{b}\,\hat{\mathfrak{c}}\,\mathfrak{d}) = \mathfrak{a}\,\hat{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\,\widehat{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d} = \text{Skalar in } \mathbf{E} \\
\mathfrak{a} \wedge (\mathfrak{b}'\,\hat{\mathfrak{c}}'\,\mathfrak{d}') = (\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}')\,\mathfrak{c}' \wedge \mathfrak{d}' + \ldots \\
\mathfrak{a} \wedge (\mathfrak{b}'\,\mathfrak{c}'\,\hat{\mathfrak{d}}'\,\mathfrak{e}') = (\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}')\,\mathfrak{c}'\,\hat{\mathfrak{d}}'\,\mathfrak{e}' + \ldots \\
(\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \wedge (\mathfrak{c} \wedge \mathfrak{d}) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\hat{\mathfrak{c}}\,\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\widehat{\mathfrak{c}}\,\mathfrak{d} \\
(\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \wedge (\mathfrak{c}' \wedge \mathfrak{d}') = (\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c}')(\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{d}') - (\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{d}')(\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{c}').
\end{array}\right\} \text{dual. } \mathfrak{X} \longleftrightarrow \mathfrak{X}'$$

etc. (Vergl. (26)).

Wird nun die Form:

$$\Sigma g_{\mu\nu}\, x^\mu\, x^\nu \qquad |\, g_{\mu\nu}\,| = -g \neq 0$$

---

a) Dieser Faltungsprozes korrespondiert mit dem aus der Invariantentheorie bekannten Faltungsprozes der linearen homogenen Gruppe und mit dem Verjüngungsprozesz EINSTEIN's.[1])

b) An anderer Stelle wird dies bewiesen für S_n^l. Die Formeln korrespondieren bis auf Vorzeichenänderungen und die Nichtidentifizierung von **I** mit 1 mit Formeln der Grassmannschen Ausdehnungslehre (ohne innere Multiplikation), können aber im Gegensatz zu diesen infolge ihrer associativen Abstammung ohne Gedächtniszarbeit mit Hülfe einer Ueberschiebungsregel angeschrieben werden. Dies gilt, wie dort gezeigt wird, insbesondere für die komplizierteren Fälle, die sogenannten Müller'schen Formeln und ihre Erweiterungen. Hierauf beruht die praktische Bedeutung der Systeme S_n^l. Ihre theoretische Bedeutung gründet sich auf die an anderer Stelle zu beweisende Eigenschaft, dasz sich alle speziell-affine Kovarianten einer gegebenen Reihe von Gröszen aus den idealen Vektorfaktoren dieser Gröszen und einer beliebigen Anzahl Faktoren **E** und **E'** vermittels der Addition und der Multiplikationen $\circ$ und $\wedge$ ableiten lassen.

---

[1]) 16. 7. S. 23.

und damit zugleich:

$$\Sigma g^{\mu\nu}\, x_\mu x_\nu ,$$

wo $g^{\mu\nu}$ den durch $|g|$ dividierten Minor von $g_{\mu\nu}$ darstellt, invariant erklärt, so sind die Koeffizienten dieser Formen Bestimmungszahlen eines ko- bez. kontravarianten Tensors zweiten Ranges:

$$(87)\qquad \begin{aligned} {}^2\mathbf{g} &= \Sigma g_{\mu\nu}\, \mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_\nu = \mathbf{a}^2 \doteq \mathbf{b}^2 = \ldots , \\ {}^2\mathbf{g}' &= \Sigma g^{\mu\nu}\, \mathbf{e}'_\mu \mathbf{e}'_\nu = \mathbf{a}'^2 = \mathbf{b}'^2 = \ldots \end{aligned}$$

Nach dem Klein'schen Prinzip der Klassifizierung der Geometrien ist es nun das Selbe ob die Eigenschaften irgend eines Systems von Grözen bei der Gruppe, die ${}^2\mathbf{g}$ invariant läszt, betrachtet werden, oder die Eigenschaften des mit ${}^2\mathbf{g}$ erweiterten Systems in Bezug auf die lineare homogene Gruppe. Nun giebt es $4^{\frac{n(n-1)}{2}}$ Sätze von Einheiten $\mathbf{i}$, $\mathbf{i}'$ so dasz:

$$(88)\qquad {}^2\mathbf{g} = \mathbf{i}_1{}^2 + \ldots . + \mathbf{i}_4{}^2 \ , \ {}^2\mathbf{g}' = \mathbf{i}_1{}'^2 + \ldots . + \mathbf{i}_4{}'^2 \ ^a),$$

und ebenso kann man Sätze angeben, so dasz;

$$(89)\qquad {}^2\mathbf{g} = \mathbf{i}_0{}^2 - \mathbf{i}_1{}^2 - \mathbf{i}_2{}^2 - \mathbf{i}_3{}^2 \ , \ {}^2\mathbf{g}' = \mathbf{i}_0{}'^2 - \mathbf{i}_1{}'^2 - \mathbf{i}_2{}'^2 - \mathbf{i}_3{}'^2 .$$

In Bezug auf die Bestimmungszahlen 1, 2, 3, 4 und 1', 2', 3', 4' ist aber die Gruppe, die ${}^2\mathbf{g}$ invariant läszt, die orthogonale Gruppe, und das System R_4^0 musz also aus $S_4{}^l$ in Verbindung mit ${}^2\mathbf{g}$ hervorgehen können. Die Verknüpfungen

$$\mathbf{v} \,!\, {}^2\mathbf{g}' \,!\, \mathbf{w} \ , \ \mathbf{v}' \,!\, {}^2\mathbf{g} \,!\, \mathbf{w}'$$

sind nun in der Tat identisch mit den skalaren Produkten $\mathbf{v} \,.\, \mathbf{w}$ und $\mathbf{v}' \,.\, \mathbf{w}'$ in einem System R_4^0 mit den Grundeinheiten $\mathbf{i}_1, \ldots , \mathbf{i}_4$ bez. $\mathbf{i}_1', \ldots , \mathbf{i}_4'$, und ebenso sind $\mathbf{v}_1 \ldots \widehat{\mathbf{v}}_p$ bez. $\mathbf{v}_1' \ldots \widehat{\mathbf{v}}'_p$, $p \leq n$ identisch mit alternierenden Produkten in demselben System. Werden also diese Verknüpfungen, aus denen sich nach (26) alle anderen ableiten lassen, eingeführt, so geht $S_4{}^l$ bei der bei der orthogonalen Gruppe erlaubten Identifizierung von $\mathbf{i}$ mit $\mathbf{i}'$ über in R_4^0. Da die *freien* Rechenregeln von den zu Grunde gelegten Einheiten unabhängig sind, entstehen stets dieselben *freien* Rechenregeln, unabhängig davon welche nichtspezialisierte Grösze ${}^2\mathbf{g}$ man einführt. ${}^2\mathbf{g}$ und ${}^2\mathbf{g}'$ werden identisch und gleich:

$$(90)\qquad {}^2\mathbf{g} = {}^2\mathbf{g}' = \mathbf{i}_1{}^2 + \ldots . + \mathbf{i}_4{}^2 .$$

---

a) In der auf S. 8 gemachten Annahme erfüllen die Einheiten $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}'$ selbst diese Bedingung.

Für die ursprünglichen Einheiten gilt:

$$(91)\quad \mathfrak{e}_\mu \,.\, \mathfrak{e}_\nu = g^{\mu\nu},\quad \mathfrak{e}_\mu' \,.\, \mathfrak{e}_\nu' = g_{\mu\nu},\quad \mathfrak{e}_\mu \,.\, \mathfrak{e}_\nu' = \begin{cases} 0 \text{ für } \mu \neq \nu \\ 1 \text{ „ } \mu = \nu \end{cases}$$

und:

$$(92)\quad \mathfrak{e}_a = \mathfrak{e}'_b\, \mathfrak{e}'_c\, \hat{\mathfrak{e}}'_d\, \mathrm{E}$$
$$\mathfrak{e}'_a = \mathfrak{e}_b\, \mathfrak{e}_c\, \hat{\mathfrak{e}}_d\, \mathrm{E}'$$

und diese Einheiten bilden also sogenannte *reciproke Vektorensätze* Der Unterschied zwischen Kogredienz und Kontragredienz ist infolge der Adjungierung von ${}^2\mathfrak{g}$ verschwunden, es giebt nur noch eine Art Grösen, jede Grösze kann aber entweder in $\mathfrak{e}$ oder in $\mathfrak{e}'$ oder in $\mathfrak{i}$ ausgedrückt werden, und bekommt dann kovariante bez. kontravariante bez. *orthogonale*, d. h. zu sich selbst kontragrediente Bestimmungszahlen [a]). Es ist zu beachten, dasz die Ersetzung von S_4' durch das einfachere System R_4° erlaubt ist, solange ${}^2\mathfrak{g}$ *fest* gegeben ist. Aendert sich ${}^2\mathfrak{g}$, so geht die zu Grunde liegende orthogonale Gruppe in eine in Bezug auf andere Einheiten orthogonale über, und während der Aenderung liegt also nur die lineare homogene Gruppe zu Grunde, der Unterschied zwischen Kogredienz und Kontragredienz tritt wieder ein, und es gilt nur S_4'.

Operatoren und Operatorkerne.

Ist $\mathfrak{x}'$ der Radiusvektor, so transformieren sich bekanntlich die Bestimmungszahlen $\frac{\partial}{\partial x^\lambda}$ des einfachen Operatorkernes erster Differentiationsordnung:

$$(93)\quad \nabla = \mathfrak{e}_a \frac{\partial}{\partial x^a} + \ldots + \mathfrak{e}_d \frac{\partial}{\partial x^d}$$

wie die eines Vektors. Das Selbe gilt für $\frac{\partial}{\partial x_j}, j = 1, \ldots, 4$, bei der orthogonalen Gruppe. ∇ hat also die *algebraischen* Eigenschaften eines Vektors, dazu aber auch noch differentiierende, also *analytische*. Mit irgend einer beliebigen Multiplikation $\overset{\circ}{1}$ bildet ∇ einen Operator. [1]) Zu jeder Grösze $\overset{p}{\mathfrak{a}}$ gehört in derselben Weise ein Operatorkern:

$$(94)\quad \overset{p}{\mathfrak{a}}\nabla = \Sigma\, \mathfrak{e}'_{j_p \ldots j_1} \frac{\partial}{\partial \overset{p}{a}_{j_1 \ldots j_p}}$$

---

a) Vgl. Fusznote a) zu S. 41.

[1]) Der Unterschied zwischen Operatoren und Operatorkerne wird in der gewöhnlichen Analysis auszer Acht gelassen, weil es dort nur eine Multiplikation und daher zu jedem Kern nur einen Operator giebt.

mit derselben Orientierungsweise als $\overset{p}{\mathfrak{a}}$. Allgemein ist offenbar:

$$\overset{p}{\mathfrak{a}} \nabla^{p} \overset{p}{\mathfrak{a}} = 4. \tag{95}$$

Für eine Grösze $\overset{p}{\mathfrak{a}'}$ gilt natürlich ähnliches.

Für die Anwendung der Operatoren gilt folgende Regel:

Eine Gleichung mit Operatoren ist richtig, wenn die Kerne erstens den algebraischen Regeln folgen, und zweitens links und rechts dieselben Gröszen differentiierend beeinflussen.

Anschlieszend an den Gebrauch der gewöhnlichen Analysis setzen wir fest, dasz die differentiierenden Eigenschaften sich erstrecken bis zur nächstfolgenden *schlieszenden* Klammer.

Wirkt ein Operator $\overset{p}{\underset{a}{\nabla}} \underset{1}{\multimap}$ auf ein beliebiges Produkt beliebiger Gröszen, so ist zunächt mit Hülfe des distributiven Gesetzes abzuleiten:

$$\overset{p}{\underset{a'}{\nabla}} \underset{1}{\multimap} \left(\overset{q}{\mathfrak{b}} \underset{2}{\multimap} \overset{r}{\mathfrak{c}} \right) = \overset{p}{\underset{a'}{\nabla}}{}_{b} \underset{1}{\multimap} \left(\overset{q}{\mathfrak{b}} \underset{2}{\multimap} \overset{r}{\mathfrak{c}} \right) + \overset{p}{\underset{a'}{\nabla}}{}_{c} \underset{1}{\multimap} \left(\overset{q}{\mathfrak{b}} \underset{2}{\multimap} \overset{r}{\mathfrak{c}} \right), \tag{96}$$

wo $\overset{p}{\underset{a'}{\nabla}}{}_{b}$ nur auf $\overset{q}{\mathfrak{b}}$ und $\overset{p}{\underset{a'}{\nabla}}{}_{c}$ nur auf $\overset{r}{\mathfrak{c}}$ differentiierend wirkt. Giebt es nun zwei Multiplikationen $\underset{3}{\multimap}$ und $\underset{4}{\multimap}$, so dasz *allgemein*, d. h. für *alle* Gröszen der Orientierungsweise von $\overset{p}{\mathfrak{a}}$, $\overset{q}{\mathfrak{b}}$ und $\overset{r}{\mathfrak{c}}$:

$$\overset{p}{\mathfrak{a}} \underset{1}{\multimap} \left(\overset{q}{\mathfrak{b}} \underset{2}{\multimap} \overset{r}{\mathfrak{c}} \right) = \left(\overset{p}{\mathfrak{a}} \underset{3}{\multimap} \overset{q}{\mathfrak{b}} \right) \underset{4}{\multimap} \overset{r}{\mathfrak{c}}, \tag{97}$$

so ist:

$$\overset{p}{\underset{a'}{\nabla}}{}_{b} \underset{1}{\multimap} \left(\overset{q}{\mathfrak{b}} \underset{2}{\multimap} \overset{r}{\mathfrak{c}} \right) = \left(\overset{p}{\underset{a'}{\nabla}} \underset{3}{\multimap} \overset{q}{\mathfrak{b}} \right) \underset{4}{\multimap} \overset{r}{\mathfrak{c}} \tag{98}$$

und

$$\overset{p}{\underset{a'}{\nabla}}{}_{c} \underset{1}{\multimap} \left(\overset{q}{\mathfrak{b}} \underset{2}{\multimap} \overset{r}{\mathfrak{c}} \right) = \left(\overset{q}{\mathfrak{b}} \underset{3}{\circ\!\!-} \overset{p}{\underset{a'}{\nabla}} \right) \underset{4}{\multimap} \overset{r}{\mathfrak{c}}, \tag{99}$$

wo $\underset{3}{\circ\!\!-}$ die Umkehrung von $\underset{3}{\multimap}$ ist. $(\overset{q}{\mathfrak{b}} \underset{3}{\circ\!\!-} \overset{p}{\underset{a'}{\nabla}})$ ist ein *zusammengesetzter Operatorkern*. Gilt für $\underset{5}{\multimap}$ und $\underset{6}{\multimap}$ allgemein:

$$\overset{p}{\mathfrak{a}} \underset{1}{\multimap} \left(\overset{q}{\mathfrak{b}} \underset{2}{\multimap} \overset{r}{\mathfrak{c}} \right) = \left(\overset{p}{\mathfrak{a}} \underset{5}{\multimap} \overset{r}{\mathfrak{c}} \right) \underset{6}{\multimap} \overset{q}{\mathfrak{b}}, \tag{100}$$

so kann auch der zweite Term rechts in der einfacheren Form:

$$\overset{p}{\underset{a'}{\nabla}}{}_{c} \underset{1}{\multimap} \left(\overset{q}{\mathfrak{b}} \underset{2}{\multimap} \overset{r}{\mathfrak{c}} \right) = \left(\overset{p}{\underset{a'}{\nabla}} \underset{5}{\multimap} \overset{r}{\mathfrak{c}} \right) \underset{6}{\multimap} \overset{q}{\mathfrak{b}} \tag{101}$$

geschrieben werden. Auch andere Umformungen sind möglich, exis-

tiert z. B. für *alle* Grösszen der Orientierungsweise von $\overset{p}{\mathfrak{a}}$, $\overset{q}{\mathfrak{b}}$ und $\overset{r}{\mathfrak{c}}$ eine cyclische Gleichung:

$$(102)\quad \overset{p}{\mathfrak{a}} \underset{1}{\multimap} \left(\overset{q}{\mathfrak{b}} \underset{2}{\multimap} \overset{r}{\mathfrak{c}}\right) + \overset{q}{\mathfrak{b}} \underset{3}{\multimap} \left(\overset{r}{\mathfrak{c}} \underset{4}{\multimap} \overset{p}{\mathfrak{a}}\right) + \overset{r}{\mathfrak{c}} \underset{5}{\multimap} \left(\overset{p}{\mathfrak{a}} \underset{6}{\multimap} \overset{q}{\mathfrak{b}}\right) = 0,$$

so gilt:

$$(103)\quad \overset{p}{\mathfrak{a}'} \underset{1}{\multimap} \left(\overset{q}{\mathfrak{b}} \underset{2}{\multimap} \overset{r}{\mathfrak{c}}\right) = -\left(\overset{r}{\mathfrak{c}} \underset{4}{\multimap} \overset{p}{\mathfrak{a}'}\nabla\right) \underset{3}{\circ} \overset{q}{\mathfrak{b}} - \overset{r}{\mathfrak{c}} \underset{5}{\multimap} \left(\overset{p}{\mathfrak{a}'}\nabla \underset{6}{\multimap} \overset{q}{\mathfrak{b}}\right) -$$
$$- \overset{q}{\mathfrak{b}} \underset{3}{\multimap} \left(\overset{p}{\mathfrak{a}'}\nabla \underset{4}{\circ} \overset{r}{\mathfrak{c}}\right) - \left(\overset{q}{\mathfrak{b}} \underset{6}{\circ} \overset{p}{\mathfrak{a}'}\nabla\right) \underset{5}{\circ} \overset{r}{\mathfrak{c}}.$$

Für $\overset{p}{\mathfrak{a}}\nabla\overset{q}{\mathfrak{b}}$ gilt:

$$(104)\quad d\overset{p}{\mathfrak{a}} \overset{p}{?} \overset{p}{\mathfrak{a}}\nabla\overset{q}{\mathfrak{b}} = \left(d\overset{p}{\mathfrak{a}} \overset{p}{?} \overset{p}{\mathfrak{a}}\nabla\right)\overset{q}{\mathfrak{b}} = \Sigma \frac{\partial \overset{q}{\mathfrak{b}}}{\partial \overset{p}{a}_{j_1 \dots j_p}} d\overset{p}{a}_{j_1 \dots j_p} = d\overset{q}{\mathfrak{b}}.$$

$\overset{p}{\mathfrak{a}}\nabla\overset{q}{\mathfrak{b}}$ hat also die Bedeutung eines Differentialquotienten und kann geschrieben werden $\frac{d}{d\overset{p}{\mathfrak{a}}}$:

$$(105)\quad d\overset{p}{\mathfrak{a}} \overset{p}{?} \frac{d\overset{q}{\mathfrak{b}}}{d\overset{p}{\mathfrak{a}}} = d\overset{q}{\mathfrak{b}}.$$

Insbesondere gilt für $\nabla = \frac{d}{d\mathfrak{x}'^1}$:

$$(106)\quad d\mathfrak{x}'^1 \frac{d\overset{q}{\mathfrak{b}}}{d\mathfrak{x}'^1} = d\overset{q}{\mathfrak{b}}.$$

Die Reehenregeln für die Differentialoperatoren folgen also alle aus den Reehenregeln für die Grösszen. Für eine Analysis, mit der wirklieh praktiseh gerechnet werden soll, ist es also von der grösszten Wiehtigkeit diese Rechenregeln stets vollständig aus dem Gedäehtnisz anschreiben zu können, da der Gebraueh von Tabellen sehr unpraktiseh und zeitraubend ist.

Als Beispiele in R_4^0 seien berechnet:

$$(107)\quad a)\ \nabla\,.\,(\mathfrak{v} \times \mathfrak{w}) = (\nabla\,.\,\mathfrak{v})\,\mathfrak{w} - (\mathfrak{w}\,.\,\nabla)\,\mathfrak{v} - (\nabla\,.\,\mathfrak{w})\,\mathfrak{v} + (\mathfrak{v}\,.\,\nabla)\,\mathfrak{w}.$$
$$b)\ \nabla\,.\,({}_2\mathfrak{v} \overset{1}{?} \mathfrak{w}) = (\nabla \overset{1}{?} {}_2\mathfrak{v})\,.\,\mathfrak{w} - (\nabla\ \mathfrak{w}) \overset{2}{?} {}_2\mathfrak{v} =$$
$$= (\nabla \overset{1}{?} {}_2\mathfrak{v})\,.\,\mathfrak{w} - (\nabla \times \mathfrak{w}) \overset{2}{?} {}_2\mathfrak{v}.$$

$$(107)\quad c)\ \nabla\,!\,({}_2\mathbf{V}\times{}_2\mathbf{V}) = {}^1\!/_2\,\nabla\,!\,({}_2\mathbf{V}\,!\,{}_2\mathbf{V} - {}_2\mathbf{V}^*\,!\,{}_2\mathbf{V}^*)^{a}) =$$
$$= (\nabla\,!\,{}_2\mathbf{V})\,!\,{}_2\mathbf{V} - (\nabla\,!\,{}_2\mathbf{V}^*)\,!\,{}_2\mathbf{V}^{*\,b}) =$$
$$= {}^1\!/_4\,(\nabla\cdot{}_2\mathbf{V})\cdot{}_2\mathbf{V} - {}^1\!/_4\,(\nabla\cdot{}_2\mathbf{V}^*)\cdot{}_2\mathbf{V}^{*\,c}) =$$
$$= {}^1\!/_4\,(\nabla\cdot{}_2\mathbf{V})\cdot{}_2\mathbf{V} - {}^1\!/_4\,(\nabla\times{}_2\mathbf{V})\times{}_2\mathbf{V}^{d}).$$

$$d)\ ({}_p\mathbf{V}\frown\nabla)\overset{q}{\mathbf{W}} = {}_p\mathbf{V}\overset{1}{\lrcorner}(\nabla\overset{q}{\mathbf{W}}),\quad p = 1,\ 2,\ 3^{e}).$$

Wird ∇ zweimal hintereinander verwendet, so ergiebt sich z. B. aus (58*a*):

$$(108)\qquad \nabla\,!\left(\nabla\,!\overset{p}{\mathbf{V}}\right) = (\nabla\,\nabla)\,!\overset{p}{\mathbf{V}}$$

und aus (71) unter Berücksichtigung der Identität $\nabla\times\nabla = 0$:

$$\nabla\overset{1}{\lrcorner}\left(\nabla\overset{p}{\mathbf{V}}\right) = (\nabla\times\nabla)\overset{p}{\mathbf{V}} = 0.$$

$$(109)\qquad \nabla\overset{2}{\lrcorner}\left(\nabla\overset{p}{\mathbf{V}}\right) = (\nabla\,\widehat{\nabla}\,\mathbf{V}_1)\,\mathbf{V}_2\ldots\mathbf{V}_p + \text{etc.}\ ^{f}) = 0.$$

$$\nabla\overset{3}{\lrcorner}\left(\nabla\overset{p}{\lrcorner}\mathbf{V}\right) = \{(\nabla\,\widehat{\nabla}\,\mathbf{V}_1)\frown\mathbf{V}_2\}\,\mathbf{V}_3\ldots\mathbf{V}_p + \text{etc.}\ ^{f}) = 0.$$

Linien-, Flächen-, Hyperflächen- und Raumintegrale im R_4.

Die Raumelemente seien in folgender Weise angedeutet:

Linienelement	$d\mathbf{s}$	
Flächenelement	${}_2\mathbf{f}\,d\sigma$	, ${}_2\mathbf{f}^* = -\mathbf{I}\,{}_2\mathbf{f}$, ${}_2\mathbf{f} = -\mathbf{I}\,{}_2\mathbf{f}^*$
Hyperflächenelement	${}_3\mathbf{m}\,d\omega$	, ${}_3\mathbf{m}^* = \mathbf{I}\,{}_3\mathbf{m} = -\mathbf{n}$, ${}_3\mathbf{m} = \mathbf{n}^*$
Raumelement	$\mathbf{I}\,d\tau$.	

${}_2\mathbf{f}$, ${}_3\mathbf{m}$ und $\mathbf{n}$ sind Grösen mit Modulus 1.

Für das Linienintegral eines Skalars über eine geschlossene Kurve gilt:

$$(110)\qquad \int_s d\mathbf{s}\,p = -\int_\sigma ({}_2\mathbf{f}\,.\,\nabla)\,p\,d\sigma = \mathbf{I}\int_\sigma ({}_2\mathbf{f}^*\times\nabla)p\,d\sigma,$$

und daraus folgt allgemein für eine beliebige Multiplikation $\overset{p}{\underset{1}{\circ}}$:

$$(111)\qquad \int_s d\mathbf{s}\overset{p}{\underset{1}{\circ}}\mathbf{a} = -\int_\sigma (\mathbf{f}_2\,.\,\nabla)\overset{p}{\underset{1}{\circ}}\mathbf{a}\,d\sigma = \int_\sigma \{\mathbf{I}({}_2\mathbf{f}^*\times\nabla)\}\overset{p}{\underset{1}{\circ}}\mathbf{a}\,d\sigma$$

und insbesondere:

$$(112)\qquad a)\ \int_s d\mathbf{s}\overset{p}{\mathbf{a}} = -\int_\sigma ({}_2\mathbf{f}\,.\,\nabla)\,\mathbf{a}\overset{p}{d\sigma} = -2\int_\sigma {}_2\mathbf{f}\,!\,(\nabla\overset{p}{\mathbf{a}})\,d\sigma^{g}),$$

$$b)\ \int_s d\mathbf{s}\overset{p}{\mathbf{a}} = 24\,\mathbf{I}\,?\int_\sigma {}_2\mathbf{f}^*\overset{1}{\lrcorner}(\nabla\overset{p}{\mathbf{a}})\,d\sigma^{h}).$$

---

a) Nach (81) [1]).
b) × ist kommutativ, vgl. S. 29, (81) und (83).
c) Nach (68).
d) Nach (21*b*).
e) Nach (69).
f) Vergl. S. 59, (II 122).
g) Nach (68).
h) Nach (68) und (107*d*).

[1]) Vergl. Laue II. 2 S. 86.

σ ist eine beliebige durch s begrenzte Fläche und die Drehrichtung von ${}_2\mathfrak{f}$ ist die Richtung der Integration, und also bestimmt durch einen von innen nach dem Rand zeigenden Richtungssinn, gefolgt durch den Richtungssinn der begrenzenden Linienelemente $d\mathfrak{s}$.

Die aus (111) und (68) hervorgehende Formel:

$$(113)\quad \int_s d\mathfrak{s}\,.\,\mathfrak{v} = -\int_\sigma ({}_2\mathfrak{f}\,.\,\nabla)\,.\,\mathfrak{v}\,d\sigma = -\int_\sigma 2\,{}_2\mathfrak{f}^2(\nabla \times \mathfrak{v})\,d\sigma =$$

$$= -\int_\sigma {}_2\mathfrak{f}\,.\,(\nabla \times \mathfrak{v})\,d\sigma$$

korrespondiert mit dem *Stokes'schen Satz* im dreidimensionalen Raum.

Für das Flächenintegral über eine geschlossene Fläche gilt:

$$(113)\quad \int_\sigma {}_2\mathfrak{f}\,p\,d\sigma = \int_\omega ({}_3\mathfrak{m} \times \nabla)\,p\,d\omega = -\mathfrak{I}\int_\omega (\mathfrak{n} \times \nabla)\,p\,d\omega,$$

und daraus folgt allgemein:

$$(114)\quad \int_\sigma {}_2\mathfrak{f}\,\overset{p}{\mathfrak{a}}\,d\sigma = \int_\omega ({}_3\mathfrak{m} \times \nabla)\,\overset{p}{\mathfrak{a}}\,d\omega,$$

und insbesondere:

$$(115)\quad \int_\sigma {}_2\mathfrak{f}\,\overset{p}{\mathfrak{a}}\,d\sigma = \int_\omega ({}_3\mathfrak{m} \times \nabla)\,\overset{p}{\mathfrak{a}}\,d\omega = -12\,\mathfrak{I}^2\int_\omega \mathfrak{n} \lrcorner \left(\nabla\,\overset{p}{\mathfrak{a}}\right) d\omega\ {}^a).$$

ω ist eine beliebige durch σ begrenzte Hyperfläche und der Schraubsinn von ${}_3\mathfrak{m}$ ist bestimmt durch einen von innen nach σ zeigenden Richtungssinn gefolgt durch den Drehsinn der begrenzenden Flächenelemente ${}_2\mathfrak{f}\,d\sigma$.

Für das Raumintegral über einen zusammenhängenden Raumteil gilt:

$$(116)\quad \begin{aligned} &a)\ \int_\omega {}_3\mathfrak{m}\,p\,d\omega = -\int_\tau (\mathfrak{I}\nabla)\,p\,d\tau = -\mathfrak{I}\int_\tau \nabla\,p\,d\tau \\ &b)\ \int_\omega \mathfrak{n}\,p\,d\omega = \int_\tau \nabla\,p\,d\tau, \end{aligned}$$

und daraus folgt allgemein:

$$(117)\quad \begin{aligned} &a)\ \int_\omega {}_3\mathfrak{m}\,\overset{p}{\mathfrak{a}}\,d\omega = -\int_\tau (\mathfrak{I}\nabla)\,\overset{p}{\mathfrak{a}}\,d\tau \\ &b)\ \int_\omega \mathfrak{n}\,\overset{p}{\mathfrak{a}}\,d\omega = \int_\tau \nabla\,\overset{p}{\mathfrak{a}}\,d\tau \end{aligned}$$

---

a) ${}_2\mathfrak{f}.\nabla$, ${}_3\mathfrak{m}\times\nabla$ und $\mathfrak{I}\nabla$ korrespondieren bis auf Vorzeichen- und Systemunterschiede mit den Symbolen der Polarableitungen vierter, dritter und zweiter Stufe ∇_3, ∇_2 und ∇_1 von F. Jung. [1])

[1]) 10.5.

und insbesondere:

$$(118)\qquad \begin{aligned} a)\ &\int_{\omega} {}_3\mathfrak{m}\overset{p}{\mathfrak{a}}\, d\omega = -4\mathbf{I}\int_{\tau} \nabla\overset{p}{\mathfrak{a}}\, d\tau\ ^{a})\\ b)\ &\int_{\omega} \mathfrak{n}\overset{p}{\mathfrak{a}}\, d\omega = \int_{\tau} \nabla\overset{p}{\mathfrak{a}}\, d\tau. \end{aligned}$$

Die aus (117*b*) hervorgehenden Formel:

$$(119)\qquad \int_{\omega} \mathfrak{n}\,.\,\mathfrak{v}\, d\omega = \int_{\tau} \nabla\ .\ \mathfrak{v}\, d\tau$$

korrespondiert mit dem *Gausz'schen Satz* im dreidimensionalen Raum. τ ist der durch ω begrenzte Raumteil, und der durch die Wahl des Einheitssystems festgelegte Hyperschraubsinn von $\mathbf{I}$ wird auch gegeben durch einen von innen nach ω zeigenden Richtungssinn, gefolgt durch den Schraubsinn der begrenzenden Hyperflächenelemente ${}_3\mathfrak{m}\, d\omega$. Letzterer Schraubsinn ist dadurch bestimmt. Der Vektor $\mathfrak{n}$ ist also nach auszen gerichtet. Die Formeln (109) können auch mit Hülfe der angegebenen Integralsätze bewiesen werden.

II. DIE ANALYSIS ZUR ALLGEMEINEN RELATIVITÄTSTHEORIE.

Die Urvariablen und die Vektoren $\mathfrak{e}$ *und* $\mathfrak{e}'$.

Die ∞^4 Werte 4 unabhängiger Variablen, die *Urvariablen* x^λ, $\lambda = a, \ldots, d$, bestimmen eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit X_4. Ein bestimmter Wertsatz heisze *Punkt*. Die 4 Gleichungen:

$$(1)\qquad x^\lambda = c^\lambda \qquad\qquad \lambda = a, \ldots, d$$

bestimmen, bei veränderlichen c, 4 Hyperflächenschaaren, die sich in den *Parameterlinien* der Urvariablen x^λ, welche 4 *Hyperkongruenzen* bilden, schneiden. Bei infinitesimaler Verrückung des Punktes x^λ sind die Incremente dx^λ die Bestimmungszahlen des durch x^λ und $x^\lambda + dx^\lambda$, $\lambda = a, \ldots, d$ bestimmten Linienelementes. Werden 4 neue unabhängige Urvariablen eingeführt:

$$(2)\qquad {}'x^\lambda = f_\lambda(x^a, \ldots, x^d);\ \left|\frac{\partial f_\lambda}{\partial x^\mu}\right| \neq 0;\ \lambda, \mu = a, \ldots, d,$$

a) Nach (68).

so transformieren sich die dx^λ linear homogen und also nach der Tabelle (I 3), wenn man für $\beta_{\nu\mu}$ einführt $\frac{\partial f_\mu}{\partial x^\nu}$. Das Linienelement kann also als ein kontravarianter Vektor im Sinne des vorigen Abschnittes aufgefasst werden:

$$(3) \qquad d\,\mathbf{x}' = \Sigma\, dx^\lambda\, \mathbf{e}'_\lambda, \qquad \lambda = a, \ldots, d$$

und die von einem und demselben Punkte ausgehenden Linienelemente sind demnach Gröszen eines Systemes S^1_n. [a])

Jedes System von Urvariablen ordnet jedem Punkte ein System von 4 Vektoren $\mathbf{e}'_\lambda$ zu. Zwischen zwei Vektoren kann nur ein Gröszenvergleich angestellt werden, wenn sie zu demselben Linienelement gehören. Zwei zu demselben Punkte von X_4 gehörige Vektoren verschiedener Richtung sind vorläufig *der Grösze nach unvergleichbar*, und zwei zu verschiedenen Punkten von X_4 gehörige Vektoren sind noch *überhaupt unvergleichbar*, da ihre Bestimmungszahlen sich bei (1) wohl beide linear homogen transformieren, der Unterschied zwischen diesen Transformationen aber von den ganz beliebigen Funktionen f_λ abhängig ist. Werden aus den Bestimmungszahlen von zum selben Punkt gehörigen Vektoren Bestimmungszahlen von höheren Gröszen gebildet, so gilt das über die Vergleichbarkeit Gesagte auch für diese höheren Gröszen.

Einführung des Fundamentaltensors.

Es sei jetzt die kwadratische Differentialform

$$\Sigma\, g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \qquad |\, g_{\mu\nu}\,| = -g \neq 0$$

fest als Invariante gegeben. Die $g_{\mu\nu}$ seien stetige beliebig oft differenzierbare Funktionen der x^λ. In jedem Punkte sind dann der kovariante Fundamentaltensor

$$(4) \qquad {}^2\mathbf{g} = \Sigma\, g_{\mu\nu}\, \mathbf{e}_\mu\, \mathbf{e}_\nu$$

und der kontravariante

$$(5) \qquad {}^2\mathbf{g}' = \Sigma\, g^{\mu\nu}\, \mathbf{e}'_\mu\, \mathbf{e}'_\nu$$

bestimmt. ${}^2\mathbf{g}$ werde als Potenz der gleichberechtigten (vergl. S. 11) idealen Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ... geschrieben:

$$(6) \qquad {}^2\mathbf{g} = \mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 = \ldots.$$

---

a) Es liegt kein sachlicher, sondern nur ein historischer Grund vor, das Linienelement gerade als kontravariant auf zu fassen. Die Wahl ist gleichgültig.

und ebenso ${}^2\mathbf{g}'$ als Potenz der Vektoren $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$, . . . :

$$(7) \qquad {}^2\mathbf{g}' = \mathbf{a}'^2 = \mathbf{b}'^2 = \mathbf{c}'^2 = \ldots .$$

Es gilt offenbar für jeden Vektor $\mathbf{v}$:

$$(8) \qquad \mathbf{v} = {}^2\mathbf{g} \,!\, {}^2\mathbf{g}' \,!\, \mathbf{v},$$

oder:

$$(9) \qquad \mathbf{v} = \mathbf{a}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}')\ (\mathbf{b}' \wedge \mathbf{v}).$$

Führen wir nun allgemein für jeden realen oder idealen Vektor $\mathbf{w}$ ausser $\mathbf{e}_\lambda$, $\lambda = a, \ldots d$, die Schreibweise ein:

$$(10) \qquad \mathbf{w}' = {}^2\mathbf{g}' \,!\, \mathbf{w} = \mathbf{a}'\cdot(\mathbf{a}' \wedge \mathbf{w})$$

und ebenso für jeden realen oder idealen Vektor $\mathbf{u}'$ ausser $\mathbf{e}_\lambda$, $\lambda = a, \ldots, d$:

$$(11) \qquad \mathbf{u} = {}^2\mathbf{g} \,!\, \mathbf{u}' = \mathbf{a}\ (\mathbf{a} \wedge \mathbf{u}').$$

so sind (10) und (11) infolge (8) mit einander verträglich und infolge der evidenten Identität

$$(12) \qquad \mathbf{a}'^2 = \mathbf{b}'\ (\mathbf{b}' \wedge \mathbf{a})\ \mathbf{c}'\ (\mathbf{c}' \wedge \mathbf{a})\ ^a)$$

auch mit (6) und (7).

Es läszt sich (9) dann schreiben:

$$(13) \qquad \mathbf{v} = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{a}')\ \mathbf{a}.$$

Die gegebene Differentialform ist:

$$(14) \qquad {}^2\mathbf{g} \,?\, d\mathbf{x}'^2.$$

Diese Form ist als Kwadrat einer idealen Linearform zu schreiben:

$$(15) \qquad {}^2\mathbf{g} \,?\, d\mathbf{x}'^2 = (\mathbf{a} \wedge d\mathbf{x}')^2,$$

und diese Linearform wieder als vollständiges Differential eines idealen Skalars $a = b = c \doteq \ldots .$:

$$\mathbf{a} \wedge d\mathbf{x}' = \Sigma\, a_\lambda\, dx^\lambda = da,$$

$$(16) \qquad a_\lambda = \frac{\partial a}{\partial x^\lambda}.$$

Wird von jetzt an jeder Satz gegebener Grösen erweitert durch Hinzufügung des *fest* angenommenen Fundamentaltensors ${}^2\mathbf{g}$, so gesellen sich zu den schon vorhandenen Eigenschaften der Grösen die Eigenschaften in Bezug auf ${}^2\mathbf{g}$, und das für die Grösen in einem bestimmten Punkte gültige System $S'_{4\infty}$ geht nach S. 32 in $R^0_{4\infty}$ über.

---

a) Bei Einstein: $g^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}\ g^{\nu\beta}\ g_{\alpha\beta}$ [1])

---

[1]) 16, 7 S. 29.

Wie im vorigen Abschnitte dargelegt ist, verschwindet dann der Unterschied zwischen kovarianten und kontravarianten Grösszen und es bleibt z. B. bei einem Vektor $\mathfrak{v}$, der jetzt stets ohne Accent geschrieben werde, nur der Unterschied zwischen den Bestimmungszahlen, die gehören zu $\mathfrak{e}'_\lambda$, zu $\mathfrak{e}_\lambda$ oder zu irgendwelchen orthogonalen Einheiten $\mathfrak{i}_j$, für welche gilt:

$$(17) \qquad {}^2\mathfrak{g} = {}^2\mathfrak{g}' = \Sigma\, \mathfrak{i}_j\, \mathfrak{i}_j \qquad j = 1, \ldots, 4^a).$$

Da offenbar ${}^2\mathfrak{g} \,!\, \mathfrak{v} = \mathfrak{v}$, folgt:

$$(18) \qquad \mathfrak{v} = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{v})\, \mathfrak{a}.$$

Die Formeln (13) und (18) werden sich weiter unten als besonders wichtig erweisen. Wir schreiben:

$$(19) \qquad \mathfrak{v} = \sum_\lambda v_\lambda\, \mathfrak{e}_\lambda = \sum_\lambda v^\lambda\, \mathfrak{e}'_\lambda = \sum_j v_j\, \mathfrak{i}_j \qquad \begin{matrix} \lambda = a, \ldots, d \\ j = 1, \ldots, 4, \end{matrix}$$

und für das Differential $d\mathfrak{x}$:

$$(20) \qquad d\mathfrak{x} = \sum_\lambda dx_\lambda\, \mathfrak{e}_\lambda = \sum_\lambda dx^\lambda\, \mathfrak{e}'_\lambda = \sum_j dx_j\, \mathfrak{i}_j \qquad \begin{matrix} \lambda = a, \ldots, d \\ j = 1, \ldots, 4. \end{matrix}$$

Dabei ist zu bemerken, dasz die dx_λ und dx_j im Gegensatz zu den dx^λ keine exakten Differentiale sind, und x_λ sowie x_j daher für sich keine Bedeutung haben. [b])

Durch die Einführung des Fundamentaltensors ist die Möglichkeit gegeben Vektoren im selben Punkte der Grösze nach zu vergleichen und ihre Winkel zu bestimmen. Es ist

$$(21) \qquad v_m = \sqrt{\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v}}$$

$$(22) \qquad \cos(\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{w}) = \frac{\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{w}}{v_m w_m}.$$

Für die Vektoren $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ gilt insbesondere (vergl. S. 32):

$$(23) \qquad (\mathfrak{e}_\lambda)_m = \sqrt{\mathfrak{e}_\lambda \cdot \mathfrak{e}_\lambda} = \sqrt{g^{\lambda\lambda}} \qquad (\mathfrak{e}'_\lambda)_m = \sqrt{\mathfrak{e}'_\lambda \cdot \mathfrak{e}'_\lambda} = \sqrt{g_{\lambda\lambda}}$$

$$(24) \qquad \cos(\mathfrak{e}_\lambda, \mathfrak{e}_\mu) = \frac{g^{\lambda\mu}}{\sqrt{g^{\lambda\lambda}\, g^{\mu\mu}}} \qquad \cos(\mathfrak{e}'_\lambda, \mathfrak{e}'_\mu) = \frac{g_{\lambda\mu}}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}\, g_{\mu\mu}}}$$

---

a) Hessenberg [1]) hat wohl zuerst ausdrücklich darauf hingewiesen, dasz die Unterscheidung zwischen kovarianten und kontravarianten *Grösszen* unnötig ist, und damit die volle Konsequenz gezogen aus einer Bemerkung von Ricci und Levi Civita [2]). Auch Hessenberg gelangt zu den Vektorensystemen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$, aber in einer ganz anderen Weise. Vgl. S. 52.

b) Solche Differentiale verwendet auch Hessenberg. [3])

---

[1]) 17. 5 S. 196.
[2]) 01. 1 S. 144.
[3]) 17. 5 S. 205.

und für die durch die Vektoren $\mathfrak{e}$ bez. $\mathfrak{e}'$ bestimmten Spate:

$$\mathbf{E} = \mathfrak{e}_{1234} = \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{-g}} \tag{25}$$
$$\mathbf{E}' = \mathfrak{e}'_{1234} = \mathbf{I}\sqrt{-g}.$$

Es ist zu beachten, dasz der Unterschied zwischen kovarianten und kontravarianten Grösen nur verschwindet, wenn ${}^2\mathbf{g}$ *fest* gegeben ist. (Vergl. S. 33). Wird ${}^2\mathbf{g}$ verändert, so tritt während der Variation der Unterschied wieder auf, und es gilt dann nur das System $S^l_{4\infty}$ [a]).

Für die Vektoren und höheren Grösen in einem bestimmten Punkt gelten alle im vorigen Abschnitte abgeleiteten Formeln, mit Ausnahme der Differentiationsformeln. Denn letztere setzen die Vergleichbarkeit der Grösen *an verschiedenen Stellen* der Mannigfaltigkeit X_4 voraus, und diese Vergleichbarkeit besteht bis hier nur für Skalare. Nur $d\mathbf{X}$, dp und $\frac{\partial p}{\partial x^\lambda}$, wo p einen realen oder idealen Skalar darstellt, haben schon eine Bedeutung.

Für die partiellen Differentialquotienten der idealen Skalare a_λ und a^λ nach den x^μ führen wir neben der gewöhnlichen auch die Bezeichnung ein:

$$\frac{\partial a_\lambda}{\partial x^\mu} = a_{\lambda\mu} \qquad \frac{\partial a_\lambda}{\partial x^\mu} = a^\lambda_\mu \qquad \lambda, \mu = a, \ldots, d. \tag{26}$$

Es ist dann:

$$a_{\lambda\mu} = \frac{\partial^2 a}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} = a_{\mu\lambda}, \tag{27}$$

aber im allgemeinen:

$$a^\lambda_\mu \neq a^\mu_\lambda, \tag{28}$$

da a^λ nicht wie a_λ ein partielles Differentialquotient eines idealen Skalars ist.

Das Differential eines Skalars p kann auch in den nicht exakten Differentialen dx_λ oder dx_j ausgedrückt werden. Die Koeffizienten nennen wir die partiellen Ableitungen [b]) nach x_λ bez. x_j:

$$dp = \sum_\lambda \frac{\partial p}{\partial x_\lambda} dx_\lambda = \sum_j \frac{\partial p}{\partial x_j} dx_j, \qquad \begin{matrix} \lambda = a, \ldots, d, \\ j = 1, \ldots, 4. \end{matrix} \tag{29}$$

---

a) In der Relativitätstheorie ändert sich ${}^2\mathbf{g}$ nur wenn das Gravitationspotential variiert wird. Wird die Raumzeitwelt als starr gegeben gedacht, so kann übrigens einer solchen Variation nur eine mathematische aber keine physisch wirkliche Bedeutung beigelegt werden.

b) Ableitungen dieser Art treten auch auf bei Hessenberg. [1])

[1]) 17. 5 S. 209.

Für die partiellen Ableitungen der idealen Skalare a_j nach den x_k führen wir noch die Bezeichnung ein:

$$\frac{\partial a_j}{\partial x_k} = a_{jk} \qquad j, k = 1, \ldots, 4. \tag{30}$$

Es ist dann im allgemeinen:

$$a_{jk} \neq a_{kj} \qquad j, k = 1, \ldots, 4. \tag{31}$$

Orthogonalnetze und Orthogonalsysteme.

Sind in jedem Punkte von X_4 4 gegenseitig senkrechte Richtungen als stetige Funktionen des Ortes gegeben, so bestimmen diese ein *Orthogonalnetz*, welches von 4 Hyperkongruenzen von ∞^3 Kurven gebildet wird, die sich in jedem Punkte senkrecht schneiden. Werden die Vektoren $\mathbf{i}$ in jedem Punkte nach den Richtungen dieses Netzes orientiert, so sind die dx_i die Komponenten von $d\mathbf{x}$ nach diesen Richtungen. Da $g_{jk} = a_j a_k = 0$ für $j \neq k$ ist allgemein:

$$a_{jl}\, a_k = \frac{\partial}{\partial x_l} g_{jk} - a_j\, a_{kl} = -\, a_j\, a_{kl}, \qquad \begin{matrix} j, k, l = 1, \ldots, 4, \\ j \neq k. \end{matrix} \text{ a)} \tag{32}$$

Sind sämtliche 4 Hyperkongruenzen flächennormal, so bestimmen sie ein *Orthogonalsystem*. Werden die Urvariablen in Bezug auf die Hyperflächen dieses Orthogonalsystems gewählt, so werden die $\mathbf{e}_\lambda$ gegenseitig senkrecht und $\mathbf{e}_\lambda'$ hat dieselbe Richtung als $\mathbf{e}_\lambda$. Es wird also $g_{\lambda\mu} = g^{\lambda\mu} = 0$ für $\lambda \neq \mu$, und infolgedessen ist in diesem Falle:

$$a_{\lambda\nu}\, a_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\lambda\mu} - a_\lambda\, a_{\mu\nu} = -\, a_\lambda\, a_{\mu\nu}, \qquad \begin{matrix} \lambda, \mu, \nu = a, \ldots, d, \\ \lambda \neq \mu. \end{matrix} \tag{33}$$

Die Christoffel'schen Symbole.

Da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} &= a_{\mu\nu}\, a_\sigma + a_\mu\, a_{\sigma\nu} \\ \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} &= a_{\nu\mu}\, a_\sigma + a_\nu\, a_{\sigma\mu} \\ -\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} &= -\, a_{\mu\sigma}\, a_\nu - a_\mu\, a_{\nu\sigma} \end{aligned} \tag{34}$$

folgt für das bekannte Christoffelschen Symbol $\left[\begin{smallmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{smallmatrix}\right]$:

$$\left[\begin{smallmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{smallmatrix}\right] = a_{\mu\nu}\, a_\sigma = a_{\nu\mu}\, a_\sigma \tag{35}$$

---

a) Die Grösen a_{jl} a_k sind identisch mit den „coefficients de rotation" γ_{jkl} von Ricci und Levi Civita [1]). Ihre reale Bedeutung ergiebt sich aus der Gleichung:

$$a_j\, a_{kl} = \mathbf{i}_l\, \mathbf{i}_j \mathbin{?} \mathbf{a} \sum_l a_{kl}\, \mathbf{i}_l = \mathbf{i}_l\, \mathbf{i}_j \mathbin{?} \mathbf{a} \nabla (\mathbf{a} \,.\, \mathbf{i}_k) = \mathbf{i}_l\, \mathbf{i}_j \mathbin{?} \nabla\, \mathbf{i}_k.$$

[1]) 01. 1 S. 148.

Aus dieser Gleichung folgt für das zweite Symbol $\left\{ {\mu\nu \atop \sigma} \right\}$:

$$(36)\quad \left\{ {\mu\nu \atop \sigma} \right\} = \sum_\lambda g^{\sigma\lambda} \left[{\mu\nu \atop \lambda} \right] = \sum_\lambda b^\sigma b^\lambda a_{\mu\nu} a_\lambda = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) b^\sigma a_{\mu\nu} = a^\sigma a_{\mu\nu} = a^\sigma a_{\nu\mu}.$$

Da offenbar

$$(37)\quad {}^2\mathbf{g} = \sum_\lambda \mathbf{c}_\lambda \mathbf{c}'_\lambda = \sum_\lambda \mathbf{c}'_\lambda \mathbf{c}_\lambda ,$$

ist:

$$(38)\quad a_\lambda a^\lambda = 1 \ , \ a_\lambda a^\mu = 0 \ , \ \lambda \neq \mu$$

und infolgedessen gilt stets:

$$(39)\quad a_{\lambda\nu} a^\mu = - a_\lambda a^\mu_\nu .$$

Die geodätische Linie.

Die Gleichung einer geodätischen Linie lautet:

$$(40)\quad \delta \int ds = 0$$

und es ergiebt sich daraus in bekannter Weise durch Ausführung der Variation die Gleichung:

$$(41a)\quad \frac{d}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} + \sum_{\mu\nu} \left\{ {\mu\nu \atop \lambda} \right\} \frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0,$$

welche Gleichung infolge (37) identisch ist mit:

$$(41b)\quad \frac{d}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} + a^\lambda \sum_{\mu\nu} a_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

oder:

$$(41c)\quad a^\lambda a_\lambda \frac{d}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} + a^\lambda \sum_{\mu\nu} \frac{\partial a_\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} =$$

$$= a^\lambda \sum_\mu \left(a_\mu \frac{d}{ds}\frac{dx^\mu}{ds} + \frac{da_\mu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds} \right) = a^\lambda \frac{d}{ds} \sum_\mu a_\mu \frac{dx^\mu}{ds} = 0$$

oder:

$$(41d)\quad \mathbf{a} \frac{d}{ds}\left(\mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) = 0$$

Nun ist $\frac{d\mathbf{x}}{ds}$ der in jedem Punkte der geodätischen Linie in der Richtung der Tangente gelegene Einheitsvektor, und die Gleichung besagt also, dasz eine bestimmte Differentialfunktion dieses Einheitsvektors entlang der geodätischen Linie verschwindet:

$$(42)\quad \mathbf{a}\, d\left(\mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) = 0.$$

Wir bilden nun diese Differentialfunktion für einen beliebigen Vektor $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{a}\, d(\mathbf{a} \,.\, \mathbf{v})$$

und fragen nach der geometrischen Bedeutung dieses Ausdrucks. Da derselbe $\mathbf{a}$ zweimal enthält, und überdies nur Vektoren und keine Bestimmungszahlen, ist zunächst klar, dass die Bedeutung eine *reale* und von jedem Bezugssysteme *unabhängige* sein wird. Zur näheren Ergründung beziehen wir uns auf ein Orthogonalnetz[a]), das so orientiert ist, dasz in dem betrachteten Punkte P die j Kurve die Richtung der Verrückung angiebt. In P sei der Vektor $\mathbf{v}$, und Q sei ein Punkt auf der j Kurve dureh P in einer Entfernung dx_j von P. Es ist dann:

$$(43)\quad \mathbf{a}\, d(\mathbf{a} \,.\, \mathbf{i}_k) = \mathbf{a}\, d\, a_k = \mathbf{a} \sum_j a_{kj}\, dx_j \quad , \quad k = 1, \ldots, 4.$$

Führen wir nun im Punkte Q die Vektoren ein:

$$(44)\quad {}'\mathbf{i}_k = \mathbf{i}_k - \mathbf{a}\, d(\mathbf{a} \,.\, \mathbf{i}_k) = \mathbf{i}_k - \mathbf{a} \sum_j a_{kj}\, dx_j = \mathbf{i}_k - \\ - \sum_{lj} a_l\, a_{kj}\, dx_j\, \mathbf{i}_l \quad , \quad k = 1, \ldots 4,$$

dann sind diese Vektoren *unabhängig* von jedem Bezugssystem *eindeutig* bestimmt, und es ist:

$$(45)\quad {}'\mathbf{i}_k \,.\, {}'\mathbf{i}_m = (\mathbf{i}_k - \sum_{lj} a_l\, a_{kj}\, dx_j\, \mathbf{i}_l) \,.\, (\mathbf{i}_m - \sum_{lj} a_l\, a_{mj}\, dx_j\, \mathbf{i}_l) = \\ = \mathbf{i}_k \,.\, \mathbf{i}_m - \sum_j (a_k\, a_{mj} + a_m\, a_{kj})\, dx_j = \mathbf{i}_k \,.\, \mathbf{i}_m = \begin{cases} 1 \text{ für } k = m \\ 0 \;\; \text{» } \; k \neq m, \end{cases}$$

da nach (32):

$$(46)\quad a_k\, a_{mj} + a_m\, a_{kj} = 0,$$

und die Vektoren $'\mathbf{i}$ sind also wiederum gegenseitig senkrechte Einheitsvektoren. Die Bestimmungszahlen des Vektors $\mathbf{v}$ in Q in Bezug auf das System $\mathbf{i}$ sind:

$$(47)\quad v_k + dv_k = v_k + \sum_j \frac{\partial\, v_k}{\partial\, x_j}\, dx_j \quad , \quad k = 1, \ldots, 4,$$

und die Bestimmungszahlen v_k dieses Vektors in Bezug auf das System $'\mathbf{i}$ ergeben sich aus der Erwägung, dasz die Transformation (45) selbstkontragredient ist und also die Transformation der Bestimmungszahlen mit der Transformation (45) der $\mathbf{i}$ identisch ist:

---

a) Man kann die Rechung auch für ein System $\mathbf{e}'$ durchführen. Ist dann Q ein Punkt auf der λ-Kurve durch P in einer Entfernung dx^λ von P, so sind in Q die Vektoren

$$'\mathbf{e}' = \mathbf{e}' - \mathbf{a}\, d(\mathbf{a} \,.\, \mathbf{e}'_\lambda)$$

einzuführen.

$$(48) \qquad {}'v_k = v_k + d\,v_k - \sum_{lj} a_l\, a_{kj}\, dx_j\, v_l \ , \quad k = 1, \ldots, 4.$$

Nun ist aber:

$$(49) \qquad \mathbf{a}\, d\,(\mathbf{a}\ .\ \mathbf{v}) = \sum_{kl} (a_k\, \mathbf{i}_k\, a_l\, dv_l + a_k\, \mathbf{i}_k \sum_j a_{lj}\, dx_j\, v_l) =$$
$$= \sum_k \mathbf{i}_k\, (dv_k - \sum_{jl} a_l\, a_{kj}\, dx_j\, v_l)$$

denn $a_k\, a_l = 0$ für $k \neq l$, und die Funktion $\mathbf{a}\, d\,(\mathbf{a}\ .\ \mathbf{v})$ *ist also das Differential des Vektors* $\mathbf{v}$, *beurteilt von einem längs der* j*-Kurve mitbewegten Koordinatensystem, welches in* P *mit* $\mathbf{i}$ *und in* Q *mit* ${}'\mathbf{i}$ *zusammenfällt.*

Das geodätisch bewegte Bezugssystem.

Zu jeder Stellung des Koordinatensystems in P existiert in jedem Punkte der j-Kurve eine zugehörige Stellung. Ein System, welches nacheinander diese verschiedenen Stellungen durchläuft nennen wir ein *geodätisch bewegtes Koordinatensystem.* Ist die j-Kurve geodätisch, so ist nach (42):

$$(50) \qquad {}'\mathbf{i}_j = \mathbf{i}_j - \mathbf{a}\, d\,(\mathbf{a}\ .\ \mathbf{i}_j) = \mathbf{i}_j \qquad j = 1, \ldots, 4$$

und die j Achse des Systems gleitet also, immer die Richtung der Tangente behaltend, an der Kurve entlang. Dabei wird ein $(n-1)$-fach-orthogonaler Streifen gebildet. Jede nicht geschlossenen geodätische Linie einer höheren Mannigfaltigkeit bestimmt also nicht nur in jedem ihrer Punkte eine Richtung, sondern auch um sich herum eine Orientierung, die durch eine der $\infty^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ $(n-1)$-fach-orthogonalen Streifen der Linie dargestellt werden kann. [a])

Geodätisches Differential und Differentialquotient.

Die Funktion $\mathbf{a}\, d\,(\mathbf{a}\ .\ \mathbf{v})$ ist das Differential von $\mathbf{v}$ *in Bezug auf ein geodätisch mitbewegtes Koordinatensystem.* Wir nennen daher diese Funktion das *geodätische Differential* von $\mathbf{v}$ und schreiben:

$$(51) \qquad d\mathbf{v} = \mathbf{a}\, d\,(\mathbf{a}\ .\ \mathbf{v}).$$

---

[a]) T. Levi-Civita hat schon 1917 [1]) in einer Arbeit, von der mir in folge der Zeitumstände erst nach Fertigstellung dieses Manuskriptes durch freundliche Vermittlung ein Abdruck in Händen kam, der Begriff des *Parallellismus* im einem allgemeinen Raum gebildet. Das geodätisch mitbewegte Bezugssystem nimmt nacheinander Lagen ein, die im Sinne Levi-Civita's parallel sind, und der Begriff der geodätischen Bewegung ist also in dem Begriff des Parallellismus enthalten. Die Beziehungen des kovarianten Differentials zu einem geodätisch mitbewegten Bezugssystem, und die grundlegende Bedeutung, welche die Bewegung eines solchen Systems für die geometrischen Eigenschaften des Raumes hat (vgl. S. 67 bis 69) sind aber Levi-Civita noch nicht bekannt gewesen.

[1]) 17.9.

Ein Miszverständnisz kann nicht entstehen da $d\mathfrak{v}$ bis hier noch überhaupt keine Bedeutung hatte (vergl. S. 39). Es ist zu beachten, dasz die Bestimmungszahlen von $d\mathfrak{v}$ in Bezug auf $\mathfrak{e}_\lambda$, $\mathfrak{e}'_\lambda$ und $\mathfrak{i}_j$ *nicht* dv_λ, dv^λ und dv_j sind, da $d\mathfrak{e}_\lambda$, $d\mathfrak{e}'_\lambda$ und $d\mathfrak{i}_j$ im allgemeinen *nicht* Null sind. Bei Einführung dieses Schreibweise ergiebt sich für das auf S. 45 verwendete Bezugssystem $'\mathfrak{i}$ in Q:

$$'\mathfrak{i}_k = \mathfrak{i}_k - d\,\mathfrak{i}_k. \tag{52}$$

In derselben Weise definieren wir:

$$\nabla\,\mathfrak{v} = \nabla\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v})\,\mathfrak{a}. \tag{53}$$

$\nabla\,\mathfrak{v}$ ist der Affinor, welcher durch skalare Ueberschiebung mit $d\mathfrak{x}$ das geodätische Differential $d\mathfrak{v}$ erzeugt, und kann also als geodätischer Differentialquotient aufgefaszt werden:

$$\nabla\,\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{v}}{d\mathfrak{r}^{\,1}}. \tag{54}$$

In der Tat ist:

$$d\mathfrak{r}^{\,1}\,\nabla\,\mathfrak{v} = d\mathfrak{r}^{\,1}\,\nabla\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v})\,\mathfrak{a} = \{d\mathfrak{r}\,.\,\nabla\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v})\}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\,d\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v}). \tag{55}$$

Allgemeiner sei noch für eine beliebige Multiplikaton $\underset{1}{\circ}$ definiert:

$$\nabla\,\underset{1}{\circ}\,\mathfrak{v} = \{\nabla\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v})\}\,\underset{1}{\circ}\,\mathfrak{a}. \tag{56}$$

Wird $\mathfrak{a}$ konstant, so bekommen $d\mathfrak{v}$, $\nabla\,\mathfrak{v}$ und $\nabla\,\underset{1}{\circ}\,\mathfrak{v}$ wieder die einfache Bedeutung des vorigen Abschnittes. (Vergl. S. 57).

Da in einem Raume mit euklidischer Maszbestimmung $\mathfrak{a}\,d\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v})$ die Bedeutung des gewöhnlichen Differentiales hat, bewegt sich das geodätisch bewegte System in einem solchen Raume zu sich selbst parallel. Daraus ergiebt sich eine einfache geometrische Deutung für den allgemeineren Fall. Zu jeder nicht besonderen Kurve k in einer beliebigen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X_n, die in irgend einem höheren euklidischen Raum eingebettet ist, läszt sich nämlich eine *entwickelbare* n-dimensionale Mannigfaltigkeit Y_n konstruieren, die X_n entlang k berührt. Es ist nun das Selbe, ob das Bezugssystem im Raume X_n oder im Raume Y_n der Kurve entlang geodätisch bewegt wird. Im euklidischen Raume Y_n ist aber diese Bewegung vollständig bestimmt. Da die geodätische Krümmung von k in X_n bekanntlich der gewöhnlichen Krümmung $\frac{d\Phi}{ds}$ von k in Y_n gleich ist, dreht sich also das Bezugssystem beim Fortschreiten längs ds gerade über den Winkel $d\Phi$ *zurück*. Ist z. B. X_n eine Kugelfläche und k ein Kreis auf derselben, so dreht sich das Bezugssystem beim vollständigen Durchlaufen der Kurve um einen Winkel:

$$(57) \qquad \alpha = 2\pi - \varepsilon \; ; \; \varepsilon = \frac{O}{4\pi r^2} \cdot 4\pi = \frac{O}{r^2},$$

wenn O den Flächeninhalt der umschlossenen Kugelkappe darstellt und r den Radius der Kugel. Wird der Mantel des Rotationskegels, der die Kugel in k berührt, auf der Ebene abgewickelt, so geht die geodätische Bewegung in eine Parallelbewegung über. Beigehende Abbildungen eines Modelles der Kugel und des entwickelten Kegelmantels mögen den Sachverhalt veranschaulichen (Abb. 5). [a])

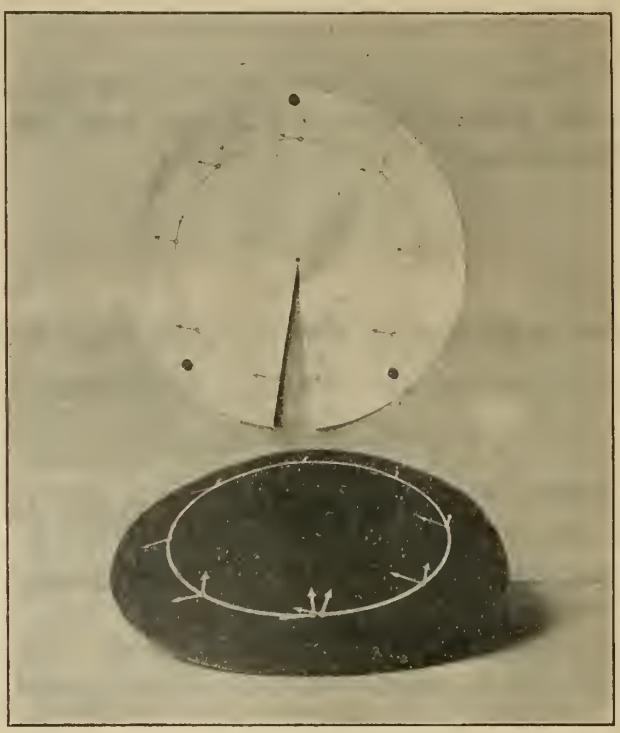


Abb. 5. Geodätisch bewegtes Bezugssystem auf einer Kugel.

Die mechanische Deutung der geodätischen Bewegung. In einem dreidimensionalen Raume mit beliebiger Maszbestimmung kann sich ein endlicher starrer Körper im allgemeinen nicht bewegen, und auch die an verschiedenen seiner Punkte wirkenden Kräfte können nicht zusammengestellt werden, da sich zu verschiedenen Punkten gehörige Vektoren nicht ohne weiteres vergleichen lassen. Hat aber

a) Auf Wunsch des Herrn T. Levi Civita berichtige ich hier einen Fehler auf S. 13 seiner Arbeit über den Begriff des Parallelismus [1]) (vergl. S. 46), der gerade dieses Beispiel betrifft. Es wird nämlich dort geschlossen, dasz das Bezugssystem sich nach einem vollständigen Umgang überhaupt nicht gedreht hat. Der Fehler ist verursacht durch die Verwechslung von cos und cot in einer Formel.

[1]) 17. 9.

der Körper einen sehr kleinen Durchmesser δ, so kann der Raumteil innerhalb seiner Oberfläche in erster Annäherung als euklidisch aufgefasst werden. Es kann gezeigt werden, dasz der dabei gemachte Fehler für die Resultante der Kräfte die Ordnung δ^5 und für das resultierende Moment die Ordnung δ^6 hat. Gilt in dem betrachteten Raume eine Mechanik mit dem Grundgesetze:

$$\mathbf{k} = m \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \tag{58}$$

wo $\mathbf{k}$ die Kraft und m die Masse ist, (die zweite Differentiierung ist natürlich eine geodätische), so ist die Bewegung des Körpers gegeben durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 + \Sigma\,\mathbf{k} &= \frac{d}{dt}\,\Sigma\, m \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \mathbf{M}_1 + \Sigma\,\mathbf{k} \times \mathbf{r} &= \frac{d}{dt}\,\Sigma\, m \frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{r}, \end{aligned} \tag{59}$$

wo $\mathbf{K}_1$ und $\mathbf{M}_1$ Kraft und Moment darstellen, die von den elastischen Deformationen während der Bewegung herrühren und $\mathbf{r}$ den Radiusvektor (Ordnung des Fehlers δ^2) in Bezug auf den Schwerpunkt. Wären $\Sigma\,\mathbf{k} \times \mathbf{r}$ und $\mathbf{M}_1$ Null, so wäre die Bewegung des Körpers also eine geodätische. Gelten in dem betrachteten Raume aber solche elastischen Eigenschaften, dasz die Spannungen von derselben Grószenordnung (in Bezug auf δ) sind als die Deformationen, so läszt sich zeigen, dasz $\mathbf{K}_1$ von der Ordnung δ^4 und $\mathbf{M}_1$ von der Ordnung δ^5 ist. $\mathbf{K}_1$ kann also vernachlässigt werden, $\mathbf{M}_1$ aber hat dieselbe Ordnung als das Trägheitsmoment, und die Bewegung eines Körpers nähert sich also unter diesen Voraussetzungen für $\Sigma\,\mathbf{k} \times \mathbf{r} = 0$ bei Verkleinerung der Abmessungen *nicht* der geodätischen a).

In anderer Weise ist es aber möglich die geodätische Bewegung mechanisch zu realisieren. Erstens kann man statt einer massiven Kugel eine mit Masse belegte Kugelschale nehmen. Bei konstanter Flächendichte dieser Belegung ist das Trägheitsmoment dann von der Ordnung δ^4. Zweitens kann man einer kleinen massiven Kugel stets eine so grosze Winkelgeschwindigkeit erteilen, dasz die Änderung der Richtung des Drallvektors durch das Moment der elastischen

a) Die entgegengesetzte in einer vorläufigen Mitteilung [1]) geäuszerte Meinung sei hiermit zurückgenommen. Die dort gezogenen Schlüsse, betreffs einer möglicherweise infolge der nicht-euklidischen Massbestimmung auftretenden Abweichung in der Präzessionsbewegung, werden davon nicht berührt. Die Veranlassung zu einer eingehenderen Prüfung der Bewegungsgleichungen verdanke ich einer Korrespondenz mit Herrn H. A. Lorentz.

[1]) 18. 3.

Kräfte beliebig klein wird. Die Drehachse bewegt sich dann bis auf vernachlässigbare Abweichungen geodätisch. Die Kombination von drei kleinen Gyroskopen mit gegenseitig senkrechten Achsen bildet also ein beim Fehlen äuszerer Momente praktisch geodätisch bewegtes mechanisches System. Für mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten gelten ähnliche Überlegungen. Eine mechanische Realisierung des geodätisch bewegten Bezugssystemes in irgend einer Mannigfaltigkeit heisze *Kompaszkörper*. [a])

Die invarianten Eigenschaften eines Raumes können offenbar durch die Bewegungen eines Kompaszkörpers vollständig bestimmt werden. Die geodätische Krümmung der Bahnkurven der Punkte des Kompaszkörpers ist von der Ordnung δ, während alle Punkte bis auf Grözen von der Ordnung δ^2 gleiche Wege durchlaufen. [b])

Kovariante und Kogrediente Differentiation.

Da für die CHRISTOFFEL'schen Symbole die Gleichungen (35) und (36) gelten und für das HESSENBERG'sche Symbol $\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu \end{matrix} \right\}^e$):

$$(60) \qquad \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu \end{matrix} \right\} = \sum_\nu \left\{ \begin{matrix} \lambda\nu \\ \mu \end{matrix} \right\} dx^\nu = \sum_\nu a^\mu a_{\nu\lambda}\, dx^\nu$$

während ferner:

$$(61a) \qquad \left(\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{x}^1}\right)_{\lambda\mu} = \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\lambda} + a_\mu \sum_\nu a^\nu_\lambda v_\nu = \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\lambda} - a_{\mu\lambda} \sum_\nu a^\nu v_\nu$$

$$(61b) \qquad \left(\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{x}^1}\right)^\mu_\lambda = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\lambda} + a^\mu \sum_\nu a_{\nu\lambda} v^\nu = \frac{\partial v^\mu}{\partial x_\lambda} - a^\mu_\lambda \sum_\nu a_\nu v^\nu \ [d])$$

$$(61c) \qquad (d\mathbf{v})_\lambda = dv_\lambda + \sum_{\mu\nu} a_\lambda a^\nu_\mu v_\nu\, dx^\mu = dv_\lambda - \sum_\mu a_{\lambda\mu}\, (\mathbf{a} \,.\, \mathbf{v})\, dx^\mu, \ [e])$$

ist die geodätische Differentiation bis auf den Ort der hinzutretenden

---

a) Für gewöhnliche Flächen kann das geodätisch mitbewegte Bezugssystem manchmal durch einen dreidimensionalen Mechanismus realisiert werden. Ein Foucault'sches Pendel welches irgend einem Breitenkreis entlang die ruhend und kugelförmig gedachte Erde umkreist, bleibt stets zu einem geodätisch mitbewegten Koordinatensystem orientiert und das Selbe gilt, wenn das Pendel irgend eine beliebige Kurve auf der Oberfläche durchläuft. Auch mit Hilfe eines Differentialrades liesze sich ein zweirädriger Mechanismus konstruieren, welcher, rollend über die Oberfläche geführt, in jedem Punkte das geodätisch mitbewegte System anzeigt.

b) Letztere Wendung, sowie auch die characteristische Benamung „Kompaszkörper" verdanke ich einer Korrespondenz mit Herrn A. D. FOKKER über das Manuskript der vorliegenden Arbeit. Herr FOKKER hat in einer gleichzeitig in den Verslagen der K. Akad. v. Wet. erscheinenden Note [1]) die Bewegungen eines kleinen Körpers näher betrachtet.

c) 99 1, S. 8.

d) Nach (56), (38) und (39).

e) Nach (51), (38) und (39).

[1]) 18.6.

Stelle identisch mit der sogenannten kovarianten [1]) oder kogredienten [2]) Differentiation, und das geodätische Differential ist identisch mit dem kogredienten Differential HESSENBERG's [3]). Dies gilt auch für höhere Gröszen. Die hinzutretende Stelle hängt sich bei der kovarianten Differentiation *rechts* an, bei der geodätisehen dagegen *links*, da der Operator ∇, wie üblich, nach *rechts* differentiierend wirkt. Die idealen Vektoren $\mathfrak{a}$ gestatten eine einfaehere Darstellung dieser Differentiationen, sowie der allgemeineren Differentiation (56).

Die Maschke'sche Symbolik.

Die dargestellte Methode ist einer von H. MASCHKE ausgebildeten Symbolik [4]) verwandt. Unsere idealen Zahlen $a, b, \ldots$ sind mit den MASCHKE'schen Symbolen $f^1, f^2, \ldots$ identisch. MASCHKE verwendet aber nur die Bestimmungszahlen und bildet also keine direkte Analysis. Damit hängt wohl zusammen, dasz er dem kontravarianten Fundamentaltensor keine eigenen Symbole zuordnet, und infolgedessen nur mit Determinanten der f arbeiten kann. Seine Formeln werden dadureh komplizierter und enthalten stets von n und $-g$ abhängige Konstanten. Statt (13) und (18) treten z.B. die Formeln:

$$(62) \qquad f^\lambda (f\,a)\,(u\,a) = (n-1)!\,u^\lambda \quad , \quad \lambda = a, \ldots, d,$$

worin:

$$(63) \qquad (u\,a) = \sqrt{-g} \begin{vmatrix} u^a & \ldots & u^d \\ f_a^{(2)} & \ldots & f_d^{(2)} \\ f_a^{(4)} & \ldots & f_d^{(4)} \end{vmatrix}$$

und die bekannten drei Differentialparameter $\Delta_1 p$, $\Delta_2 p$, $\nabla(p, q)$ sind in beiden Schreibweisen:

$$(64) \qquad \Delta_1 p = (\nabla p) \cdot (\nabla p) = \frac{1}{(n-1)!}(p f)^2$$

$$(65) \qquad \Delta_2 p = \nabla \cdot (\nabla p) \quad = \frac{1}{(n-1)!}((p f), f)$$

$$(66) \qquad \nabla(p,q) = (\nabla p)\cdot(\nabla q) = \frac{1}{(n-1)!}(p f)(q f).$$

---

[1]) RICCI und LEVI CIVITA 01. 1, S. 138.
[2]) HESSENBERG 17. 5, S. 208.
[3]) 99 1, S. 9, 17. 5, S. 200.
[4]) 03. 2.

Die Methoden von L. Ingold und J. B. Shaw.

Die Vektoren $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ sind bei anderen Autoren noch in einer in Bezug auf die idealen Zahlen a_μ von der unsrigen grundverschiedenen Weise aufgetreten. Da

$$a_\mu\, a_\nu = g_{\mu\nu} \tag{67}$$

und andererseits

$$\mathfrak{e}'_\mu \,.\, \mathfrak{e}'_\nu = g_{\mu\nu} \tag{68}$$

kann man das Maschke'sche Symbol $f_\mu = a_\mu$ direkt mit $\mathfrak{e}'_\mu$ identifizieren und als Vektor auffassen. Dieser Gedanke rührt von L. Ingold her. [1]) Mit Hülfe der $\mathfrak{e}'_\mu$ bestimmt er Lineargrößen höherer Stufen, und beweist, daß für diese Größen die Regeln der Grassmann'schen Ausdehnungslehre gelten.[a]) Umgekehrt können dann aus diesen Regeln die für Differentialinvarianten gültigen Sätze abgeleitet werden. Zu kovarianten Lineargrößen und Größen höherer Ordnung gelangt Ingold nicht. J. B. Shaw [2]) hat auf die Resultate von Maschke und Ingold fortgebaut. Er gelangt auch zu kovarianten Lineargrößen und zu einer kovarianten Erweiterung der Bedeutung von ∇.

Die Hessenberg'sche Methode.

G. Hessenberg, der schon in 1899 [3]) besonders durch Einführung des kogredienten Differentials eine Behandlung der Flächentheorie in formal abgekürzter Weise gab, welche die Invarianz der Formeln direkt ersichtlich macht, hat kürzlich [4]) eine wesentlich auf geometrische Betrachtungen beruhende Methode zur Ersetzung des schwerfälligen Formelapparates der Theorie der quadratischen Differentialformeln angegeben. Diese geometrischen Betrachtungen führen ihn zu den reciproken Vektoren $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ und zwar direkt für den allgemeineren Fall, wo auch die dx^λ keine exakten Differentiale sind. Er stellt sich aber nicht die Bildung einer direkten Analysis als Ziel, und arbeitet zwar mit Vektoren, aber nur mit den Be-

[a]) Bei der S. 8 zugrundegelegten gruppentheoretischen Auffassung eines Vektors könnte dieser Beweis kürzer gefasst werden. Es genügt darzutun, daß die $\mathfrak{e}'_\mu$ Vektoren in dem dort angegebenen Sinne sind, um die Gültigkeit des Systems $S^l_{\mu\eta}$ welches eine Erweiterung der Grassmann'schen Ausdehnungslehre ist (vergl. S. 29 bis 31), sicher zu stellen.

[1]) 10.4.
[2]) 13.3.
[3]) 99.1.
[4]) 17.5.

stimmungszahlen der höheren Gröszen. Ferner führt er keine idealen Vektoren ein, statt dessen aber gewisse Differentiale von Vektoren, welche nicht invariant sind und nicht die Orientierungsweise eines Vektors haben, und die er als Quasi-Vektoren bezeichnet. Durch Zerlegung der Differentiale der Bestimmungszahlen des Fundamentaltensors ensteht ebenso ein Quasitensor, der „Orientierungtensor". Die Art dieser Zerlegung bestimmt welche Linien der Mannigfaltigkeit X_n die „geradesten" sind. Erst durch die Bedingung, dasz die „geradesten" Linien auch die „kürzesten" sind, wird der Orientierungstensor eindeutig festgelegt, und geht der allgemeinere Ansatz, wenn auch die dx^λ exakt genommen werden, in den gewöhnlichen Fall über. Geometrisch bedeutet die Einführung des Orientierungstensors, dasz in der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X_n ein aus n Hyperkongruenzen bestehendes Netz ausgebreitet wird. Statt des geodätischen Differentials tritt dann das Differential in Bezug auf das so entstandene Bezugssystem. Die analytische Bedeutung ist, dasz bei allgemeiner Wahl des Orientierungstensors das Invariantensystem *zweier* Formen betrachtet wird.

Die Methode von F. Jung.

F. Jung hat kürzlich [1]) eine systematische Behandlung von Grössen höherer Ordnung auf Grassmann'scher Basis gegeben. Dabei ist es ihm gelungen die „Feldableitung" $\nabla\mathfrak{v}$ für beliebige Koordinaten zu definieren. Er verwendet die Vektoren $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$; die Gleichungen (23) und (24) sowie die aus (35) und (36) hervorgehenden Beziehungen:

$$(69)\qquad \left[\begin{matrix}\lambda\mu\\ \nu\end{matrix}\right] = \frac{\partial\,\mathfrak{e}'_\lambda}{\partial x^\mu}\cdot\mathfrak{e}'_\nu\quad,\quad \left\{\begin{matrix}\lambda\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} = \frac{\partial\,\mathfrak{e}'_\lambda}{\partial x^\mu}\cdot\mathfrak{e}_\nu$$

sind ihm bekannt. Er arbeitet aber, soweit dem Verfasser bekannt, bis auf einige sehr kurze Andeutungen in einer früheren Arbeit [2]), stets nur in einer Mannigfalligkeit X_n mit euklidischer Massbestimmung, und gelangt so weder zum Beweise der allgemeineren Gültigkeit seiner Formeln, noch zum Begriffe des geodätischen Differentialquotienten $\nabla\mathfrak{v}$. Ideale Elemente treten bei ihm nicht auf. [a])

[1]) 17. 8, 18. 4.

[2]) 10.5, S. 384 und 389.

[a]) Aus einer Korrespondenz mit Herrn Jung ist mir inzwischen hervorgegangen, dasz Herr Jung die allgemeinere Gültigkeit seiner Formeln kannte, und für sich selbst schon zur Behandlung des allgemeineren Falles gelangt war. (Vergl. S. 72). Auch teilte er mir eine von ihm gefundene Gleichung mit, die, ohne Verwendung von idealen Elementen, mit meiner Gleichung (120) auf S. 59 korrespondiert.

Geodätische Differentiation von Produkten.

Aus dem Umstande, dasz das geodätische Differential ein gewöhnliches Differential ist in Bezug auf ein geodätisch mitbewegtes Bezugssystem, sowie auch aus (18) und (51), folgt für Produkte realer oder idealer Vektoren:

$$(70) \qquad d(\mathfrak{v}_1 \mathbin{\overset{1}{\circ}} \ldots \mathbin{\overset{1}{\circ}} \mathfrak{v}_p) = d\{(\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{v}_1) \ldots\ldots (\mathfrak{a}_p \cdot \mathfrak{v}_p)\}\, \mathfrak{a}_1 \mathbin{\overset{1}{\circ}} \ldots \mathbin{\overset{1}{\circ}} \mathfrak{a}_p$$

$$(71) \qquad \nabla \mathbin{\overset{1}{\circ}}_2 (\mathfrak{v}_1 \mathbin{\overset{1}{\circ}} \ldots \mathbin{\overset{1}{\circ}} \mathfrak{v}_p) = [\nabla\{(\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{v}_1) \ldots (\mathfrak{a}_p \cdot \mathfrak{v}_p)\}] \mathbin{\overset{1}{\circ}}_2 (\mathfrak{a}_1 \mathbin{\overset{1}{\circ}} \ldots \mathbin{\overset{1}{\circ}} \mathfrak{a}_p),$$

und für ein Produkt zweier beliebiger Grösszen:

$$(72) \qquad d(\overset{p}{\mathfrak{V}} \mathbin{\overset{q}{\circ}}_1 \mathfrak{W}) = d\overset{p}{\mathfrak{V}} \mathbin{\overset{q}{\circ}}_1 \mathfrak{W} + \overset{p}{\mathfrak{V}} \mathbin{\overset{q}{\circ}}_1 d\mathfrak{W}$$

$$(73) \qquad \nabla \mathbin{\overset{p}{\circ}}_1 (\overset{p}{\mathfrak{V}} \mathbin{\overset{q}{\circ}}_2 \mathfrak{W}) = \nabla_v \mathbin{\overset{p}{\circ}}_1 (\overset{p}{\mathfrak{V}} \mathbin{\overset{q}{\circ}}_2 \mathfrak{W}) + \nabla_w \mathbin{\overset{p}{\circ}}_1 (\overset{p}{\mathfrak{V}} \mathbin{\overset{q}{\circ}}_2 \mathfrak{W}) =$$

$$= (\nabla \mathbin{\overset{p}{\circ}}_3 \overset{p}{\mathfrak{V}}) \mathbin{\overset{q}{\circ}}_4 \mathfrak{W} + (\nabla \mathbin{\overset{q}{\circ}}_5 \mathfrak{W}) \mathbin{\overset{q}{\circ}}_6 \mathfrak{V},$$

wenn $\mathbin{\overset{p}{\circ}}_3$, $\mathbin{\overset{q}{\circ}}_4$, $\mathbin{\overset{q}{\circ}}_5$ und $\mathbin{\overset{q}{\circ}}_6$ die S. 34 angegebene Bedeutung haben.

Der einmalig angewandte Operatorkern ∇ verhält sich also auch in der erweiterten Bedeutung algebraisch wie ein Vektor, und es bleiben die im vorigen Abschnitt angegebenen Regeln für Anwendung auf Produkte gelten.

Wird ∇ zweimal hintereinander verwendet, so ist dieser Schlusz nicht mehr zulässig, da das Differential sich in beiden Fällen auf zwei verschiedene Increments $d_1\mathfrak{X}$ und $d_2\mathfrak{X}$ beziehen kann. Das geodätisch mitbewegte System ist dan nicht in beiden Fällen das Selbe und erst eine nähere Betrachtung kann lehren, ob auch in diesem Falle die Regeln des vorigen Abschnittes gültig bleiben. (Vergl. S. 58).

Mit Hülfe der idealen Vektoren $\mathfrak{a}$ ist es möglich jeden beliebigen Faktor eines allgemeinen Produktes in ein skalares Produkt aufzunehmen und beiseite zu schaffen:

$$(74) \qquad \mathfrak{v}_1 \ldots \mathfrak{v}_p = (\mathfrak{v}_j \cdot \mathfrak{a})\, \mathfrak{v}_1 \ldots \mathfrak{v}_{j-1}\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{v}_{j+1} \ldots \mathfrak{v}_p\,,$$

und es ergiebt sich daraus eine einfache Formel für das geodätische Differentialquotient eines allgemeinen Produktes:

$$(75) \qquad \nabla\, \mathfrak{v}_1 \ldots \mathfrak{v}_p = \sum_j^{1..p} \nabla\, (\mathfrak{v}_j \cdot \mathfrak{a})\, \mathfrak{v}_1 \ldots \mathfrak{v}_{j-1}\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{v}_{j+1} \ldots \mathfrak{v}_p,$$

$$(76) \qquad \nabla\, \mathfrak{v}_1 \ldots \mathfrak{v}_p = \sum^{1..p} (\nabla\, \mathfrak{v}_j)\, !\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{v}_1 \ldots \mathfrak{v}_{j-1}\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{v}_{j+1} \ldots \mathfrak{v}_p.$$

Ebenso ist:

$$(77)\quad \nabla\,!\,(\mathfrak{v}_1 \ldots \mathfrak{v}_p) = \sum_j^{1\ldots p} \nabla\,(\mathfrak{v}_j \,.\, \mathfrak{a})\,!\,(\mathfrak{v}_1 \ldots \mathfrak{v}_{j-1}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}_{j+1} \ldots \mathfrak{v}_p),$$

$$(78)\quad \nabla\,\underset{1}{\lrcorner}\,(\mathfrak{v}_1 \ldots \mathfrak{v}_p) = \sum^{1\ldots p} \nabla\,(\mathfrak{v}_j \,.\, \mathfrak{a})\,\overline{\lrcorner}_1\,(\mathfrak{v}_1 \ldots \mathfrak{v}_{j-1}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}_{j+1} \ldots \mathfrak{v}_p).$$

Andererseits ist:

$$(79)\quad \nabla\,\overset{p}{\mathfrak{v}} = \mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}\,.\,\nabla)\,\overset{p}{\mathfrak{v}},$$

und man kann also auch ∇ in ein skalares Produkt aufnehmen und an eine gewünschte Stelle bringen, sodasz sich die Formeln ergeben:

$$(80)\quad \nabla\,\mathfrak{v}_1 \ldots \mathfrak{v}_p = \sum_j^{1\ldots p} \mathfrak{a}\,\mathfrak{v}_1 \ldots \mathfrak{v}_{j-1}\,|\,(\mathfrak{a}\,.\,\nabla)\,\mathfrak{v}\,|\,\mathfrak{v}_{j+1} \ldots \mathfrak{v}_p,$$

$$(81)\quad \nabla\,!\,(\mathfrak{v}_1 \ldots \mathfrak{v}_p) = \sum_j^{1\ldots p} \mathfrak{a}\,!\,\mathfrak{v}_1 \ldots \mathfrak{v}_{j-1}\,|\,(\mathfrak{a}\,.\,\nabla)\,\mathfrak{v}_j\,|\,\mathfrak{v}_{j+1} \ldots \mathfrak{v}_p,$$

$$(82)\quad \nabla\,\overline{\lrcorner}_1\,(\mathfrak{v}_1 \ldots \mathfrak{v}_p) = \sum_j^{1\ldots p} \mathfrak{a}\,\overline{\lrcorner}_1\,\mathfrak{v}_1 \ldots \mathfrak{v}_{j-1}\,|\,(\mathfrak{a}\,.\,\nabla)\,\mathfrak{v}_j\,|\,\mathfrak{v}_{j+1} \ldots \mathfrak{v}_p,$$

$$(83)\quad \nabla\,\overset{p}{\mathfrak{v}}\,\overset{q}{\mathfrak{w}} = (\nabla\,\overset{p}{\mathfrak{v}})\,\overset{q}{\mathfrak{w}} + \mathfrak{a}\,\overset{p}{\mathfrak{v}}\,(\mathfrak{a}\,.\,\nabla)\,\overset{q}{\mathfrak{w}} = \mathfrak{a}\,\{(\mathfrak{a}\,!\,\nabla\,\overset{p}{\mathfrak{v}})\,\overset{q}{\mathfrak{w}} + \overset{p}{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{a}\,!\,\nabla\,\overset{q}{\mathfrak{w}}\}.$$

Die zweckmässige Anwendung dieser Formeln giebt der Rechnung eine besondere Geschmeidigkeit.

Die von $^2\mathfrak{g}$ *unabhängigen Differentiationen.*

Infolge (61*a*) ist:

$$(84)\quad (\nabla \times \mathfrak{v})_{\lambda\mu} = {}^1\!/_2 \left(\frac{\partial\, v_\mu}{\partial\, x^\lambda} - \frac{\partial\, v_\lambda}{\partial\, x^\mu} \right)$$

und $\nabla \times \mathfrak{v}$, oder allgemeiner $\nabla\,\underset{1}{\lrcorner}\,\overset{p}{\mathfrak{v}}$, ist also *von* $^2\mathfrak{g}$ *unabhängig*. Daraus geht hervor, dasz ebenso $\nabla \times {}_2\mathfrak{v}$ und $\nabla\,.\,{}_3\mathfrak{v}$, oder allgemeiner $\nabla\,\underset{2}{\lrcorner}\,\overset{p}{\mathfrak{v}}$ und $\nabla\,\underset{3}{\lrcorner}\,\overset{p}{\mathfrak{v}}$, von $^2\mathfrak{g}$ unabhängig sind. Denn es ist z.B.:

$$(85)\quad \nabla \times {}_2\mathfrak{v} = \nabla \times (\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2) = (\nabla \times \mathfrak{v}_1) \times \mathfrak{v}_2 - (\nabla \times \mathfrak{v}_2) \times \mathfrak{v}_1.$$

Für diese Differentiationen gelten also alle Regeln des vorigen Abschnittes, namentlich ist auch (vergl. (I 109)):

$$(86)\quad \nabla \times \nabla \times \mathfrak{v} = 0 \quad , \quad \nabla\,\underset{2}{\lrcorner}\,(\nabla\,\underset{1}{\lrcorner}\,\overset{p}{\mathfrak{v}})\,0\,,$$

$$(87)\quad \nabla\,.\,(\nabla \times {}_2\mathfrak{v}) = 0 \quad , \quad \nabla\,\underset{3}{\lrcorner}\,(\nabla\,\underset{2}{\lrcorner}\,\overset{p}{\mathfrak{v}}) = 0\,,$$

$$(88)\quad (\nabla \times \nabla)\,.\,{}_2\mathfrak{v} = -\,\mathfrak{I}\,\nabla\,.\,(\nabla \times {}_2\mathfrak{v}^*) = 0.$$

Die Differentiationsregeln der kontravarianten Bestimmungszahlen von Vektoren und Bivektoren.

Da nach (25):

$$\mathbf{I} = \sqrt{-g}\ \mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\ \mathbf{E}', \tag{89}$$

ist nach (I 20) und (I 68):

$$\mathfrak{v}^* = -\mathbf{I}\mathfrak{v} = -4\mathbf{I}^{-1}\mathfrak{v} = -4\sqrt{-g}\,\mathbf{E}^{-1}\mathfrak{v} = \sqrt{-g}\,(v^a\,\mathfrak{e}_{\overline{bcd}} + \text{etc.}), \tag{90}$$

und daher:

$$v^*_{\overline{bcd}} = \sqrt{-g}\ v^a \quad , \text{ cycl.} \tag{91}$$

Infolge der Unabhängigkeit von $\nabla . \mathfrak{v}^*$ von ${}^2\mathbf{g}$ ist also:

$$\nabla . \mathfrak{v} = \mathbf{I}\,\nabla . (-\mathbf{I}\,\mathfrak{v}) = \sum_\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \sqrt{-g}\ v^\lambda. \tag{92}$$

Ebenso ist:

$$\begin{aligned} \nabla .{}_2\mathfrak{v} &= \mathbf{I}\,\nabla \times {}_2\mathfrak{v}^* = \mathbf{I}\,\nabla \times (\sqrt{-g}\ v^{ab}\,\mathfrak{e}_{cd} + \text{etc.}) = \\ &= \mathbf{I}\left(\frac{\partial \sqrt{-g}\ v^{ab}}{\partial x^a}\,\mathfrak{e}_{\overline{acd}} + \text{etc.}\right) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \sum_{\lambda\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \sqrt{-g}\ v^{\lambda\mu}\right) \mathbf{e}'_\mu, \end{aligned} \tag{93}$$

und daher:

$$\nabla^{-1}{}_2\mathfrak{v} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{\lambda\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \sqrt{-g}\ v^{\lambda\mu}\right) \mathbf{e}'_\mu. \tag{94}$$

Schliesslich ist:

$$\begin{aligned} \nabla \times {}_3\mathfrak{v} &= -\mathbf{I}\,\nabla \times {}_3\mathfrak{v}^* = \\ &= -\mathbf{I}\left(-\frac{\partial \sqrt{-g}\ v^{bcd}}{\partial x^b}\,\mathfrak{e}_{\overline{a}} + \text{etc.}\right) = \\ &= \frac{3}{\sqrt{-g}} \sum_{\lambda\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \sqrt{-g}\ v^{\lambda\mu\nu}\right) \mathbf{e}'_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{95}$$

und infolgedessen:

$$\nabla^{-1}{}_3\mathfrak{v} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{\lambda\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \sqrt{-g}\ v^{\lambda\mu\nu}\right) \mathbf{e}'_{\mu\nu}. \tag{96}$$

Geodätische Differentiation des Fundamentaltensors.

Da der Fundamentaltensor in Bezug auf ein geodätisch mitbewegtes Koordinatensystem konstant ist, folgt:

$$d\,\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}\ d\,\mathbf{a} + d\,\mathbf{a}\ \mathbf{a} = 0. \tag{97}$$

Ferner ist:

$$(98)\quad \mathfrak{a}\,d\mathfrak{a} = d(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{b})\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}\,.\,d\mathfrak{b})\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} + (\mathfrak{b}\,.\,d\mathfrak{a})\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \\ = d\mathfrak{b}\,\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\,d\mathfrak{a},$$

und folglich:

$$(99)\qquad d\mathfrak{b}\,\mathfrak{b} = d\mathfrak{a}\,\mathfrak{a} = 0 \quad , \quad \mathfrak{a}\,d\mathfrak{a} = 0.$$

Da:

$$(100)\qquad d\mathfrak{x}\,\tfrac{1}{1}\,(\nabla\,\mathfrak{a})\,\mathfrak{a} = d\mathfrak{a}\,\mathfrak{a},$$

folgt noch:

$$(101)\qquad (\nabla\,\mathfrak{a})\,\mathfrak{a} = 0 \quad , \quad \mathfrak{a}\,\nabla\,\mathfrak{a} = 0\ ^{a}).$$

Mehrfache Differentiation.

Werden die Differentiale zu zwei verschiedenen Verrückungen $d_\lambda\,\mathfrak{x} = \mathfrak{e}'_\lambda\,dx^\lambda$ und $d_\mu\,\mathfrak{x} = \mathfrak{e}'_\mu\,dx^\mu$ durch d_λ bez. d_μ bezeichnet, so ist für jeden realen oder idealen Skalar p:

$$(102)\qquad d_\mu\,d_\lambda\,p = d_\lambda\,d_\mu\,p.$$

Ebenso ist, wenn dx^λ und dx^μ von $x^1, \ldots, x^d$ unabhängig sind:

$$(103)\quad d_\mu\,d_\lambda\,\mathfrak{x} = d_\mu\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{e}'_\lambda\,dx^\lambda)\,\mathfrak{a} = a_{\lambda\mu}\,dx^\mu\,dx^\lambda\,\mathfrak{a} = d_\lambda\,d_\mu\,\mathfrak{x}.$$

Für einen Vektor ist aber:

$$d_\mu\,d_\lambda\,\mathfrak{v} = d_\mu\,[\,\{d_\lambda\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v})\}\,\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{b}]\,\mathfrak{b} = \\ (104)\qquad = (\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{b})\,\mathfrak{b}\,d_\mu\,d_\lambda\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v}) + \mathfrak{b}\,d_\lambda\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v})\,d_\mu\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{b}) = \\ = \mathfrak{a}\,d_\mu\,d_\lambda\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v}) + \mathfrak{b}\,d_\lambda\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v})\,d_\mu\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{b}),$$

und demnach, bei Einführung des Zeichens $D_{\lambda\mu}$ [b]:

$$D_{\lambda\mu}\,\mathfrak{v} = (d_\mu\,d_\lambda - d_\lambda\,d_\mu)\,\mathfrak{v} = \mathfrak{b}\,d_\lambda(\mathfrak{a}.\mathfrak{v})\,d_\mu(\mathfrak{a}.\mathfrak{b}) - \mathfrak{b}\,d_\mu(\mathfrak{a}.\mathfrak{v})\,d_\lambda(\mathfrak{a}.\mathfrak{b}) = \\ (105)\qquad = d_\lambda(\mathfrak{a}.\mathfrak{v})\,d_\mu\,\mathfrak{a} - d_\mu(\mathfrak{a}.\mathfrak{v})\,d_\lambda\,\mathfrak{a} = \\ = \mathfrak{v}\,\tfrac{1}{1}\,\{d_\lambda\,\mathfrak{a}\,d_\mu\,\mathfrak{a} - d_\mu\,\mathfrak{a}\,d_\lambda\,\mathfrak{a}\}.\ ^{c})$$

Infolge (99) ist ferner:

$$(d_\mu\,d_\lambda\,\mathfrak{a})\,\mathfrak{a} + d_\lambda\,\mathfrak{a}\,d_\mu\,\mathfrak{a} = 0 \\ (106)\qquad (d_\lambda\,d_\mu\,\mathfrak{a})\,\mathfrak{a} + d_\mu\,\mathfrak{a}\,d_\lambda\,\mathfrak{a} = 0 \\ (D_{\lambda\mu}\,\mathfrak{a})\,\mathfrak{a} = -\,d_\lambda\,\mathfrak{a}\,d_\mu\,\mathfrak{a} + d_\mu\,\mathfrak{a}\,d_\lambda\,\mathfrak{a},$$

und ebenso:

a) Ist ein Affinor Null, so sind seine sämtlichen Isomere, die ja alle dieselben Bestimmungszahlen haben, ebenfalls Null.

b) Auch Hessenberg [1]) verwendet den Operator $D_{\lambda\mu}$.

c) Nach (51).

[1]) 17.5 S. 202.

$$\mathfrak{a}\, D_{\lambda\mu}\, \mathfrak{a} = d_\lambda\, \mathfrak{a}\, d_\mu\, \mathfrak{a} - d_\mu\, \mathfrak{a}\, d_\lambda\, \mathfrak{a}, \tag{107}$$

woraus unter Berücksichtigung von (105) folgt:

$$D_{\lambda\mu}\, \mathfrak{v} = \mathfrak{v}^{\,1}\,(\mathfrak{a}\, D_{\lambda\mu}\, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v})\, D_{\lambda\mu}\, \mathfrak{a}\,, \tag{108}$$

welche Gleichung auch aus den Identitäten:

$$\mathfrak{v} = (\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v})\,\mathfrak{a} \quad , \quad D_{\lambda\mu}\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v}) = 0 \tag{109}$$

abgeleitet werden kann. Da, wie einfach bewiesen wird, allgemein:

$$D_{\lambda\mu}\left(\overset{p}{\mathfrak{v}}\ \overset{q}{\mathfrak{w}}\right) = \left(D_{\lambda\mu}\ \overset{p}{\mathfrak{v}}\right)\overset{q}{\mathfrak{w}} + \overset{p}{\mathfrak{v}}\ D_{\lambda\mu}\ \overset{q}{\mathfrak{w}}\,^{1}), \tag{110}$$

gilt für jede Grösze $\overset{p}{\mathfrak{v}}$:

$$D_{\lambda\mu}\ \overset{p}{\mathfrak{v}} = \sum_i \mathfrak{v}_1 \ldots \mathfrak{v}_{i-1}\, \mathfrak{v}_i^{\,1}\,(\mathfrak{a}\, D_{\lambda\mu}\, \mathfrak{a})\, \mathfrak{v}_{i+1} \ldots \mathfrak{v}_p. \tag{111}$$

Verschwindet also der Affinor $\mathfrak{a}\, D_{\lambda\mu}\, \mathfrak{a}$, so ergiebt der Operator $D_{\lambda\mu}$ stets Null.

Der Affinor $\mathfrak{K}$.

Es fragt sich, welche Grösze verschwinden musz, damit *jeder* Operator $D_{\lambda\mu}$ für beliebige Richtungen $d_\lambda \mathfrak{x}$, $d_\mu \mathfrak{x}$ Null erzeugt. Dazu sei bemerkt, dasz:

$$\begin{aligned} \nabla\nabla\mathfrak{v} &= \nabla\,\{\nabla\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v})\,\mathfrak{a}\} = \nabla\,\{\nabla\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v})\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{b})\}\,\mathfrak{b} = \\ &= [\{\nabla\nabla\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v})\}\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{b}) + \nabla\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v})\,\nabla\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{b})]\,\mathfrak{b}\,, \end{aligned} \tag{112}$$

und ebenso:

$$(\nabla \circ\!\!- \nabla)\,\mathfrak{v} = [\{(\nabla \circ\!\!- \nabla)\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v})\}\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{b}) + \nabla\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{b})\,\nabla\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v})]\,\mathfrak{b}\,, \tag{113}$$

worin $\circ\!\!-$ das Zeichen der umgekehrten allgemeinen Multiplikation ist, und daher infolge (105):

$$\begin{aligned} d_\lambda \mathfrak{x}\, d_\mu \mathfrak{x}^2 2(\nabla \times \nabla)\,\mathfrak{v} &= d_\lambda \mathfrak{x}\, d_\mu \mathfrak{x}^2\{\nabla(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{b})\nabla(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v}) - \nabla(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v})\circ \\ \circ\,\nabla(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{b})\}\,\mathfrak{b} &= \{d_\mu(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{b})\, d_\lambda(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v}) - d_\lambda(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{b})\, d_\mu(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v})\}\,\mathfrak{b} = D_{\lambda\mu}\,\mathfrak{v}. \end{aligned} \tag{114}$$

In einfacherer Weise ergiebt sich allgemein:

$$\begin{aligned} d_\lambda \mathfrak{x}\, d_\mu \mathfrak{x}^2 \nabla\nabla\ \overset{p}{\mathfrak{v}} = d_\lambda \mathfrak{x}^1 d_\mu \nabla\ \overset{p}{\mathfrak{v}} &= d_\mu(d_\lambda \mathfrak{x}^1 \nabla\ \overset{p}{\mathfrak{v}}) - d_\mu d_\lambda \mathfrak{x}^1 \nabla\ \overset{p}{\mathfrak{v}} = \\ &= d_\mu d_\lambda\ \overset{p}{\mathfrak{v}} - d_\mu d_\lambda \mathfrak{x}^1 \nabla\ \overset{p}{\mathfrak{v}}, \end{aligned} \tag{115}$$

$$d_\lambda \mathfrak{x}\, d_\mu \mathfrak{x}^2 (\nabla \circ\!\!- \nabla)\ \overset{p}{\mathfrak{v}} = d_\lambda d_\mu\ \overset{p}{\mathfrak{v}} - d_\lambda d_\mu \mathfrak{x}^1 \nabla\ \overset{p}{\mathfrak{v}}, \tag{116}$$

woraus durch Subtraktion unter Berücksichtigung von (103) und bei Einführung des Zeichens ${}_2\nabla$ für $2\nabla \times \nabla$ hervorgeht:

[1]) 17.5 S. 203.

$$(117) \qquad d_\lambda \mathfrak{x}\, d_\mu \mathfrak{x} \overset{2}{:} {}_2\nabla \overset{p}{\mathfrak{v}} = D_{\lambda\mu} \overset{p}{\mathfrak{v}}.$$

Anwendung auf $\mathfrak{a}^2$ ergiebt:

$$(118) \qquad (D_{\lambda\mu}\mathfrak{a})\,\mathfrak{a} = d_\lambda \mathfrak{x}\, d_\mu \mathfrak{x} \overset{2}{:} ({}_2\nabla \mathfrak{a})\,\mathfrak{a}.$$

Der Affinor vierter Hauptordnung:

$$(119) \qquad \overset{4}{\mathfrak{K}} = ({}_2\nabla \mathfrak{a})\,\mathfrak{a}$$

ist also die gesuchte Grösze, da infolge:

$$(120) \quad {}_2\nabla \mathfrak{v} = {}_2\nabla \{(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{v})\,\mathfrak{a}\} = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{v})\,{}_2\nabla \mathfrak{a} = \{({}_2\nabla \mathfrak{a})\,\mathfrak{a}\} \overset{2}{:} \mathfrak{v}$$

$\nabla \times \nabla$ zusammen mit $\overset{4}{\mathfrak{K}}$ identisch Null wird.

Die Ungleichheit von $\nabla\nabla$ und $\nabla \circ\!\!- \nabla$ wird im Falle $\overset{4}{\mathfrak{K}} \neq 0$ offenbar dadurch hervorgerufen, dasz die Einheiten $\mathfrak{i}_j$ des rechten Faktors ∇ bei der zweiten Differentiation keine Konstanten sind. Ueberhaupt sind sämtliche in einem Produkt auftretenden Faktoren ∇ als wesentlich verschieden zu betrachten, solange $\overset{4}{\mathfrak{K}}$ nicht identisch Null ist. An Stelle von (I 109) treten also z.B. die Formeln:

$$\begin{aligned} \nabla \overset{1}{\rightharpoonup} (\nabla \overset{p}{\mathfrak{v}}) &= {}^1\!/_2\, {}_2\nabla \overset{p}{\mathfrak{v}} \\ (121) \qquad \nabla \overset{2}{\rightharpoonup} (\nabla \overset{1}{\rightharpoonup} \overset{p}{\mathfrak{v}}) &= {}^1\!/_2\, {}_2\nabla \overset{1}{\rightharpoonup} \overset{p}{\mathfrak{v}} \\ \nabla \overset{3}{\rightharpoonup} (\nabla \overset{2}{\rightharpoonup} \overset{p}{\mathfrak{v}}) &= {}^1\!/_2\, {}_2\nabla \overset{2}{\rightharpoonup} \overset{p}{\mathfrak{v}} \end{aligned}$$

Wird die wesentliche Verschiedenheit der nacheinander wirkenden Kerne ∇ beachtet, so bleiben die im vorigen Abschnitte dargestellten Regeln für die Behandlung dieser Kerne auch in dem komplizierteren Falle gültig.

Einige Formeln für Mehrfache Differentiationen.

Mit Hilfe des idealen Vektors $\mathfrak{a}$ können die auf S. 36 (I 109) nur angedeuteten Entwicklungen vollständig ausgeschrieben werden:

$$(122) \qquad {}_2\nabla \overset{p}{\mathfrak{v}} = \sum_j^{1\ldots p} ({}_2\nabla \mathfrak{v}_j) \overset{1}{:} \mathfrak{a}\, \mathfrak{v}_1 \ldots \mathfrak{v}_{j-1}\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{v}_{j+1} \ldots \mathfrak{v}_p,$$

$${}_2\nabla \overset{1}{\rightharpoonup} \overset{p}{\mathfrak{v}} = \sum_j^{1\ldots p} \{{}_2\nabla \mathfrak{v}_j) \overset{1}{:} \mathfrak{a}\} \overset{1}{\rightharpoonup} \mathfrak{v}_1 \ldots \mathfrak{v}_{j-1}\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{v}_{j+1} \ldots \mathfrak{v}_p,$$

$${}_2\nabla \overset{2}{\rightharpoonup} \overset{p}{\mathfrak{v}} = \sum_j^{1\ldots p} \{({}_2\nabla \mathfrak{v}_j) \overset{1}{:} \mathfrak{a}\} \overset{2}{\rightharpoonup} \mathfrak{v}_1 \ldots \mathfrak{v}_{j-1}\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{v}_{j+1} \ldots \mathfrak{v}_p.$$

Durch wiederholte Differentiation eines Skalars p entsteht:

$$(123)\quad dp\ ;\ \frac{dp}{d\mathbf{X}^1} = \nabla p = \mathbf{a}\,(\mathbf{a}\ .\ \nabla)p$$

$$d^2p\ ;\ \frac{d^2p}{d\mathbf{X}^{1^2}} = \{\nabla(\mathbf{a}\ .\ \nabla p)\}\mathbf{a} = \mathbf{b}\,\mathbf{a}\,(\mathbf{b}\ .\ \nabla)(\mathbf{a}\ .\ \nabla)p$$

$$d^3p\ ;\ \frac{d^3p}{d\mathbf{X}^{1^3}} = \mathbf{c}\,\mathbf{b}\,\mathbf{a}\,(\mathbf{c}\ .\ \nabla)(\mathbf{b}\ .\ \nabla)(\mathbf{a}\ .\ \nabla)p\ ^a)$$

etc.,

und durch wiederholte Differentiation eines Vektors:

$$(124)\quad d\mathbf{v} = \mathbf{a}\,d(\mathbf{a}\ .\ \mathbf{v})\ ;\ \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{X}^1} = \nabla\mathbf{v} = \mathbf{b}(\mathbf{b}\ .\nabla)\mathbf{v} = \mathbf{b}\mathbf{a}(\mathbf{b}\ .\nabla)(\mathbf{a}\ .\mathbf{v})$$

$$d^2\mathbf{v} = \mathbf{b}\,d\{(\mathbf{b}\ .\ \mathbf{a})d(\mathbf{a}\ .\mathbf{v})\};\ \frac{d^2\mathbf{v}}{d\mathbf{X}^{1^2}} = \nabla\nabla\mathbf{v} = \mathbf{c}\mathbf{b}(\mathbf{c}\ .\ \nabla)(\mathbf{b}\ .\nabla)\mathbf{v} =$$

$$= \mathbf{c}\,\mathbf{b}\,\mathbf{a}\,(\mathbf{c}\ .\ \nabla)(\mathbf{b}\ .\ \nabla)(\mathbf{a}\ .\ \mathbf{v})$$

$$d^3\mathbf{v} = \mathbf{c}\,d[(\mathbf{c}\ .\ \mathbf{b})d\{(\mathbf{b}\ .\ \mathbf{a})d(\mathbf{a}\ .\ \mathbf{v})\}];$$

$$\frac{d^3\mathbf{v}}{d\mathbf{X}^{1^3}} = \mathbf{d}\,\mathbf{c}\,\mathbf{b}\,\mathbf{a}\,(\mathbf{d}\ .\ \nabla)(\mathbf{c}\ .\ \nabla)(\mathbf{b}\ .\ \nabla)(\mathbf{a}\ .\ \mathbf{v}).$$

etc.

Linien-, Flächen-, Hyperflächen- und Raumintegrale.

Wir wollen nun zeigen, dasz der Satz:

$$(125)\qquad \int_\tau \dot{\nabla}\ .\ \mathbf{v}\,d\tau = \int_\omega \mathbf{n}\ .\ \mathbf{v}\,d\omega$$

(Gausz'scher Satz für vier Dimensionen, vgl. S. 38) auch für einen beliebigen Raum gilt. Dazu bilden wir zunächst das Integral:

$$(126)\qquad \int_\tau \frac{\partial p}{\partial x^a}\,d\tau = \iiiint \frac{\partial p}{\partial x^a}\,dx^a\,dx^b\,dx^c\,dx^d\sqrt{-g}$$

in der Annahme, dasz $\sqrt{-g} = 1$ ist und dasz die a-Linien die begrenzende Hyperfläche ω immer nur in zwei Punkten schneiden. Sind p_1 und p_2 die Werte von p in den Schnittpunkten einer a-Linie, und gehört p_1 zum grösztен Wert von x^a, so ist:

$$(127)\qquad \int_\tau \frac{\partial p}{\partial x^a}\,d\tau = \iiint dx^b\,dx^c\,dx^d\,(p_1 - p_2).$$

---

a) Nach (79) und (101).

Nun ist in einem Punkte der Hyperfläche ω mit einem höheren x^a Wert, nach der Voraussetzung auf S. 38:

$$(128) \qquad {}_3\mathfrak{m}\, d\omega = \mathfrak{e}_b' \widehat{\mathfrak{e}_c'}\, \mathfrak{e}_d'\, dx^b\, dx^c\, dx^d + \ldots.$$

da $\mathfrak{e}_a'$, $\mathfrak{e}_b'$, $\mathfrak{e}_c'$, $\mathfrak{e}_d'$ in dieser Reihenfolge den Hyperschraubsinn von $\mathbf{I}$ bestimmen. Ebenso ist in einem Punkte von τ mit einem niederen x^a Wert:

$$(129) \qquad {}_3\mathfrak{m}\, d\omega = -\mathfrak{e}'_b \widehat{\mathfrak{e}'_c}\, \mathfrak{e}'_d\, dx^b\, dx^c\, dx^d + \ldots.$$

Es ist also:

$$(130) \qquad \mathfrak{e}'_a \cdot {}_3\mathfrak{m}\, d\omega = \pm\, \mathfrak{e}'_a \widehat{\mathfrak{e}'_b}\, \mathfrak{e}'_c\, \mathfrak{e}'_d\, dx^b\, dx^c\, dx^d = \pm\, \mathbf{I}\, dx^b\, dx^c\, dx^d$$

und demzufolge:

$$(131) \qquad \int_\tau \frac{\partial p}{\partial x^a}\, d\tau = \mathbf{I} \int_\omega p\, \mathfrak{e}'_a \cdot {}_3\mathfrak{m}\, d\omega = \int_\omega p\, \mathfrak{e}'_a \cdot \mathfrak{n}\, d\omega.$$

Wird diese Formel auf die kontravarianten Bestimmungszahlen eines Vektors $\mathbf{v}$ angewandt:

$$(132) \qquad \int_\tau \frac{\partial v}{\partial x^a}\, d\tau = \int_\omega x^a\, \mathfrak{e}'_a \cdot \mathfrak{n}\, d\omega,$$

so ergiebt sich bei Summierung:

$$(133) \qquad \int_\tau \nabla \cdot \mathbf{v}\, d\tau = \int_\tau \mathfrak{n} \cdot \mathbf{v}\, d\omega.$$

Nun ist im allgemeinen $\sqrt{-g} \neq 1$, es lassen sich aber immer andere Urvariablen einführen, sodasz $\sqrt{-g} = 1$ wird. Das Resultat ist aber invariant und also von den eingeführten Urvariablen unabhängig. Auch schneiden die a-Linien im Allgemeinen ω in mehr als zwei Punkten. Dann kann aber τ immer so zerteilt werden, dasz die Bedingung für jedes Teilgebiet gilt. Die Integrale über die gemeinschaftlichen Begrenzungshyperflächen heben sich dann bei der nachfolgenden Summierung in bekannter Weise auf. Der Beweis ist also auch für den allgemeinsten Fall geliefert.

In ähnlicher Weise wird bewiesen:

$$(134) \qquad \int_s d\mathbf{s} \cdot \mathbf{v} = -2 \int_\sigma {}_2\mathbf{f}^2 \cdot (\nabla \times \mathbf{v})\, d\sigma = -\int_\sigma {}_2\mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})\, d\sigma$$

und:

$$(135) \qquad \int_\sigma {}_2\mathbf{f} \cdot {}_2\mathbf{v}\, d\sigma = \int_\omega ({}_3\mathfrak{m} \times \nabla) \cdot {}_2\mathbf{v}\, d\omega = -\mathbf{I} \int_\omega (\mathfrak{n} \times \nabla) \cdot {}_2\mathbf{v}\, d\omega$$

Die allgemeineren Formeln (I 111), (I 114), (I 117) gelten aber

nicht mehr, da wohl Skalare in verschiedenen Punkten vergleichbar und zusammenzählbar sind, höhere Grösen aber nicht. (I 117) korrespondiert mit dem STOKES'schen Satz im dreidimensionalen Raum. Für einen allgemeinen dreidimensionalen Raum ist dieser Satz zuerst bewiesen von RICCI.[1]) Aus (133) läszt sich in einfacher Weise ein Satz ableiten, welcher LORENTZ[2]) seinen Betrachtungen zu Grunde gelegt hat. Nach (I 57*a*), (I 68) und (133) ist nämlich:

$$(136)\qquad \int_{\omega} ({}_2\mathbf{M} \overset{1}{.} \mathbf{n}) \,.\, \mathbf{e}_\lambda \, d\omega = -\int_{\omega} \mathbf{n} \,.\, ({}_2\mathbf{M} \overset{1}{.} \mathbf{e}_\lambda)\, d\omega = -\int_{\tau} \nabla \,.\, ({}_2\mathbf{M} \overset{1}{.} \mathbf{e}_\lambda) d\tau,$$

während nach (I 107*b*):

$$(137)\qquad \nabla \,.\, ({}_2\mathbf{M} \overset{1}{.} \mathbf{e}_\lambda) = (\nabla \overset{1}{.} {}_2\mathbf{M}) \,.\, \mathbf{e}_\lambda - (\nabla \times \mathbf{e}_\lambda) \overset{2}{.} {}_2\mathbf{M} = (\nabla \overset{1}{.} {}_2\mathbf{M}) \,.\, \mathbf{e}_\lambda,$$

da $\nabla \times \mathbf{e}_\lambda$ nach (84) identisch Null ist. Es geht daraus der bewuszte Satz hervor:

$$(138)\qquad \int_{\omega} ({}_2\mathbf{M} \overset{1}{.} \mathbf{n}) \,.\, \mathbf{e}_\lambda \, d\omega = -\int_{\tau} (\nabla \overset{1}{.} {}_2\mathbf{M}) \,.\, \mathbf{e}_\lambda \, d\tau.$$

Die Integrale enthalten die Einheit $\mathbf{e}_\lambda$ und stellen also keine invarianten Grösen dar.

Eigenschaften besonderer Orthogonalnetze.

Für jedes Orthogonalnetz gilt, wie oben gezeigt wurde:

$$(139)\qquad a_{jl}\, a_k = -\, a_j\, a_{kl}.$$

Ist die Hyperkongruenz j überall normal auf eine Hyperflächenschaar, so kann für $\mathbf{i}_j$ geschrieben werden

$$(140)\qquad \mathbf{i}_j = q \nabla p,$$

wo q und p Funktionen der x^λ sind. Es ist dann:

$$(141)\qquad \nabla \mathbf{i}_j = \nabla q \nabla p + q \nabla^2 p$$

eine in allen Indizes $k, h \neq j$ symmetrische Grösze, da $\nabla^2 p$ symmetrisch ist und ∇p die Richtung von $\mathbf{i}_j$ hat. Demzufolge ist:

$$(142)\qquad \mathbf{i}_k \mathbf{i}_h \overset{2}{.} \nabla \mathbf{i}_j = \mathbf{i}_h \mathbf{i}_k \overset{2}{.} \nabla \mathbf{i}_j.$$

oder:

$$(143)\qquad a_h\, a_{jk} = a_k\, a_{jh}.$$

Sind sämtliche Hyperkongruenzen eines Orthogonalnetzes flächennormal, so bildet das Netz ein *Normalsystem*. Wird zu den Kurven

[1]) 97.1.
[2]) 16.4 S. 1401.

und Hyperflächen einer flächennormalen Hyperkongruenz eine Urvariable x^λ gewählt, so ist:

$$\mathfrak{e}_\lambda' = q \nabla p \ , \ \mathfrak{e}_\lambda' \,.\, \mathfrak{e}_\mu' = 0 \ , \ \lambda \neq \mu. \tag{144}$$

In derselben Weise wie oben wird dann gezeigt:

$$a_\mu \, a_{\lambda\nu} = a_\nu \, a_{\lambda\mu} \quad , \quad \mu, \nu \neq \lambda, \tag{145}$$

und ebenso:

$$a_\mu \, a_\nu^\lambda = a_\nu \, a_\mu^\lambda \quad , \quad \mu, \nu \neq \lambda. \tag{146}$$

Sind sämtliche Kurven einer Hyperkongruenz j geodätisch, so ist nach (42):

$$a_k \, a_{jl} = - a_{kj} \, a_l = 0. \tag{147}$$

Wird zu den Kurven einer geodätischen und zu einer bestimmten Hyperfläche normalen Hyperkongruenz eine Urvariable x^λ gewählt so dass $x^\lambda = 0$ die Gleichung der Hyperfläche ist, so ist auf dieser Fläche:

$$dx^\lambda \, \mathfrak{e}_\lambda' \vdots \nabla \frac{\mathfrak{e}_\mu'}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}} = 0 \ , \ \mathfrak{e}_\lambda' \,.\, \mathfrak{e}_\mu' = 0 \ , \ \lambda \neq \mu, \tag{148}$$

und daraus folgt:

$$a_{\lambda\lambda} \, a_\mu = a_{\lambda\lambda} \, a^\mu = 0 \ , \ \lambda \neq \mu. \tag{149}$$

Wird für Urvariable x^λ die von der Hyperfläche $x^\lambda = 0$ aus gemessene Länge der Kurven λ gewählt, so ist $g_{\lambda\lambda} = 1$ und demzufolge:

$$\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\lambda} = a_{\lambda\lambda} \, a_\mu + a_\lambda \, a_{\mu\lambda} = 0 + a_\lambda \, a_{\lambda\mu} = {}^1/_2 \frac{\partial g_{\lambda\lambda}}{\partial x^\mu} = 0. \tag{149}$$

Da aber die $g_{\lambda\mu}$, $\lambda \neq \mu$ auf der Hyperfläche $x^\lambda = 0$ Null sind, sind sie stets Null, und die Hyperflächen von x^λ sind daher überall normal auf die gegebene Hyperkongruenz. Daraus folgt der Satz:

Bilden die Parameterlinien einer Urvariablen eine geodätische und normale Hyperkongruenz, und fallen die Parameterhyperflächen mit den normalen Hyperflächen dieser Hyperkongruenz zusammen, so bleiben die Parameterhyperflächen erhalten, wenn man diese Urvariable durch die entlang der Parameterlinie von einer bestimmten Parameterhyperfläche aus gemessene Bogenlänge ersetzt. a)

a) Ist überdies $\nabla \, \mathfrak{e}'_\lambda = 0$, d. h. geht die Richtung der Tangente an einer λ-Kurve durch geodätische Bewegung stets wieder in eine solche Richtung über, so ist:

$$\mathfrak{e}_\mu' \, \mathfrak{e}_\nu' \vdots \nabla \, \mathfrak{e}_\lambda' = \mathfrak{e}_\mu' \, \mathfrak{e}_\nu' \vdots \nabla \, (\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{e}_\lambda') \, \mathfrak{a} = a_\mu \, a_{\lambda\nu} = 0,$$

und infolgedessen:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = a_{\lambda\mu} \, a_\nu + a_\mu \, a_{\lambda\nu} = 0.$$

Das Linienelement läszt sich also schreiben: $ds^2 = x^{\lambda\,2} + \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \, x^\mu \, x^\nu$, in welcher Formel μ und ν über alle Indizes auszer λ zu summieren sind und $g_{\mu\nu}$ von x^λ unabhängig ist.

Der Riemann-Christoffel'sche Affinor $G_{\varkappa\lambda\mu\nu}$.

Ist ein Vektor $\mathfrak{v}$ als stetige Funktion der Urvariablen x^λ gegeben, so nennen wir die Aenderung dieses Vektors beim Fortschreiten längs einer Kurve s, beurteilt von einem geodätisch mitbewegten Koordinatensystem aus, die *geodätische* Aenderung von $\mathfrak{v}$ in Bezug auf s. Diese Aenderung von A bis B ist offenbar das Integral des geodätischen Differentials:

$$\int_A^B d\mathfrak{v}$$

Ist s geschlossen, so sind im Allgemeinen die beiden zu den zwei verschiedenen möglichen Wegen von A nach B gehörigen geodätischen Aenderungen nicht gleich:

$$\int_{\searrow A}^{B} d\mathfrak{v} \neq \int_{\nearrow A}^{B} d\mathfrak{v} \tag{151}$$

Sind sie für irgend eine Wahl der Punkte A und B auf der Kurve gleich, so sind sie es für jede Wahl, und das Integral von $d\mathfrak{v}$ über die geschlossene Kurve verschwindet. Verschwindet dieses Integral für jeden Vektor $\mathfrak{v}$, so nennen wir die Kurve *eindeutig orientiert*. Jede geschlossene *geodätische* Linie auf einer Fläche ist offenbar dieser Art. Wird durch eine geschlossene Kurve eine Fläche gelegt, und das Flächenstück in beliebige Teile zerlegt, so ist die Kurve offenbar eindeutig orientiert, wenn sämtliche Begrenzungskurven der Flächenteile es sind.

Wir betrachten also zunächst ein Flächenelement mit den vier Eckpunkten x^λ, $x^\lambda + d_1 x^\lambda$, $x^\lambda + d_1 x^\lambda + d_2 x^\lambda$, $x^\lambda + d_2 x^\lambda$, $\lambda = a, \ldots, d$. Das Integral von $d\mathfrak{v}$ vom ersten bis zum dritten Eckpunkt ist über die eine Seite:

$$d_1 \mathfrak{v} + d_2 \mathfrak{v} + d_2 d_1 \mathfrak{v}$$

und über die andere Seite:

$$d_2 \mathfrak{v} + d_1 \mathfrak{v} + d_1 d_2 \mathfrak{v}$$

Die beiden Endstellungen unterscheiden sich also um:

$$\begin{aligned} D_{12}\mathfrak{v} &= d_1 \mathfrak{x}'\, d_2 \mathfrak{x}' \overset{2}{:} {}_2\nabla\, \mathfrak{v}^{a)} = \\ &= d_1 \mathfrak{x}'\, d_2 \mathfrak{x}' \overset{2}{:} ({}_2\nabla\, \mathfrak{a})\,(\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{v})^{b)} \\ &= d_1 \mathfrak{x}' \times d_2 \mathfrak{x}' \overset{2}{:} \overset{4}{\mathfrak{K}} \overset{1}{:} \mathfrak{v}^{c)} \\ &= {}_2\mathfrak{f} \overset{2}{:} \overset{4}{\mathfrak{K}} \overset{1}{:} \mathfrak{v}\, d\sigma, \end{aligned} \tag{152}$$

a) Nach (117).
b) Nach (120).
c) Nach (119) und (I 56).

und diese Grösze ist unabhängig von $\mathfrak{v}$ Null, wenn $\overset{4}{\mathbf{K}}$ Null ist. Ist $\overset{4}{\mathbf{K}}$ überall Null, so ist demnach jede infinitesimale und infolgedessen auch jede endliche geschlossene Kurve in X_4 eindeutig orientiert.[a]) Das geodätisch mitbewegte Koordinatensystem hat dann bei der Rückkehr im Punkte A stets wieder die Anfangsstellung, unabhängig von der Wahl von s, und es giebt infolgedessen zu jedem Koordinatensystem in A in jedem Punkte von X_4 ein einziges korrespondierendes Koordinatensystem. Für das durch diese Koordinatensysteme gegebene Orthogonalnetz gilt:

$$d\,\mathbf{i}_j = 0 \qquad j = 1, \ldots, 4, \tag{153}$$

und jede Hyperkongruenz des Netzes ist also geodätisch. Da ebenso:

$$\nabla\,\mathbf{i}_j = (\nabla\, a_j)\,\mathbf{a} = 0, \tag{154}$$

ist allgemein:

$$a_h\, a_{jk} = 0 \quad , \quad h, j, k = 1, \ldots, 4, \tag{155}$$

und jede Hyperkongruenz ist also auch normal. Als Urvariablen können demnach nach S. 63 die von einem bestimmten Satz von 4 Hyperflächen aus gemessenen Bogenlängen der Parameterlinien verwendet werden, und es wird dann

$$g_{\mu\mu} = 1 \quad , \quad g_{\mu\nu} = 0 \qquad \mu, \nu = a, \ldots, d \tag{156}$$

und infolgedessen:

$$ds = \sqrt{dx^{a^2} + \ldots + dx^{d^2}}. \tag{157}$$

Die Vektoren $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}'$ und $\mathbf{i}$ werden gleich, es besteht in X_4 eine euklidische Maszbestimmung, und sämtliche Formeln gehen zurück auf die Formeln des vorigen Abschnittes.

$\overset{4}{\mathbf{K}}$ ist der Riemann-Christoffel'sche Affinor. Denn, nach (119) ist

$$\overset{4}{\mathbf{K}} = ({}_2\nabla\,\mathbf{b})\,\mathbf{b} = 2\,\{\nabla\,(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{c}) \times \nabla\,(\mathbf{b}\,.\,\mathbf{c})\}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}, \tag{158}$$

oder, wenn zur grösseren Allgemeinheit kovariante und kontravariante Vektoren verwendet werden:

$$\overset{4}{\mathbf{K}} = ({}_2\nabla\,\mathbf{b})\,\mathbf{b} = 2\,\{\nabla\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}') \times \nabla\,(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}')\}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}. \tag{159}$$

Der Riemann-Christoffel'sche Affinor:

$$G_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}(a_\lambda a_{\kappa\mu}) - \frac{\partial}{\partial x^\mu}(a_\lambda a_{\kappa\nu}) - \sum_\omega \{a_\omega a_{\kappa\mu} b^\omega b_{\lambda\nu} - a_\omega a_{\kappa\nu} b^\omega b_{\lambda\mu}\} \tag{160}$$

---

a) Dieser Beweis ist nicht streng, da auch mit infinitesimalen Flächenteilen von anderer Gestalt Rechnung gehalten werden müszte. Der Kürze wegen ist von einem strengen Beweis Abstand genommen.

kann aber in die Form:

$$[2\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\{\nabla(\mathbf{a}\wedge\mathbf{c}')\times\nabla(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}')\}]_{\kappa\lambda\mu\nu}$$

gebracht werden, und es ist also:

(161) $$G_{\kappa\lambda\mu\nu}=\overset{4}{K}_{\mu\nu\kappa\lambda}.$$

Da aber bekanntlich:

(162) $$G_{\kappa\lambda\mu\nu}=G_{\mu\nu\kappa\lambda}$$

ist $\overset{4}{\mathbf{K}}$ mit dem Riemann-Christoffel'schen Affinor identisch. Aus $\overset{4}{\mathbf{K}}$ entsteht durch Faltung nach dem zweiten und dritten Faktor ein Tensor zweiten Hauptranges:

(163) $$^2\mathbf{K}=({}_2\nabla\,{}^1\,\mathbf{a})\,\mathbf{a},$$

oder mit Verwendung von kontravarianten Vektoren:

(164) $$^2\mathbf{K}=\nabla(\mathbf{a}\wedge\mathbf{c}')\mathbf{b}\{\nabla(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}')\wedge\mathbf{a}'\}-\nabla(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}')\mathbf{b}\{\nabla(\mathbf{a}\wedge\mathbf{c}')\wedge\mathbf{a}'\}=$$
$$=(\nabla\,\mathbf{c}')\,{}^1\,(\nabla\,\mathbf{c})-(\nabla\,\mathbf{c})\,(\nabla\wedge\mathbf{c}'),$$

und durch nochmalige Faltung:

(165) $$K=({}_2\nabla\,{}^1\,\mathbf{a})\,.\,\mathbf{a},$$

oder mit Verwendung von kontravarianten Vektoren:

(166) $$K=\{\nabla(\mathbf{a}\wedge\mathbf{c}')\wedge\mathbf{b}'\}\{\nabla(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}')\wedge\mathbf{a}'\}-\{\nabla(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}')\wedge\mathbf{b}'\}\{\nabla(\mathbf{a}\wedge\mathbf{c}')\wedge\mathbf{a}'\}=$$
$$=\nabla\,\mathbf{c}'\,{}^2\,\nabla\,\mathbf{c}'-(\nabla\wedge\mathbf{c}')\,(\nabla\wedge\mathbf{c})'.$$

Der Skalarteil von $^2\mathbf{K}$ ist:

$$\tfrac{1}{4}\,K\,{}^2\mathbf{g}$$

und der Deviatorteil:

$$^2\mathbf{K}-\tfrac{1}{4}\,K\,{}^2\mathbf{g}.$$

Für den Tensor:

(167) $$^2\mathbf{G}=\,^2\mathbf{K}-{}^1/_2\,K\,{}^2\mathbf{g},$$

der denselben Deviatorteil hat als $^2\mathbf{K}$, aber einen Skalarteil mit entgegengesetztem Vorzeichen, gilt bekanntlich die wichtige Identität:

(168) $$\nabla\,{}^1\,{}^2\mathbf{G}=0.$$ a)

a) Tabelle der Bezeichnungen bei einigen Autoren:

	Einstein	Lorentz	Hilbert	Herglotz	Bianchi.
$\overset{4}{\mathbf{K}}$	$g_{\sigma\tau}\,B^{\tau}{}_{\rho\mu\nu}$	$G_{\mu\nu\rho\sigma}$		$K_{\mu\nu\rho\sigma}$	$(\mu\nu,\,\rho\sigma)$
$^2\mathbf{K}$	$B_{\mu\nu}$	$G_{\mu\nu}$	$K_{\mu\nu}$	$-K_{\mu\nu}$	
$^2\mathbf{G}$		$-G_{\mu\nu}$	$-\frac{1}{\sqrt{g}}[\sqrt{g}\,K]_{\mu\nu}$	$G_{\mu\nu}$	
K			K	$-K$	$-{}^1/_2\,K$

Die geometrische Bedeutung von $\overset{4}{\mathbf{K}}$.

Der Affinor $\overset{4}{\mathbf{K}}$ ist ein Bivektortensor, und kann also als Potenz eines idealen Bivektors geschrieben werden:

$$\overset{4}{\mathbf{K}} = {}_2\mathbf{k}\,{}_2\mathbf{k} \tag{169}$$

Geometrisch stellt $\overset{4}{\mathbf{K}}$ eine lineare homogene Transformation von Bivektoren dar. Das Flächenelement ${}_2\mathbf{f}\,d\sigma$ geht vermöge dieser Transformation über in den Bivektor:

$${}_2\mathbf{F}\,d\sigma = ({}_2\mathbf{f} \vdots {}_2\mathbf{k})\,{}_2\mathbf{k}\,d\sigma \tag{170}$$

und ein Vektor $\mathbf{v}$ erfährt nach (152) bei der Bewegung der Randkurve entlang in Bezug auf das geodätisch mitbewegte Bezugssystem nach einem Umlauf die Aenderung:

$$\delta\,\mathbf{v} = {}_2\mathbf{F}\,d\sigma \vdots \mathbf{v}. \tag{171}$$

Im allgemeinen ist ${}_2\mathbf{F}$ ein zusammengesetzter Bivektor und die relative Bewegung von $\mathbf{v}$ ist also eine allgemeine Drehung, um zwei Ebenen, die vollständig senkrecht auf einander stehen. Wird ${}_2\mathbf{F}$ in zwei gegenseitig vollständig senkrechte einfache Bivektoren zerlegt, so sind die Ebenen der Drehung die Ebenen dieser Bivektoren. (Vergl. S. 20 und 21) Stellt aber $\overset{4}{\mathbf{K}}$ eine Transformation dar, die einfache Bivektoren wieder in einfache überführt, so ist ${}_2\mathbf{F}$ ein einfacher Bivektor, und die Bewegung ist eine Drehung parallel der Ebene von ${}_2\mathbf{F}$, bei der alle Richtungen, die senkrecht auf ${}_2\mathbf{F}$ stehen, in Ruhe bleiben. In diesem Falle gehört die Bivektortransformation zu einer Vektortransformation, und es existiert also ein realer Tensor $\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{q}^2$, so dasz:

$$\overset{4}{\mathbf{K}} = \pm\,(\mathfrak{p} \times \mathfrak{q})\,(\mathfrak{p} \times \mathfrak{q}). \text{ [a]} \tag{172}$$

Die geometrische Bedeutung von K.

Wir betrachten einen beliebigen singularitätenfreien Flächenteil σ und ihre Randkurve s. Ueber die Mannigfaltigkeit X_4 werde ein

---

a) Vergl. S. 21. Die Existenz dieses Tensors wird auch gefordert, wenn es möglich sein soll die Mannigfaltigkeit X_4 in einen euklidischen fünfdimensionalen Raum ein zu betten. (Vergl. S. 74) Die Dimensionenzahl des kleinsten umfassenden euklidischen Raumes wird durch die Bewegungen des Kompaszkörpers vollständig bestimmt ist. Es gilt der an anderer Stelle [1]) bewiesene Satz: Die Dimensionenzahl des euklidischen Raumes, in welchem eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Änderung ihrer Maszverhältnisse untergebracht werden kann, ist höchstens der um n vermehrten Anzahl der „Freiheitsgrade" des Kompaszkörpers gleich.

[1]) 18. 2.

Orthogonalnetz $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$, $\mathbf{i}_4$, ausgebreitet, sodasz σ mit einer 1, 2-Fläche zusammenfällt. Beim Fortschreiten entlang der Differentialstrecke $d\mathbf{s}$ dreht sich $\mathbf{i}_1$ in Bezug auf das geodätisch mitbewegte Bezugssystem, und die geodätische Aenderung von $\mathbf{i}_1$ beträgt:

$$d\mathbf{i}_1 = d\mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{i}_1. \tag{173}$$

Der Vektor $d\mathbf{i}_1$ liegt im allgemeinen nicht im 1, 2-Büschel, seine Projektion auf die 1, 2-Flächenrichtung hat aber die Richtung von $\mathbf{i}_2$ und ist gleich $\mathbf{i}_2$ multipliziert mit

$$\mathbf{i}_2 \,.\, (d\mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{i}_1) = \mathbf{i}_2 \, d\mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{i}_1 : \tag{174}$$

Dieser Ausdruck stellt also die Projektion des Winkels zwischen $\mathbf{i}_1$ und $\mathbf{i}_1 + d\mathbf{i}_1$ auf $d\sigma$ dar. Wir nennen diese Projektion die *auf σ projektierte geodätische Drehung* bei der Verrückung $d\mathbf{s}$. Von der näheren Wahl von $\mathbf{i}_1$ und $\mathbf{i}_2$ ist sie nur scheinbar abhängig. Denn für das gedrehte System $\mathbf{i}_j + d\mathbf{i}_j$ lässt sich nach (I 48) stets schreiben:

$$\mathbf{i}_j + d\mathbf{i}_j = \mathbf{i}_j + \mathbf{i}_j \cdot ({}_2\mathbf{V}\, d\Phi + {}_2\mathbf{W}\, d\Psi) \quad , j = 1, \ldots, 4, \tag{175}$$

worin ${}_2\mathbf{V}\, d\Phi + {}_2\mathbf{W}\, d\Psi$ der Bivektor der infinitesimalen Drehung ist. Die projektierte geodätische Drehung ist dann gleich:

$$\mathbf{i}_2 \,.\, \{\mathbf{i}_1 \cdot ({}_2\mathbf{V}\, d\Phi + {}_2\mathbf{W}\, d\Psi)\} = (\mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_1) \cdot ({}_2\mathbf{V}\, d\Phi + {}_2\mathbf{W}\, d\Psi), \tag{176}$$

und dieser Ausdruck ist nur von $\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2$, also nur von der Flächenrichtung von $d\sigma$, abhängig. Das Integral der projektierten geodätischen Drehung über s ist:

$$\int_s \mathbf{i}_2 \, d\mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{i}_1 = \int_s d\mathbf{s} \,.\, \{(\nabla \mathbf{i}_1) \cdot \mathbf{i}_2\} = -\int_s d\mathbf{s} \,.\, \{(\nabla \mathbf{i}_2) \cdot \mathbf{i}_1\} \tag{177}$$

oder nach dem erweiterten Stokes'schen Satz (134):

$$\begin{aligned} \int \mathbf{i}_2 \, d\mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{i}_1 &= -2 \int {}_2\mathbf{f} \cdot \nabla \times \{(\nabla \mathbf{i}_1) \cdot \mathbf{i}_2\}\, d\sigma = \\ &= -\int {}_2\mathbf{f} \cdot \overset{4}{\mathbf{K}} \cdot (\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2)\, d\sigma + {}_2\mathbf{f} \cdot \{(\nabla \mathbf{i}_2) \cdot \mathbf{a}\, (\nabla \mathbf{i}_1) \cdot \mathbf{a} - \\ &\qquad - (\nabla \mathbf{i}_1) \cdot \mathbf{a}\, (\nabla \mathbf{i}_2) \cdot \mathbf{a}\}\, d\sigma \end{aligned} \tag{178}$$

Nun ist ${}_2\mathbf{f} = \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2$ und es ist also:

$$\begin{aligned} \int_s \mathbf{i}_2 \, d\mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{i}_1 = -\int_\sigma \overset{4}{\mathbf{K}} \cdot {}_2\mathbf{f}\, {}_2\mathbf{f}\, d\sigma + \{&(\mathbf{i}_2 \cdot \nabla \mathbf{i}_2).(\mathbf{i}_1 \cdot \nabla \mathbf{i}_1) - \\ &- (\mathbf{i}_1 \cdot \nabla \mathbf{i}_2).(\mathbf{i}_2 \cdot \nabla \mathbf{i}_1)\}\, d\sigma. \end{aligned} \tag{179}$$

$\overset{4}{\mathbf{K}} \cdot {}_2\mathbf{f}\, {}_2\mathbf{f}$ ist die Riemann'sche Krümmung des geometrischen Ortes der geodätischen Linien, welche die Fläche σ im betrachteten Punkte

berühren, oder, wie wir kurz sagen wollen, die *erzwungene Krümmung* von σ. Dagegen nennen wir $(\mathbf{i}_2 \overset{1}{!} \nabla \mathbf{i}_2).(\mathbf{i}^1 \overset{1}{!} \nabla \mathbf{i}_1) - (\mathbf{i}_1 \overset{1}{!} \nabla \mathbf{i}_2).(\mathbf{i}_2 \overset{1}{!} \nabla \mathbf{i}_1)$ die *Eigenkrümmung* von σ. Es ergiebt sich also der Satz:

Das Linienintegral der auf einen singularitätenfreien Flächenteil σ projektierten geodätischen Drehung über die Randkurve s ist dem negativen Flächenintegral der Summe der erzwungenen Krümmung und der Eigenkrümmung von σ über s gleich.

Die Summe der erzwungenen Krümmung und der Eigenkrümmung ist die totale Krümmung oder Krümmung im gewöhnlichen Sinne von σ als zweidimensionale Mannigfaltigkeit für sich betrachtet. Die projektierte geodätische Drehung ist der gewöhnlichen geodätischen Drehung in dieser Mannigfaltigkeit gleich.

Erzeugt geodätische Bewegung der Flächenrichtung von σ entlang σ stets nur zu σ gehörige Flächenrichtungen, so fehlen in den letzten Faktoren von $\nabla \mathbf{i}_1$ und $\nabla \mathbf{i}_2$ die Einheiten $\mathbf{i}_3$ und $\mathbf{i}_4$[a]). Die Eigenkrümmung wird dann Null, und die Fläche ist geodätisch [1]). Wird dagegen $\overset{4}{\mathbf{K}} = 0$, so verschwindet die erzwungene Krümmung.

In einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit X_2 geht die projektierte geodätische Drehung über in die gewöhnliche geodätische Drehung, und da allgemein:

$$(180)\quad \overset{4}{\mathbf{K}}\,\overset{4}{!}\,\mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_2\,\mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_2 = -\overset{4}{\mathbf{K}}\,\overset{4}{!}\,\mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_2\,\mathbf{i}_2\,\mathbf{i}_1 = -\overset{4}{\mathbf{K}}\,\overset{4}{!}\,\mathbf{i}_2\,\mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_2 = \overset{4}{\mathbf{K}}\,\overset{4}{!}\,\mathbf{i}_2\,\mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_2\,\mathbf{i}_1$$
$$\overset{4}{\mathbf{K}}\,\overset{4}{!}\,\mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_1 = \overset{4}{\mathbf{K}}\,\overset{4}{!}\,\mathbf{i}_2\,\mathbf{i}_2\,\mathbf{i}_2\,\mathbf{i}_2 = 0,$$

geht die Grösze $\overset{4}{\mathbf{K}}\,\overset{4}{!}\,{}_2\mathbf{f}\,{}_2\mathbf{f}$ über in:

$$(181)\quad \overset{4}{\mathbf{K}}\,\overset{4}{!}\,\mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_2\,\mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_2 = -\tfrac{1}{2}\,\overset{4}{\mathbf{K}}\,\overset{4}{!}\,(\mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_2\,\mathbf{i}_2\,\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2\,\mathbf{i}_2\,\mathbf{i}_2\,\mathbf{i}_2 +$$
$$+ \mathbf{i}_2\,\mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_1\,\mathbf{i}_2) = -\tfrac{1}{2}\,\overset{4}{\mathbf{K}}\,\overset{4}{!}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{b}\,\mathbf{a} = -\tfrac{1}{2}\,K.$$

Hier gilt also der erweiterte Bonnet'sche Satz:

Die totale Drehung des geodätisch mitbewegten Bezugssystems beim Durchlaufen einer geschlossenen Kurve s, die keine singulären Stellen einschlieszt, ist (dem negativen Linienintegral der geodätischen Drehung über s und) dem Oberflächenintegral der Krümmung $-\frac{1}{2}K$ über den von s begrenzten Flächenteil gleich. Die Drehung gilt als positiv, wenn ihr Sinn mit dem Umlaufssinn entlang s übereinstimmt.

---

a) Kehren die Flächenrichtungen von σ bei jeder beliebigen geodätischen Bewegung nur in sich selbst zurück, so hat der Kompaszkörper nur noch zwei „Freiheitsgrade" (vgl S. 67) und X_4 kann dann jedenfalls in eine sechsdimensionale euklidische Mannigfaltigkeit untergebracht werden.

[1]) 18. 2 S. 19.

Die Abbildung 5 auf S. 48 zeigt die Bewegung des Kompaszkörpers beim Durchlaufen eines Kreises auf einer Kugel. Nebenstehende Abbildung 6 zeigt die Bewegung beim Durchlaufen eines geschlossenen Weges auf einer pseudosphärischen Fläche und auf einem hyperbolischen Paraboloid. Der Richtungssinn der Drehung ist auf diesen negativ gekrümmten Flächen in der Tat dem Umlaufsinn entgegengesetzt.

Abb. 6. Bewegung des geodätisch bewegten Bezugssystems auf einem hyperbolischen Paraboloid und auf einer pseudosphärischen Fläche.

Bei Einführung der zu den Urvariablen x^a, x^b gehörigen Einheiten $\mathbf{e}_a'$, $\mathbf{e}_b'$ resultiert der bekannte Ausdruck für die Krümmung:

$$(182)\quad -\tfrac{1}{2}K = \frac{\overset{4}{\mathbf{K}}{}^4(\mathbf{e}_a' \times \mathbf{e}_b')(\mathbf{e}_a' \times \mathbf{e}_b')}{-(\mathbf{e}_a' \times \mathbf{e}_b')^2} = \frac{\overset{4}{\mathbf{K}}{}^4(\mathbf{e}_a' \times \mathbf{e}_b')(\mathbf{e}_a' \times \mathbf{e}_b')}{\mathbf{e}_a'^2 \cdot \mathbf{e}_b'^2 - (\mathbf{e}_a' \cdot \mathbf{e}_b')^2} = \frac{\overset{4}{K}_{ba\,ba}}{g_{aa}g_{bb} - g_{ab}^2}.$$

Wählt man in einem Punkte von X_4 vier senkrechte Richtungen $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4$ so besteht für jede der sechs Riemann'schen Krümmungen der durch diese Richtungen bestimmten Flächenrichtungen ein Ausdruck der Form (vergl. (181)):

$$-\tfrac{1}{2}\overset{4}{\mathbf{K}}{}^4(\mathbf{i}_j\mathbf{i}_k\mathbf{i}_k\mathbf{i}_j + \mathbf{i}\,\mathbf{i}_j\mathbf{i}_j\mathbf{i}_j + \mathbf{i}_k\mathbf{i}_k\mathbf{i}_k\mathbf{i}_k + \mathbf{i}_k\mathbf{i}_j\mathbf{i}_j\mathbf{i}_k)$$

Die Summe dieser Krümmungen ist also gleich:

$$(183) \qquad -\tfrac{1}{2}\overset{4}{\mathbf{K}}{}^{4}\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{b}\,\mathbf{a} = -\tfrac{1}{2}K$$

und infolgedessen unabhängig von der näheren Wahl der vier Richtungen. $-{}^{1}/_{12}\,K$ ist die mittlere Krümmung der Flächenrichtungen im betrachteten Punkte.

Die geometrische Bedeutung von ${}^{2}\mathbf{K}$ *und* ${}^{2}\mathbf{G}$.

Wählt man in einem Punkte von X_4 eine bestimmte Richtung z. B. $\mathbf{i}_1$, und betrachtet man drei gegenseitig halbsenkrechte Flächenrichtungen 12 , 13 , 14 , die 1 enthalten, so ist die Summe ihrer Riemann'schen Krümmungen:

$$(184) \quad -\overset{4}{\mathbf{K}}{}^{4}(\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_1\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_1\mathbf{i}_4\mathbf{i}_4\mathbf{i}_1) =$$
$$= -({}_2\nabla\mathbf{a})\,\mathbf{a}^{4}\mathbf{i}_1\,\mathbf{b}\,\mathbf{b}\,\mathbf{i}_1 = -({}_2\nabla{}^{1}\mathbf{a})\,\mathbf{a}^{2}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 = -{}^{2}\mathbf{K}^{2}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1$$

und diese Summe ist also unabhängig von der näheren Wahl der drei anderen Richtungen 2 , 3 , 4 , und giebt eine unmittelbare geometrische Deutung des Tensors ${}^{2}\mathbf{K}$. Ebenso giebt es drei Flächenrichtungen, 23, 34, 42, die 1 nicht enthalten. Die Summe ihrer Krümmungen ist infolge (183) und (184):

$$(185) \quad -\tfrac{1}{2}K + {}^{2}\mathbf{K}^{2}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 = -({}^{1}/_{2}\,K\,{}^{2}\mathbf{g} - {}^{2}\mathbf{K})^{2}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 = {}^{2}\mathbf{G}^{2}\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1$$

Diese Summe ist also ebenfalls von der näheren Wahl der Richtungen 2, 3, 4 unabhängig und giebt eine unmittelbare geometrische Deutung des Tensors ${}^{2}\mathbf{G}$. Diese Resultat rühren von Herglotz her[a]). Nennen wir die Summe der drei ersten Krümmungen die mittlere Krümmung um $\mathbf{i}_1$, die der drei letzten die mittlere Krümmung senkrecht auf $\mathbf{i}_1$, so lassen sich die gefundenen Tatsachen folgendermaszen aussprechen:

Die Summe der mittleren Krümmungen um einen Einheitsvektor $\mathbf{i}_1$ *und senkrecht auf* $\mathbf{i}_1$ *ist gleich* $-{}^{1}/_{2}\,K$. *Die Differenz der mittleren Krümmungen um* $\mathbf{i}_1$ *und senkrecht auf* $\mathbf{i}_1$ *ist die negative doppelte zweite Ueberschiebung des Krümmungsdeviators* $\dfrac{{}^{2}\mathbf{K} + {}^{2}\mathbf{G}}{2}$ (*vergl. S.* 28) *mit dem Tensor* $\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1$.

---

a) 16. 10.

Der zweite Fundamentaltensor ${}^2\mathbf{h}$.[a])

Es sei die Mannigfaltigkeit X_4 in einer Mannigfaltigkeit Y_5 mit dem Fundamentaltensor ${}^2\mathbf{g}' = \mathbf{a}'^2 = \mathbf{b}'^2 = \ldots$ eingebettet. Werden darin die Parameterlinien der Urvariablen x', x^b, c^c und x^d so gewählt, dasz sie für $x^e = 0$ ganz in X_4 fallen, während die Parameterlinien von x^e *senkrecht* auf X_4 stehen, so hat ${}^2\mathbf{g}'$ in den Punkten von X_4 die Form:

$$(186)\quad a)\ {}^2\mathbf{g}' = \mathbf{a}'^2 = \mathbf{b}'^2 = \ldots\ ,\ \mathbf{a}' = \mathbf{a} + a'_e\,\mathbf{e}_e\ ,$$
$$b)\ a'_\lambda = a_\lambda,\quad a'_e\,a_\lambda = 0\ ,\ a'_e\,a'_e = g'_{ee}\ ,\ \lambda = a,\ldots,d,$$

während:

$$(187)\quad a)\ g'^{ee} = \frac{1}{g'_{ee}}\ ,\ a'^e = g'^{ee}\,a'_e\ ,$$
$$b)\ \nabla' = \nabla + \mathbf{e}_e\,\frac{\partial}{\partial x^e}\,{}^b),$$
$$c)\ {}^2\mathbf{g}'\,!\,\mathbf{a}' = \mathbf{a}$$

Mit jedem Wert von x^e korrespondiert eine andere Mannigfaltigkeit X_4 und die $g_{\lambda\mu}$, $\lambda, \mu = a,\ldots d$, sind also als Funktionen von x^e auf zu fassen. Die zu X_4 bez. Y_5 in Punkten von X_4 gehörigen Riemann-Christoffel'schen Affinoren sind nach (158):

$$(188)\quad \overset{4}{\mathbf{K}} = 2\left\{\nabla(\mathbf{a}.\mathbf{c})\ \times\ \nabla(\mathbf{b}.\mathbf{c})\right\}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

$$(189)\quad \overset{4}{\mathbf{K}}' = 2\left\{\nabla'(\mathbf{a}'.\mathbf{c}')\times\nabla'(\mathbf{b}'.\mathbf{c}')\right\}(\mathbf{a}'\times\mathbf{b}')$$

Die in X_4 liegende Komponente von $\overset{4}{\mathbf{K}}'$ läszt sich in vier Teile zerlegen (vergl. (187*b*) und (187*c*)):

$$(190)\quad \mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{d}^2\,\mathbf{c}\,\mathbf{b}\,\mathbf{a}!\,\overset{4}{\mathbf{K}}' = 2\left\{\nabla(\mathbf{a}'.\mathbf{c}')\times\nabla(\mathbf{b}'.\mathbf{c}')\right\}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) =$$
$$= \overset{4}{\mathbf{K}} + 2\left\{\nabla(a'^e c'_e)\times\nabla(\mathbf{b}.\mathbf{c}) + \right.$$
$$+\ \nabla(\mathbf{a}.\mathbf{c})\ \times\nabla(b'^e c'_e) +$$
$$\left.+\ \nabla(a'^e c'_e)\times\nabla(b'^e c'_e)\right\}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

---

a) Es sei nochmals daran erinnert (vergl. S. 6), dasz sämtliche Ableitungen der direkten Analysis m. m. für beliebiges n gültig bleiben, wenn auch die Darstellung sich in dieser Arbeit, dem partikularen Zwecke entsprechend, im Allgemeinen auf $n = 4$ beschränkt.

b) Liegt $\mathfrak{v}$ in X_4, so ist $\nabla\mathfrak{v}$ die in X_4 gelegene Komponente von $\nabla'\mathfrak{v}$. Dies gilt auch wenn Y_5 durch Y_n ersetzt wird. Hat Y_n euklidische Maszbestimmung, so ergiebt sich hier ein Weg um von dem gewöhnlichen Differentialquotienten zum Begriffe des geodätischen Differentialquotienten zu gelangen. F. Jung hat diesen Weg gefolgt. (Vgl. S. 53.)

Der vierte Teil ist gleich:

$$2 \left\{ \nabla (\mathbf{a}' . c'_e \mathbf{e}_e) \times \nabla (\mathbf{b}' . c'_e \mathbf{e}_e) \right\} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

oder, da $a'^e a_\mu$ und $b'^e b_\nu$ nach (186*b*) und (187*a*) identisch Null sind, auch gleich:

$$2 g'_{ee} \left\{ \nabla (\mathbf{a}' . \mathbf{e}_e) \times \nabla (\mathbf{b}' . \mathbf{e}_e) \right\} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Die $(\varkappa\lambda\mu\nu)$-Bestimmungszahl ist nach (139) und (186*b*) gleich:

$$2 g'^{ee} a_{\mu\varkappa} a'_e b_{\lambda\nu} b'_e = {}^1\!/_2 g'^{ee} \frac{\partial g_{\varkappa\mu}}{\partial x^e} \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^e} \tag{191}$$

Führen wir also für den Tensor $\frac{1}{\sqrt{g'^{ee}}} \nabla (\mathbf{a}' . \mathbf{e}_e) \mathbf{a}$ die Schreibweise ein:

$$\frac{1}{\sqrt{g'^{ee}}} \nabla (\mathbf{a}' . \mathbf{e}_e) \mathbf{a} = {}^2\mathbf{h} = \mathbf{p}^2 = \mathbf{q}^2 = \ldots, \tag{192}$$

So ist

$${}^2\mathbf{h} = \frac{1}{2} \sqrt{g'^{ee}} \frac{\partial g_{\varkappa\mu}}{\partial x^e} \mathbf{e}_\varkappa \mathbf{e}_\mu \tag{193}$$

und es läszt sich dieser vierte Teil schreiben:

$$2 (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) (\mathbf{p} \times \mathbf{q})$$

Der zweite und dritte Teil sind gleich, da sie durch Verwechslung von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ auseinander hervorgehen. Die $(\varkappa\lambda\mu\nu)$-Bestimmungszahl des zweiten Teiles ist gleich:

$$-2 g'^{ee} a'_e a_{\varkappa\mu} c'_e c_{\lambda\nu} = -{}^1\!/_2 g'^{ee} \frac{\partial g_{\varkappa\mu}}{\partial x^e} \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^e}, \tag{194}$$

und Vergleichung von (191) und (194) lehrt also:

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{d}^2\,\mathbf{c}\,\mathbf{b}\,\mathbf{a}\,{}^4\mathbf{K}' = {}^4\mathbf{K} - 2 (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \tag{195}$$

Setzen wir nun voraus, dasz die Parameterlinien von x^e *geodätische* Linien sind und x^e die auf diesen von X_4 aus gemessene Bogenlänge, so ist:

$$g'^{ee} = g'_{ee} = 1\,, \; a'^\nu = a'_e \tag{196}$$

und $\mathbf{e}_e$ wird ein Einheitsvektor.

Die Grösze

$$\nabla' \mathbf{e}_e = \nabla' (\mathbf{a}' . \mathbf{e}_e) \mathbf{a}' = \sum_{\lambda\nu}^{a,\ldots e} a'^e{}_\lambda a_\nu \mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}_\nu \tag{197}$$

enthält dann keine Komponenten in $\mathfrak{e}_e\ \mathfrak{e}_e$, $\mathfrak{e}_e\ \mathfrak{e}_\lambda$ oder $\mathfrak{e}_\lambda\ \mathfrak{e}_e$, $\lambda = a, \ldots, d$, da einerseits:

$$a'^e{}_\lambda\, a'_e = a'_{e\lambda}\, a'_e = {}^1\!/_2\, \frac{\partial g'_{ee}}{\partial x^\lambda} = 0, \tag{198}$$

$$a'^e_e\, a'_e = a'_{ee}\, a'_e = {}^1\!/_2\, \frac{\partial g'_{ee}}{\partial x^e} = 0, \tag{199}$$

und andererseits infolge (196):

$$a'^e_e\, a_\lambda = a'_{ee}\, a_\lambda = 0. \tag{200}$$

Infolgedessen ist:

$$\nabla'\, \mathfrak{e}_e = \nabla\, (\mathfrak{a}' \,.\, \mathfrak{e}_e)\, \mathfrak{a} = {}^2\mathfrak{h}. \tag{201}$$

${}^2\mathfrak{h}$ ist der *zweite Fundamentaltensor* der Flächentheorie, und (195) ist die Verallgemeinerung der Gauss'schen Gleichungen für das Krümmungsmasz [1]). Anwendung der Identität (120) lehrt:

$${}_2\nabla'\, \mathfrak{e}_e = \overset{4}{\mathfrak{K}}{}'\, \mathfrak{e}_e \tag{202}$$

und dies ist die Verallgemeinerung der Mainardi-Codazzi'schen Gleichungen [2]). Setzt man in (195) $\overset{4}{\mathfrak{K}}{}' = 0$, so ergiebt sich, dasz zur als Bivektortensor aufgefassten Grösze $\overset{4}{\mathfrak{K}}$ stets ein Vektortensor (vergl. S. 24) existiert, wenn Y_5 euklidisch ist, und dieser Vektortensor dann bis auf einen Zahlenfaktor mit dem zweiten Fundamentaltensor identisch ist. Aus dem Umstande, dasz ein Bivektortensor für $n > 2$ den eventuell vorhandenen Vektortensor im Allgemeinen eindeutig bestimmt, folgt der Beez'sche Satz, dasz ein X_n sich in einem euklidischen Y_{n+1}, für $n > 2$ im Allgemeinen nicht verbiegen läszt.

Setzen wir dagegen voraus, dasz die $g_{\lambda\mu}$, $\mu = a, \ldots, d$, von x^e unabhängig sind, so wird ${}^2\mathfrak{h} = 0$, und X_4 ist also euklidisch wenn Y_5 euklidisch ist. Nur ein euklidischer X_n kann also in einem euklidischen Y_{n+1} eine Bewegung ausführen, die in jedem Punkte senkrecht zu X_n gerichtet ist und bei der die Massbestimmung erhalten bleibt [a]).

---

a) Für $n = 3$ folgt daraus, dasz „der Raum" bei einem statischen Gravitationsproblem euklidisch ist, wenn keine Materie vorhanden ist. Serini [3]) hat das Theorem bewiesen für diesen Spezialfall, bei welchem auch g'^{dd} von x^d unabhängig wird.

[1]) Vgl. z. B. 99.2 S. 602.

[2]) Vgl. z. B. 99.2 S. 603.

[3]) 18. 5.

III. ANWENDUNGEN.

Die Weltfunktion.

Es sei im folgenden:

ρ_0, σ_0 die materielle bez. elektrische Ruhedichte.
dV_0 das Ruhevolumen.
m, e die Masse bez, Ladung von dV_0.
$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{x}'}{ds}$ der Einheitsvektor der Bewegung (Vierergeschwindigkeit).
$\mathbf{F}$ der Vektor der pro Volumeinheitangreifende Kraft (Viererkraft).
$\mathfrak{q}$ der Vektor des elektromagnetischen Potentials.
${}_2\mathbf{M} = 2\nabla \times \mathfrak{q}$ der elektromagnetische Bivektor.
$d\tau$ das natürlich gemessene vierdimensionale Volumelement.

Bekanntlich ist:

$$(1) \qquad \rho_0 = \frac{m}{dV_0} = \frac{mds}{d\tau} \quad , \quad \sigma_0 = \frac{e}{dV_0} = \frac{eds}{d\tau}$$

$$(2) \qquad \rho_0 d\tau = mds \quad , \quad \sigma_0 d\tau = eds.$$

Da m, e, ds und $d\tau$ bei Aenderung der Urvariablen invariant sind, sind ρ_0 und σ_0 invariant. Im Gegensatz zu m und e sind ρ_0 und σ_0 aber von ${}^2\mathbf{g}$ abhängig, da Aenderung von ${}^2\mathbf{g}$ Aenderung der Maszbestimmung und folglich Aenderung der Messresultate ds und $d\tau$ mit sich bringt. Mit Hülfe von ρ_0 und σ_0 bilden wir folgende Vektoren:

$$(3) \quad \begin{cases} \mathbf{w}' = \rho_0 \mathbf{v}' \text{ , der kontravariante Vektor} \\ \mathbf{w} = {}^2\mathbf{g}\,{}^1 \mathbf{w}' \text{, der kovariante Vektor} \end{cases} \Big\} \text{ der materiellen Bewegung.}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \mathbf{p}' = \sigma_0 \mathbf{v}' \text{ , der kontravariante Vektor} \\ \mathbf{p} = {}^2\mathbf{g}\,{}^1 \mathbf{p}' \text{ , der kovariante Vektor} \end{cases} \Big\} \text{ der elektrischen Strömung.}$$

Auch diese Grösen sind invariant, aber von ${}^2\mathbf{g}$ abhängig. Infolge (3) ist:

$$(5) \qquad \rho_0 = \sqrt{\mathbf{w}' . \mathbf{w}'} = \sqrt{\mathbf{w} \wedge \mathbf{w}'} = \sqrt{\mathbf{w} . \mathbf{w}}$$

Die Weltfunktion L bilden wir in folgender Weise:

$$(6) \qquad L = -\frac{\lambda}{\varkappa} + L_1 + L_2 + L_3 + L_4$$

λ[1]) ist eine kürzlich von EINSTEIN eingeführte neue Konstante, L_1 ist der von der Materie herrührende Teil. Nach LORENTZ[2]) schreiben wir:

$$L_1 = \Phi(\rho_0) = -\rho_0 + f(\rho_0), \tag{7}$$

welche Gleichung für den speziellen Fall eines inkohärenten Massensystems übergeht in:

$$L_1 = L_0 = -\rho_0. \tag{8}$$

$f(\rho_0)$ hat also die Bedeutung eines Korrektionsgliedes. L_2 rührt vom elektromagnetischen Felde her[3]):

$$L_2 = {}^1/_4\, \mu\, {}_2\mathbf{M} \overset{2}{\cdot} {}_2\mathbf{M} \tag{9}$$

und L_3 ist zuerst von SCHWARZSCHILD[4]), später von TRESLING[5]) und FOKKER[6]) verwendet für die bewegten elektrischen Ladungen:

$$L_3 = \mu\, \mathbf{p}' \wedge \mathbf{q} = \mu\, \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}. \tag{10}$$

L_4 ist bis auf einen Zahlenfaktor mit der Krümmung K identisch:

$$L_4 = -\frac{1}{2\varkappa} K. \qquad {}^{a)} \tag{11}$$

So lange ${}^2\mathbf{g}$ nicht variiert wird, existiert kein Unterschied zwischen kovarianten und kontravarianten Gröszen, $\mathbf{I}$ und $\mathbf{I}'$ sind identisch, und für $d\mathbf{x}'$ und $\mathbf{p}'$ kann geschrieben werden $d\mathbf{x}$ bez. $\mathbf{p}$.

Es sei jetzt die Variation des Integrales

$$\int_\tau L\, d\tau$$

für verschiedene Fälle berechnet.

---

a) G. MIE[1]) hat gezeigt, dasz alle skalaren Simultankovarianten von $\mathbf{p}$, ${}_2\mathbf{M}$, und $\mathbf{w}$ sich aus σ_0, ${}_2\mathbf{M} \overset{2}{\cdot} {}_2\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M} \overset{2}{\cdot} {}_2\mathbf{M}^*$, $(\mathbf{p} \overset{1}{\cdot} {}_2\mathbf{M}^*)^2$, ρ_0, $(\mathbf{w} \cdot {}_2\mathbf{M}^*)^2$, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}$ und $(\mathbf{p} \overset{1}{\cdot} {}_2\mathbf{M}^*) \cdot (\mathbf{w} \overset{1}{\cdot} {}_2\mathbf{M}^*)$ berechnen lassen.

[1]) 17. 1, S. 151.

[2]) 15. 1, S. 1076, 16. 4. S. 478.

[3]) LORENTZ 15. 1, S. 1082.

[4]) 03. 1, S. 127.

[5]) 16. 3, S. 845.

[6]) 17. 2, S. 1070.

---

[1]) 12. S. 530, 18. S. 31.

Variation des elektromagnetischen Potentials [1]).

Die Variation sei gegeben durch eine Zunahme von $\mathfrak{q}$ um $\delta\mathfrak{q}$. Die Bewegung und das Gravitationspotential bleiben unverändert und damit L_1, L_4 und $d\tau$. Für L_2 gilt:

$$\delta L_2 = \mu\,\delta(\nabla\times\mathfrak{q})^2 : (\nabla\times\mathfrak{q}) = 2\mu(\nabla\times\mathfrak{q})^2 : (\nabla\times\delta\mathfrak{q}) = \tag{12}$$
$$= \mu\,{}_2\mathfrak{M}^2 : \nabla\times\delta\mathfrak{q} = -\mu\nabla.({}_2\mathfrak{M}^1\,\delta\mathfrak{q}) + \mu(\nabla\,{}^1{}_2\mathfrak{M}).\delta\mathfrak{q}.^{a})$$

Für δL_3 gilt:

$$\delta L_3 = \mu\,\mathfrak{p}.\delta\mathfrak{q}. \tag{13}$$

Infolgedessen ist:

$$\delta\int L\,d\tau = \delta\int(L_2+L_3)\,d\tau = \int\mu\nabla.(\delta\mathfrak{q}\,{}^1{}_2\mathfrak{M})\,d\tau + \tag{14}$$
$$+\mu(\nabla\,{}^1{}_2\mathfrak{M}).\delta\mathfrak{q}\,d\tau + \mu\,\mathfrak{p}.\delta\mathfrak{q}\,d\tau.$$

Ist $\delta\mathfrak{q}$ auf der Begrenzungshyperfläche von τ Null, so verschwindet nach (II 133) (Gauss'scher Satz) der erste Term bei der Integration. Stellen wir nun die Bedingung:

$$\delta\int L\,d\tau = \delta\int(L_2+L_3)\,d\tau = 0, \tag{15}$$

so ergiebt sich nach dem Variationsprinzip:

$$\mathfrak{p} = -\nabla\,{}^1{}_2\mathfrak{M}\ , \tag{16}$$

das erste Maxwell'sche Gleichungssystem. Die infolge (II 93) evidente Identität:

$$\nabla\,{}^1{}_2\mathfrak{M}^* = \frac{1}{2}\,\mathfrak{I}\nabla\times_2\mathfrak{M} = \mathfrak{I}\nabla\times\nabla\times\mathfrak{q} = 0 \tag{17}$$

bildet das zweite Maxwell'sche System.

Virtuelle Verrückung der elektrisch geladenen Materie [2]).

Die Variation sei gegeben durch eine Verrückung $\delta\mathfrak{x}$ der eventuell elektrisch geladenen Massen. Das elektromagnetische und das Gravitationspotential bleiben konstant, und damit L_2, L_4 und $d\tau$. Für δL_1, gilt:

$$\delta L_1 = \delta\Phi(\rho_0) = \Phi'(\rho_0)\,\delta\rho_0 = \Phi'(\rho_0)\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{w}.\mathfrak{w}}}\,\mathfrak{w}.\delta\mathfrak{w} = \tag{18}$$
$$= -\frac{\Phi'(\rho_0)}{L_0}\,\mathfrak{w}.\delta\mathfrak{w}$$

---

a) Nach (I 107b).

[1]) Lorentz 15. 1, S. 1083; Tresling 16. 3, S. 846; Fokker 17. 2, S. 1072, 1074.

[2]) Lorentz 15. 1 S. 1077, Fokker 17. 2 S. 1073, Lorentz 16. 4 S. 478.

Infolge (3) ist:

$$(19)\quad \delta \mathfrak{W} = \delta \rho_0 \mathfrak{v} = \delta \rho_0 \frac{d\mathfrak{X}}{ds} = \frac{\rho_0}{ds} \delta\, d\mathfrak{X} + \frac{d\mathfrak{X}}{ds} \delta \rho_0 - \rho_0 \frac{d\mathfrak{X}}{ds^2} \delta\, ds.$$

Ferner ist bei der betrachteten Verrückung:

$$(20)\quad \delta\, d\mathfrak{X} = -\delta \mathfrak{X}^1 \nabla\, d\mathfrak{X} + d\mathfrak{X}^1 \nabla\, \delta \mathfrak{X},$$

und infolgedessen:

$$(21)\quad \delta\, ds = \frac{1}{2ds} \delta\,(d\mathfrak{X} . d\mathfrak{X}) = -\mathfrak{v}\, \delta \mathfrak{X}^2 \nabla\, d\mathfrak{X} + \mathfrak{v}\, d\mathfrak{X}^2 \nabla\, \delta \mathfrak{X}.$$

Schliesslich ist:

$$(22)\quad \delta \rho_0 = -\delta \mathfrak{X}^1 \nabla \rho_0 - \rho_0 (\nabla . \delta \mathfrak{X}) + \rho_0 \mathfrak{v}\, \mathfrak{v}^2 \nabla\, \delta \mathfrak{X}.$$

Der erste Teil von $\delta \rho_0$ rührt direkt der Verrückung her, der zweite Teil von der Divergenz der Verrückung $\nabla . \delta \mathfrak{X}$, und der dritte Teil entsteht durch die Längenänderung des Linienelementes infolge des Umstandes, dasz bei der Verrückung nicht $\rho_0\, d\tau$ sondern $m = \frac{\rho_0\, d\tau}{ds}$ konstant ist.

Es ist also:

$$(23)\quad \begin{aligned} \delta \mathfrak{W} = &-\frac{\rho_0}{ds} \delta \mathfrak{X}^1 \nabla\, d\mathfrak{X} + \rho_0 \mathfrak{v}^1 (\nabla\, \delta \mathfrak{X}) - \\ &- \mathfrak{v}\, \delta \mathfrak{X}^1 \nabla \rho_0 - \rho_0 \mathfrak{v} (\nabla . \delta \mathfrak{X}) + \rho_0 \mathfrak{v}\, \mathfrak{v}\, \mathfrak{v}^2 \nabla\, \delta \mathfrak{X} \\ &+ \frac{\rho_0}{ds} \mathfrak{v}\, \mathfrak{v}\, \delta \mathfrak{X}^2 \nabla\, d\mathfrak{X} - \rho_0 \mathfrak{v}\, \mathfrak{v}\, \mathfrak{v}^2 \nabla\, \delta \mathfrak{X}, \end{aligned}$$

oder, da $\mathfrak{v}$ ein Einheitsvektor ist, und infolgedessen:

$$(24)\quad 0 = \mathfrak{v}\, \mathfrak{v}\, \delta \mathfrak{X}^2 \nabla\, \mathfrak{v} = \frac{1}{ds} \mathfrak{v}\, \mathfrak{v}\, \delta \mathfrak{X}^2 \nabla\, d\mathfrak{X} + \mathfrak{v}\, \mathfrak{v}\, \delta \mathfrak{X}^1 \delta \frac{1}{ds}$$

auch:

$$(25)\quad \begin{aligned} \delta \mathfrak{W} = &-\rho_0 \delta \mathfrak{X}^1 \nabla\, \mathfrak{v} + \rho_0 \mathfrak{v}^1 (\nabla\, \delta \mathfrak{X}) - \\ &- \mathfrak{v}\, \delta \mathfrak{X} . \nabla \rho_0 - \rho_0 \mathfrak{v} (\nabla . \delta \mathfrak{X}) = \\ = &\mathfrak{W} (\nabla . \delta \mathfrak{X}) + \mathfrak{W}^1 \nabla\, \delta \mathfrak{X} - \delta \mathfrak{X}^1 \nabla\, \mathfrak{v}. \end{aligned}$$

Infolge der Kontinuitätsgleichung:

$$(26)\quad \nabla . \mathfrak{W} = 0$$

ist also:

$$(27)\quad \delta \mathfrak{W} = \nabla . (\mathfrak{W} \times \delta \mathfrak{X}) = 2 \nabla^1 (\mathfrak{W} \times \delta \mathfrak{X})\ ^a)$$

---

a) Nach (107*a*).

und es ist demzufolge:

$$\delta L_1 = -2\frac{\Phi'(\rho_0)}{L_1}\mathbf{w}\,.\left\{\nabla^1(\mathbf{w}\times\delta\mathbf{x})\right\} = -2\nabla\,.\left\{(\mathbf{w}\times\delta\mathbf{x})^1\Phi'(\rho_0)\frac{\mathbf{w}}{L_0}\right\} -$$

$$(28)\qquad -2\left\{\left(\nabla\times\frac{\Phi'(\rho_0)}{L_0}\mathbf{w}\right)^1\mathbf{w}\right\}.\delta\mathbf{x}$$

Da $\mathbf{p}$ ein Einheitsvektor ist, ist infolge (4) und infolge der Kontinuitätsgleichung:

$$(29)\qquad \nabla\,.\,\mathbf{p} = 0$$

in derselben Weise wie für $\mathbf{w}$ abzuleiten:

$$(30)\qquad \delta\mathbf{p} = \nabla\,.(\mathbf{p}\times\delta\mathbf{x}) = 2\nabla^1(\mathbf{p}\times\delta\mathbf{x}).$$

Für δL_3 gilt also:

$$(31)\qquad \delta L_3 = \mu\mathbf{q}\,.\,\delta\mathbf{p} = 2\mu\mathbf{q}\,.\left\{\nabla^1(\mathbf{p}\times\delta\mathbf{x})\right\} =$$

$$= 2\mu\nabla\,.\left\{(\mathbf{p}\times\delta\mathbf{x})^1\mathbf{q}\right\} + 2\mu(\nabla\times\mathbf{q})^2(\mathbf{p}\times\delta\mathbf{x}) =$$

$$= \mu\,\nabla\,.\left\{(\mathbf{p}\times\delta\mathbf{x})\,.\,\mathbf{q}\right\} + \mu({}_2\mathbf{M}^1\,\mathbf{p})\,.\,\delta\mathbf{x}\,.$$

Stellen wir nun die Bedingung:

$$(32)\qquad \delta\int L\,d\tau = \delta\int(L_1 + L_3)\,d\tau = 0$$

und ist $\delta\mathbf{x}$ auf der Begrenzungshyperfläche von $d\tau$ Null, so verschwinden nach (II 133) bei der Integration die ersten Terme von (28) und (31), und nach dem Variationsprinzip ist:

$$(33)\qquad -2\,(\nabla\times\frac{\Phi'(\rho_0)}{L_0}\mathbf{w})^1\,\mathbf{w} + \mu\,({}_2\mathbf{M}^1\,\mathbf{p}) = 0$$

oder:

$$(34)\qquad -\mathbf{w}\,.(\nabla\times\Phi'(\rho_0)\frac{\mathbf{w}}{L_0}) + \mu\,\mathbf{p}^1\,{}_2\mathbf{M} = 0.$$

Dies ist die mechanisch-elektrische Bewegungsgleichung.

Beide Terme der linken Seite dieser Gleichung lassen sich als Divergenz eines Tensors schreiben. Da $-\frac{\mathbf{w}}{L_0}$ ein Einheitsvektor ist, gilt nämlich:

$$(35)\qquad \mathbf{w}\,.\,d\frac{\mathbf{w}}{L_0} = 0,$$

oder:

$$(36) \qquad d\mathbf{x} \,!\, (\nabla \frac{\mathbf{W}}{L_0}) \,!\, \mathbf{W} = 0,$$

und infolgedessen:

$$(37) \qquad (\nabla \frac{\mathbf{W}}{L_0}) \,!\, \mathbf{W} = 0,$$

und daraus ergiebt sich:

$$-\mathbf{W}.\left(\nabla \times \Phi'(\rho_0)\frac{\mathbf{W}}{L_0}\right) = -(\mathbf{W}\,.\,\nabla)\frac{\Phi'(\rho_0}{L_0}\mathbf{W} + (\nabla \frac{\Phi'(\rho_0)}{L_0}\mathbf{W}) \,!\, \mathbf{W}\,^{a}) =$$

$$= -(\mathbf{W}\,.\,\nabla)\frac{\Phi'(\rho_0)}{L_0}\mathbf{W} - (\nabla\,.\,\mathbf{W})\frac{\Phi'(\rho_0)}{L_0}\mathbf{W}^{b}) + \{\nabla\Phi'(\rho_0)\}\frac{\mathbf{W}\,.\,\mathbf{W}^{c})}{L_0} =$$

$$(38) \quad = -\nabla \,!\, \{\Phi'(\rho_0)\frac{\mathbf{W}\,\mathbf{W}}{L_0}\} - \Phi''(\rho_0)\,.\,\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{1}{\rho_0}\,.\,2\,(\nabla\,\mathbf{W}) \,!\, \mathbf{W}\,L_0 =$$

$$= -\nabla \,!\, \{\Phi'(\rho_0)\frac{\mathbf{W}\,\mathbf{W}}{L_0}\} - \Phi''(\rho_0)(\nabla\,\mathbf{W}) \,!\, \mathbf{W}.$$

Da nun:

$$(39) \qquad \nabla \,!\, \{(\Phi(\rho_0) - \rho_0\Phi'(\rho_0))\,^2\mathbf{g}\} = \nabla\{\Phi(\rho_0) - \rho_0\Phi'(\rho_0)\} \,!\, {}^2\mathbf{g} =$$
$$= -\rho_0\Phi''(\rho_0)\nabla\rho_0 = -\Phi''(\rho_0)(\nabla\,\mathbf{W}) \,!\, \mathbf{W}$$

ist also:

$$(40) \qquad -\mathbf{W}\,.\,(\nabla \times \Phi'(\rho_0)\frac{\mathbf{W}}{L_0}) = -\nabla \,!\, \{\Phi'(\rho_0)\frac{\mathbf{W}\,\mathbf{W}}{L_0} -$$
$$-(\Phi(\rho_0) - \rho_0\Phi'(\rho_0))\,^2\mathbf{g}\}.$$

Der Tensor:

$$(41) \qquad \Phi'(\rho_0)\frac{\mathbf{W}\,\mathbf{W}}{L_0} - (\Phi(\rho_0) - \rho_0\Phi'(\rho_0))\,^2\mathbf{g},$$

den wir einfachheitshalber schreiben:

$$(42) \qquad {}^2\mathbf{T} = \Phi'(\rho_0)\,^2\mathbf{T}_0 - \nu\,^2\mathbf{g}$$

ist der Energietensor der Materie. Für den Fall incohärenter Massen geht ${}^2\mathbf{T}$ über in:

$$(43) \qquad {}^2\mathbf{T}_0 = \frac{\mathbf{W}\,\mathbf{W}}{L_0}.$$

Für den zweiten Term der linken Seite von (34) gilt infolge (16):

$$(44) \qquad \mu\,\mathfrak{p} \,!\, {}_2\mathbf{M} = -\mu(\nabla \,!\, {}_2\mathbf{M}) \,!\, {}_2\mathbf{M}.$$

oder infolge (17) und unter Berücksichtigung van (I 82) und (I 107*c*):

---

a) Nach (I 107*b*).

b) Dieser Term darf wegen (26) einfach zugefugt werden.

c) Infolge (37).

$$(45)\quad \mu\,\mathfrak{p} \mid {}_2\mathfrak{M} = -\mu\,(\nabla \mid {}_2\mathfrak{M}) \mid {}_2\mathfrak{M} - \mu\,(\nabla \mid {}_2\mathfrak{M}^*) \mid {}_2\mathfrak{M}^* =$$
$$= -\mu\,\nabla \mid ({}_2\mathfrak{M} \times {}_2\mathfrak{M}) = -\mu\,\nabla\, D\,({}_2\mathfrak{M} \mid {}_2\mathfrak{M}) = -\mu\,\nabla \{ {}_2\mathfrak{M} \mid {}_2\mathfrak{M} -$$
$$- \tfrac{1}{4}\,({}_2\mathfrak{M} : {}_2\mathfrak{M})\,{}^2\mathfrak{g} \}\ ^a)$$

Der Deviator

$$(46)\quad {}^2\mathfrak{D} = \mu\, D\,({}_2\mathfrak{M} \mid {}_2\mathfrak{M})$$

ist der elektromagnetische Energietensor. Die mechanisch-elektromagnetische Bewegungsgleichung (34) läszt sich also schreiben:

$$(47)\quad -\nabla \mid ({}^2\mathfrak{T} + {}^2\mathfrak{D}) = 0.$$

Der Vektor $-\nabla \mid {}^2\mathfrak{D}$ stellt die Kraft $\mathfrak{K}_e$ (Viererkraft) dar, die als „äussere" auftritt, wenn nur die elektromagnetische Seite der Erscheinungen betrachtet wird, ebenso $-\nabla \mid {}^2\mathfrak{T}$ die in den mechanischen Bewegungsgleichungen auftretende „äussere" Kraft $\mathfrak{K}_m$. Die elektromagnetische und die mechanische Bewegungsgleichung lauten also:

$$(48)\quad a)\quad \mathfrak{K}_e = -\nabla \mid {}^2\mathfrak{D},$$
$$b)\quad \mathfrak{K}_m = -\nabla \mid {}^2\mathfrak{T}.$$

Werden beide Seiten der Erscheinungen zugleich betrachtet, so verschwindet jede „äussere" Kraft. Es ist bemerkenswert, dasz die erhaltenen Gleichungen (16), (17), (45) und (48*a*) dieselbe Form haben wie die der einfachen Relativitätstheorie. Der Unterschied besteht nur darin, dasz die Differentiationen geodätische sind, und eben durch diesen Unterschied wird die Kovarianz bei beliebigen Transformationen erreicht.

Andere Deutung der virtuellen Verrückung der Materie.

Die virtuelle Verrückung der Materie kann noch in anderer Weise gedeutet werden. Geht der Punkt P durch die Verrückung $\delta \mathfrak{X}'$ [b]) über in Q, so besteht in Q eine andere Maszbestimmung, d.h. ein anderes Gravitationspotential, und ebenso ein anderes elektromagnetisches Potential als in Q. Da

$$(49)\quad \delta\,(d\mathfrak{X}') = \delta\,\mathfrak{X}' \mid \nabla\, d\mathfrak{X}',$$

ist die Änderung von ds^2:

$$(50)\quad \delta\, ds^2 = (d\mathfrak{X}' + \delta\,\mathfrak{X}' \mid \nabla\, d\mathfrak{X}')^2 : {}^2\mathfrak{g} - d\mathfrak{X}'^2 : {}^2\mathfrak{g} =$$
$$= 2\,(d\mathfrak{X}'\,\delta\,\mathfrak{X}' \mid \nabla\, d\mathfrak{X}') : {}^2\mathfrak{g},$$

oder nach (II 103):

---

a) Einstein 16.2, 16.7, vergl. auch Lorentz 15.4 S. 1086, Tresling 16.3 S. 847.

b) Da wir Aenderungen des Fundamentaltensors vornehmen wollen, müssen in diesem Paragraphen kovariante und kontravariante Grösen auseinandergehalten werden.

$$(51)\qquad \delta\, ds^2 = 2\,(d\mathbf{x}'\, d\mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} \nabla\, \delta\, \mathbf{x}') \overset{2}{\cdot} {}^2\mathbf{g} = 2\, d\mathbf{x}'\, d\mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} \nabla \smile (\delta\, \mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} {}^2\mathbf{g}).$$

Der Wert eines kovarianten Vektorfeldes, z. B. $\mathbf{q}$, in Q ist $\mathbf{q} + \delta\, \mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} \nabla\, \mathbf{q}$, das skalare Produkt von $\mathbf{q}$ mit irgend einem Linienelement $d\mathbf{x}'$ hat sich also in Q geändert um:

$$(52)\qquad \begin{aligned} \delta\,(\mathbf{q} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{x}') &= \delta\, \mathbf{q} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{x}' + \mathbf{q} \overset{1}{\cdot} \delta\, d\mathbf{x}' = \\ &= d\mathbf{x}' \,.\, \{\delta\, \mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} \nabla\, \mathbf{q} + (\nabla\, \delta\, \mathbf{x}') \overset{1}{\cdot} \mathbf{q}\} \end{aligned}$$

Sind $\mathbf{s}$, $\mathbf{t}'$ und $\mathbf{u}'$ beliebige andere ko- bez. kontravariante Vektorfelder, so ist ebenso:

$$(53)\qquad \begin{aligned} \delta\,(\mathbf{q}\,.\,\mathbf{s}) &= (\mathbf{s}\,\delta\, \mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} \nabla\, \mathbf{q} + \mathbf{q}\, \delta\, \mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} \nabla\, \mathbf{s}) \overset{2}{\cdot} {}^2\mathbf{g} \\ \delta\,(\mathbf{q} \overset{1}{\cdot} \mathbf{u}') &= \mathbf{u}'\, \delta\, \mathbf{x}' \overset{2}{\cdot} \nabla\, \mathbf{q} + \mathbf{q}\, \delta\, \mathbf{x}' \overset{2}{\cdot} \nabla\, \mathbf{u}' \\ \delta\,(\mathbf{t}'\,.\,\mathbf{u}') &= (\mathbf{u}'\, \delta\, \mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} \nabla\, \mathbf{t}' + \mathbf{t}'\, \delta\, \mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} \nabla\, \mathbf{u}') \overset{2}{\cdot} {}^2\mathbf{g}. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun eine scheinbar ganz andere virtuelle Änderung der Welt. Die Materie bleibt an ihrer Stelle, in jedem Punkte erteilen wir aber dem Fundamentaltensor ${}^2\mathbf{g}$ und allen ko- und kontravarianten Vektorfeldern, z. B. $\mathbf{q}$ und $\mathbf{t}'$, die Zuwächse:

$$(54)\qquad \begin{aligned} {}'\delta\, {}^2\mathbf{g} &= 2\, \nabla \smile (\delta\, \mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} {}^2\mathbf{g}) \\ {}'\delta\, \mathbf{q} &= \delta\, \mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} \nabla\, \mathbf{q} + (\nabla\, \delta\, \mathbf{x}') \overset{1}{\cdot} \mathbf{q} \\ {}'\delta\, \mathbf{t}' &= \delta\, \mathbf{x}' \overset{1}{\cdot} \nabla\, \mathbf{t}' - \mathbf{t}' \overset{1}{\cdot} \nabla\, \delta\, \mathbf{x}'. \end{aligned}$$

Da

$$(55)\qquad {}^2\mathbf{g} \overset{1}{\cdot} {}^2\mathbf{g}' = 1$$

ist:

$$(56)\qquad {}'\delta\, {}^2\mathbf{g} \overset{1}{\cdot} {}^2\mathbf{g}' = -\, {}^2\mathbf{g} \overset{1}{\cdot} {}'\delta\, {}^2\mathbf{g}'$$

und infolgedessen:

$$(57)\qquad {}'\delta\, {}^2\mathbf{g}' = -\, {}^2\mathbf{g}' \overset{1}{\cdot} {}'\delta\, {}^2\mathbf{g} \overset{1}{\cdot} {}^2\mathbf{g}' = -\, 2\,({}^2\mathbf{g}' \overset{1}{\cdot} \nabla) \smile \delta\, \mathbf{x}'.$$

Berechnet man nun die skalaren Produkte irgend zweier in dieser Weise geänderten ko- oder kontravarianten Vektoren mit einander oder mit $d\mathbf{x}'$, wo nötig under Verwendung des geänderten Fundamentaltensors, so zeigt sich, dasz die Änderungen dieser Produkte genau mit den in (53) angegeben identisch sind.

Die beschriebene Änderung ist also von der virtuellen Verrückung der Materie über $\delta\mathbf{x}'$ *in keiner Weise zu unterscheiden.* Denn die Zustandsgröszen der Materie, die Maszbestimmung, die Grösze aller aller Vektoren und ihre Lage in Bezug auf einander und in Bezug auf jedes Linienelement $d\mathbf{x}'$ sind jetzt in P genau dieselben wie bei der Verrückung der Materie in Q. Zufolge der gleichen Maszbestimmung können also die in den beiden Fällen auftretenden Teile

der Welt innerhalb der Hyperfläche ω, auf welcher $\delta \mathbf{x}'$ Null wird, aufeinander abgewickelt werden und es besteht dann vollständige Gleichheit. Die beschriebene Änderung von ${}^2\mathfrak{g}$, ${}^2\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{q}$ ist also nur eine andere Art die virtuelle Verrückung der Materie zu beschreiben, und zwar als eine virtuelle Verrückung der Felder über $-\delta \mathbf{x}'$ bei ruhender Materie.

Variation des Gravitationspotentials [a]).

Die Variation sei gegeben durch den Zuwachs $\delta\,{}^2\mathfrak{g}'$ des kontravarianten Fundamentaltensors. Das Differential $d\mathbf{x}'$, die Weltlinien der Massen und der Ladung und das Potential $\mathfrak{q}$ bleiben konstant. Der Unterschied zwischen kovarianten und kontravarianten Grösszen stellt sich ein, und die Maszbestimmung ändert sich. Da

$$\frac{\partial(-g)}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{\partial |g_{\mu\nu}|}{\partial g_{\mu\nu}} = -g g^{\mu\nu} \tag{58}$$

und:

$${}^2\mathfrak{g}' \,{}^2\!:\, {}^2\mathfrak{g} = 4, \tag{59}$$

ist:

$$\delta(-g) = -g\,{}^2\mathfrak{g}' \,{}^2\!:\, \delta\,{}^2\mathfrak{g} = g\,{}^2\mathfrak{g} \,{}^2\!:\, \delta\,{}^2\mathfrak{g}', \tag{60}$$

und infolgedessen:

$$\delta\, d\tau = \delta \sqrt{-g}\, dx^a \ldots dx^d = -\tfrac{1}{2}\,{}^2\mathfrak{g} \,{}^2\!:\, \delta\,{}^2\mathfrak{g}'\, d\tau. \tag{61}$$

Für den speziellen Fall, dass $\delta\,{}^2\mathfrak{g}'$ eine virtuelle Verrückung des Gravitationsfeldes über $-\delta \mathbf{x}'$ vorstellt, geht dieser Ausdruck über in:

$$\delta\, d\tau = (\nabla \,{}^1\!:\, \delta \mathbf{x}')\, d\tau \tag{62}$$

Für $\delta(L_1 d\tau)$ gilt:

$$\begin{aligned}\delta(L_1 \delta\tau) = \delta\{\Phi(\rho_0) d\tau\} &= \Phi'(\rho_0)\,\delta\,\rho_0\, d\tau + \Phi(\rho_0)\,\delta\, d\tau = \\ &= -\Phi'(\rho_0)\,\delta(L_0 d\tau) + \{\Phi(\rho_0) - \rho_0 \Phi'(\rho_0)\}\,\delta\, d\tau.\end{aligned} \tag{63}$$

Zur Bestimmung des ersten Teiles bringen wir $\rho_0 d\tau$ in die Form:

$$\rho_0 d\tau = m\, ds. \tag{64}$$

Da nach (55) und (56) $\delta\,{}^2\mathfrak{g} = -\,{}^2\mathfrak{g} \,{}^1\!:\, \delta\,{}^2\mathfrak{g}' \,{}^1\!:\, {}^2\mathfrak{g}$ ist und m von ${}^2\mathfrak{g}'$ unabhängig ist, folgt unter Berücksichtigung von (3) und (43):

---

a) Hilbert 15. 2. Einstein 16. 2; 16. 7 S. 43; 17. 1 S. 151. Lorentz. 16. 4, S. 470; 15. 1, S. 1086; Fokker. 17. 2, S. 1072.

$$\Phi'(\rho_0)\,\delta(\rho_0\,d\tau) = m\,\Phi'(\rho_0)\,\delta\sqrt{d\mathbf{X}'\,{}^1{}^2\mathbf{g}\,{}^1\,d\mathbf{X}'} =$$

$$= -\,{}^1\!/_2\,m\,\Phi'(\rho_0)\,\frac{1}{\sqrt{d\mathbf{X}'}}\,.\,d\mathbf{X}',(d\mathbf{X}'\,{}^1{}^2\mathbf{g})^2\,{}^2\,\delta\,{}^2\mathbf{g}' =$$

$$(65)\qquad = {}^1\!/_2\,\Phi'(\rho_0)\,\frac{\mathbf{W}\,\mathbf{W}}{L_0}\,{}^2\,\delta\,{}^2\mathbf{g}'\,d\tau =$$

$$= +\,\tfrac{1}{2}\,\Phi'(\rho_0)\,{}^2\mathbf{T}_0\,{}^2\,\delta\,{}^2\mathbf{g}'\,d\tau.$$

Der zweite Teil ergiebt:

$$(66)\quad \{\Phi(\rho_0) - \rho_0\,\Phi'(\rho_0)\}\,\delta\,d\tau = -\,{}^1\!/_2\,\{\Phi(\rho_0) - \rho_0\,\Phi'(\rho_0)\}^2\,\mathbf{g}\,{}^2\,\delta\,{}^2\mathbf{g}'\,d\tau =$$
$$= -\,{}^1\!/_2\,\nu\,{}^2\mathbf{g}\,{}^2\,\delta\,{}^2\mathbf{g}'\,d\tau$$

und die Variation von $L_1\,d\tau$ ist also:

$$(67)\qquad {}^1\!/_2\,{}^2\mathbf{T}\,{}^2\,\delta\,{}^2\mathbf{g}'\,d\tau.$$

Für den speziellen Fall, dasz $\delta\,{}^2\mathbf{g}'$ eine virtuelle Verrückung des Gravitationsfeldes über $-\,\delta\,\mathbf{X}'$ darstellt geht dieser Ausdruck über in

$$(68)\qquad \delta(L_1\,d\tau) = -\,{}^2\mathbf{T}\,{}^2\,\{{}^2\mathbf{g}'\,{}^1\,\nabla\,\delta\mathbf{X}')\} =$$
$$= -\,\nabla\,{}^1\,({}^2\mathbf{g}'\,{}^1\,{}^2\mathbf{T}\,{}^1\,\delta\,\mathbf{X}') + \{\nabla\,{}^1\,({}^2\mathbf{g}'\,{}^1\,{}^2\mathbf{T})\}\,{}^1\,\delta\,\mathbf{X}',$$

oder bei nach Ausführung der Rechnung wiederum erlaubter Identifizierung von kovarianten und kontravarianten Gröszen:

$$(69)\qquad \delta(L_1\,d\tau) = -\,\nabla\,{}^1\,({}^2\mathbf{T}\,{}^1\,\delta\,\mathbf{X}) + (\nabla\,{}^1\,{}^2\mathbf{T})\,{}^1\,\delta\,\mathbf{X}.$$

Zur Bestimmung der Variation von L_2 schreiben wir ${}^2\mathbf{M}$ als ideale Potenz $\mathbf{m}^2 = \mathbf{n}^2$. Da $\mathbf{q}$ konstant ist, sind $\mathbf{M}$, $\mathbf{m}$ und $\mathbf{n}$ konstant. Es ist dann:

$$(70)\quad L_2 = {}^1\!/_4\,\mu\mathbf{m}^{2\,2}\,\mathbf{n}^2 = -\,{}^1\!/_4\,\mu\,(\mathbf{m}\,{}^1\,\mathbf{a}')\,(\mathbf{a}'\,{}^1\,\mathbf{n})\,(\mathbf{m}\,{}^1\,\mathbf{b}')\,(\mathbf{b}'\,{}^1\,\mathbf{n})$$
$$= -\,{}^1\!/_4\,\mu\,\{\mathbf{m}\,\mathbf{n})\,{}^2\,{}^2\mathbf{g}'\}^2,$$

daher:

$$(71)\qquad \delta\,L_2 = -\,{}^1\!/_2\,\mu\,\{(\mathbf{m}\,\mathbf{n})\,{}^2\,{}^2\mathbf{g}'\}\,\{\mathbf{m}\,\mathbf{n})\,{}^2\,\delta\,{}^2\mathbf{g}'\} =$$
$$= -\,{}^1\!/_2\,\mu\,[\{(\mathbf{m}\,\mathbf{n})\,{}^2\,{}^2\mathbf{g}'\}\,\mathbf{m}\,\mathbf{n}]\,{}^2\,\delta\,{}^2\mathbf{g}' =$$
$$= {}^1\!/_2\,\mu\,({}_2\mathbf{M}\,{}^1\,{}_2\mathbf{M})\,{}^2\,\delta\,{}^2\mathbf{g}',$$

und infolgedessen:

$$(72)\qquad \delta(L_2\,d\tau) = {}^1\!/_2\,\mu\,\{({}_2\mathbf{M}\,{}^1\,{}_2\mathbf{M}) - {}^1\!/_4\,({}_2\mathbf{M}\,{}^2\,{}_2\mathbf{M})\,{}^2\mathbf{g}\}\,{}^2\,\delta\,{}^2\mathbf{g}'\,d\tau =$$
$$= {}^1\!/_2\,{}^2\mathbf{D}\,{}^2\,\delta\,{}^2\mathbf{g}'\,d\tau.$$

Für den speziellen Fall, dasz $\delta\,{}^2\mathbf{g}'$ eine virtuelle Verrückung des Gravitationsfeldes über $-\,\delta\,\mathbf{X}'$ darstellt, geht dieser Ausdruck über in:

$$(73)\qquad \delta(L_2\,d\tau) = -\,\nabla\,{}^1\,({}^2\mathbf{D}\,{}^1\,\delta\,\mathbf{X}) + (\nabla\,{}^1\,{}^2\mathbf{D})\,{}^1\,\delta\,\mathbf{X}.$$

Diese Gleichung wird inderselben Weise abgeleitet als (69).

Zur Bestimmung der Variation von $L_3\,d\tau$ bringen wir diese Grösze in die Form:

$$L_3\,d\tau = \mu\,\mathfrak{p}'\,!\,\mathfrak{q}\,d\tau = \mu\,\sigma_0\,\mathfrak{v}'\,!\,\mathfrak{q}\,d\tau = e\,\mathfrak{q}\,!\,d\mathfrak{x}'. \tag{74}$$

In diesem Ausdruck sind sowohl e als $\mathfrak{q}$ als $d\mathfrak{x}'$ von ${}^2\mathfrak{g}$ unabhängig. Die Variation von $L_3\,d\tau$ ist also Null.

Die Variation von

$$L_4\,d\tau = \frac{1}{2\varkappa}\,K\,d\tau \tag{75}$$

bestimmen wir zunächst für den besonderen Fall, dasz $d^2\mathfrak{g}'$ eine virtuelle Verrückung des Gravitationsfeldes über $-\delta\mathfrak{x}'$ darstellt. Es ist dann:

$$\delta K = \delta\mathfrak{x}'\,!\,\nabla K. \tag{76}$$

Da aber nach (II 168):

$$\nabla\,({}^2\mathfrak{g}'\,!\,{}^2\mathfrak{K}) - {}^1\!/_2\,\nabla K = \nabla\,!\,({}^2\mathfrak{g}'\,!\,{}^2\mathfrak{G}) = \nabla\,!\,{}^2\mathfrak{G} = 0, \tag{77}$$

ist:

$$\begin{aligned}\delta K &= 2\,\delta\mathfrak{x}'\,!\,\{\nabla\,!\,({}^2\mathfrak{g}'\,!\,{}^2\mathfrak{K})\} = \\ &= 2\,\nabla\,!\,({}^2\mathfrak{g}'\,!\,{}^2\mathfrak{K}\,!\,\delta\mathfrak{x}') - 2\,{}^2\mathfrak{K}\,!\,\{{}^2\mathfrak{g}'\,!\,(\nabla\smile\delta\mathfrak{x}')\} = \\ &= 2\,\nabla\,!\,({}^2\mathfrak{g}'\,!\,{}^2\mathfrak{K}\,!\,\delta\mathfrak{x}') + {}^2\mathfrak{K}\,!\,\delta\,{}^2\mathfrak{g}'.\end{aligned} \tag{78}$$

Der bei der Integration nichtverschwindende Teil von δK ist also in diesem speziellen Falle gleich ${}^2\mathfrak{K}\,!\,\delta\,{}^2\mathfrak{g}'$. Das nämliche gilt, wie in derselben Weise gezeigt wird, wenn $\delta\,{}^2\mathfrak{g}'$ die Form hat:

$$\delta\,{}^2\mathfrak{g}' = -\,\varepsilon\,({}^2\mathfrak{g}'\,!\,\nabla)\smile\delta\mathfrak{x}', \tag{79}$$

worin ε eine beliebige stetige Funktion des Ortes ist.

Zu irgend einer beliebigen Variation $\delta\,{}^2\mathfrak{g}'$ können nun aber in einem Gebiet, in welchem ${}^2\mathfrak{g}'$, als Funktion des Ortes betrachtet, nur „gewöhnliche" Stellen aufweist, stets 10 Variationen $\delta_j\mathfrak{x}'$ und 10 Ortsfunktionen ε_j, $j = 1, \ldots, 10$ gefunden werden, so dasz

$$\delta\,{}^2\mathfrak{g}' = -\sum_j \varepsilon_j\,({}^2\mathfrak{g}'\,!\,\nabla)\smile\delta_j\mathfrak{x}'. \tag{80}$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt also allgemein, dasz der bei der Integration nicht verschwindende Teil von δK gleich ${}^2\mathfrak{K}\,!\,\delta\,{}^2\mathfrak{g}'$ ist.

Man kann diese Tatsache noch in einer anderen Weise zum Ausdruck bringen. Da

$$\delta K = \delta\,({}^2\mathfrak{K}\,!\,{}^2\mathfrak{g}') = \delta\,{}^2\mathfrak{K}\,!\,{}^2\mathfrak{g}' + {}^2\mathfrak{K}\,!\,\delta\,{}^2\mathfrak{g}', \tag{81}$$

kann man sagen, dasz $\delta\,{}^2\mathfrak{K}\,!\,{}^2\mathfrak{g}'$ derjenige Teil von δK ist, der bei der Integration verschwindet.

Infolge (61) gilt nun, wenn der verschwindende Teil von $\delta(K d\tau)$ auszer acht gelassen wird:

$$(82) \qquad \delta(K\,d\tau) = ({}^2\mathbf{K} - {}^1/_2\, K\,{}^2\mathbf{g}) \overset{2}{:} \delta\,{}^2\mathbf{g}'\, d\tau = {}^2\mathbf{G} \overset{2}{:} \delta\,{}^2\mathbf{g}'\, d\tau.$$

Für den speziellen Fall, dasz $\delta^2\mathbf{g}'$ eine virtuelle Verrückung des Gravitationsfeldes über $\delta\mathbf{x}'$ darstellt, geht dieser Ausdruck über in

$$(83) \qquad \delta(K d\tau) = -2\nabla^1({}^2\mathbf{G}\,{}^1\delta\mathbf{x}) + 2(\nabla^1\,{}^2\mathbf{G})\,{}^1\delta\mathbf{x} = -2\nabla^1({}^2\mathbf{G}\,{}^1\delta\mathbf{x})$$

wenn wir den Unterschied zwischen kovarianten und kontravarianten Grözen wieder aufheben. Dieser Ausdruck wird in derselben Weise abgeleitet als (69).

Stellen wir nun die Bedingung

$$(84) \qquad \delta \int_\tau L\, d\tau = 0$$

für beliebige Variationen von ${}^2\mathbf{g}'$, so ergiebt sich aus (61), (67), (72) und (82) bei Anwendung des erweiterten Gausz'schen Satzes:

$$(85) \qquad -\frac{\lambda}{\varkappa}\,{}^2\mathbf{g} + {}^2\mathbf{T} + {}^2\mathbf{D} + \frac{1}{\varkappa}\,{}^2\mathbf{G} = 0,$$

die Feldgleichung des Gravitation.

Fur $\lambda = 0$, ${}^2\mathbf{T} = {}^2\mathbf{T}_0$ entsteht die Feldgleichung in ihrer einfachsten gestalt:

$$(86) \qquad {}^2\mathbf{T}_0 + {}^2\mathbf{D} + \frac{1}{\varkappa}\,{}^2\mathbf{G} = 0.$$

Bekanntlich hat Einstein die Konstante λ eingeführt um für den Fall gleichmäsziger Verteilung incohärenter Massen die Welt als ein nach seinen räumlichen Erstreckungen geschlossenes Kontinuum auffassen zu können.

Wird nun die Nichtincohärenz durch Einführung des von Lorentz eingeführten Zusatgliedes in der Formel (7) für L_1 berücksichtigt, so entsteht nach (42) ohne Einführung von λ:

$$(87) \qquad -\nu\,{}^2\mathbf{g} - \Phi'(\rho_0)\,{}^2\mathbf{T}_0 + {}^2\mathbf{D} + \frac{1}{\varkappa}\,{}^2\mathbf{G} = 0.$$

Es tritt also ein Zusatzglied $-\nu\,{}^2\mathbf{g}$ auf, und ${}^2\mathbf{T}_0$ bekommt einen Faktor $-\Phi'(\rho_0)$. Für den von Einstein betrachteten Fall ist nun $-\Phi'(\rho_0)$ konstant und das Korrektionsglied hat also gerade die von Einstein gewünschte Gestalt. Die Uebereinstimmung zeigt sich am besten wenn die Einstein'schen Gleichungen [a]) in der Gestalt:

a) 17. 1 S. 151.

(88)
$$S\,{}^2\mathbf{K} = \varkappa\, S\,{}^2\mathbf{T}_0 - \lambda\,{}^2\mathbf{g}$$
$$D\,{}^2\mathbf{K} = -\varkappa\, D\,{}^2\mathbf{T}_0$$

verglichen werden mit den hier abgeleiteten in der Gestalt:

(89)
$$S\,{}^2\mathbf{K} = -\varkappa\, S\,\Phi'(\rho_0)\,{}^2\mathbf{T}_0 - \nu\varkappa\,{}^2\mathbf{g}$$
$$D\,{}^2\mathbf{K} = \varkappa\, D\,\Phi'(\rho_0)\,{}^2\mathbf{T}_0.$$

für den Fall $\lambda = 0$, ${}^2\mathbf{D} = 0$. Die Rechnung scheint also zu ergeben, dasz das Einstein'sche Zusatzglied nicht eine willkürliche durch unser tatsächliches Wissen nicht gerechtfartigte Erweiterung der Feldgleichungen [a]) ist, sondern eng zusammenhängt mit der Berücksichtigung nicht incohärenter Massen.

Es sei noch auf eine merkwürdige Analogie gewiesen zwischen den Gleichungen (85) und den Deformationsgleichungen eines elastischen Mediums. Ist in drei Dimensionen der Tensor der Spannung ${}^2\mathbf{S}$ und der Affinor der Deformation $\overset{2}{\mathbf{V}}$, so ist:

(90)
$$S\overset{2}{\mathbf{S}} = K_0\, S\overset{2}{\mathbf{V}}$$
$$D\overset{2}{\mathbf{S}} = K_2\, D\overset{2}{\mathbf{V}},$$

worin K_0 und K_2 die zu den Deformationen nullter und zweiter Ordnung gehörigen Elastizitätskonstanten des Mediums sind. [b]) Schreiben wir nun ${}^2\mathbf{Z}$ für die Summe von ${}^2\mathbf{T}$, ${}^2\mathbf{D}$ und $-\frac{\lambda}{\varkappa}\,{}^2\mathbf{g}$ so läszt sich (85) in die Form bringen:

(91)
$$S\,{}^2\mathbf{Z} = \frac{1}{\varkappa}\, S\,{}^2\mathbf{K}$$
$$D\,{}^2\mathbf{Z} = -\frac{1}{\varkappa}\, D\,{}^2\mathbf{K}.$$

Die Bewegungsgleichungen abgeleitet aus den Feldgleichungen der Gravitation.

Die Variation von $\mathfrak{q}$ und die virtuelle Verrückung der elektrisch geladenen Materie ergaben nach (47) die mechanisch-elektromagnetische Bewegungsgleichung:

(92)
$$-\nabla\,{}^1(\,{}^2\mathbf{T} + {}^2\mathbf{D}) = 0$$

und die Variation des Gravitationspotentials ergab nach (85) die Feldgleichung der Gravitation:

---

a) 17. 1 S. 152.
b) 14. 2 S. 225.

$$(93) \qquad -\frac{\lambda}{\varkappa}{}^2\mathfrak{g} + {}^2\mathbf{T} + {}^2\mathbf{D} = -\frac{1}{\varkappa}{}^2\mathbf{G}.$$

Da aber nach (II 168):

$$(94) \qquad \nabla\,{}^1\,{}^2\mathbf{G} = 0,$$

und ebenso:

$$(95) \qquad \nabla\,{}^1\,{}^2\mathfrak{g} = {}^2\mathfrak{g}\,{}^2\,\nabla\,{}^2\mathfrak{g} = 0,$$

entsteht (92) aus (85) durch Anwendung des Operators $\nabla\,{}^1$. Die Bewegungsgleichungen folgen also unmittelbar aus den Feldgleichungen der Gravitation. Bei einer etwas anderen Wahl der Weltfunktion L hat Hilbert [a]) diese Tatsache zuerst hervorgehoben.

Virtuelle Verrückung des Feldes.

Wir betrachten jetzt die S. 82 beschriebene virtuelle Verrückung der Felder über $-\delta\mathbf{x}$. Sehen wir ab von den bei der Integration verschwindenden Teilen, so ist nach (62), (69), (73) und (83) infolge der Verrückung des Gravitationsfeldes:

$$(96) \qquad \begin{aligned} \delta\left(\frac{\lambda}{\varkappa}d\tau\right) &= 0 \\ \delta(L_1\,d\tau) &= (\nabla\,{}^1\,{}^2\mathbf{T})\,{}^1\,\delta\mathbf{x} \\ \delta(L_2\,d\tau) &= (\nabla\,{}^1\,{}^2\mathbf{D})\,{}^1\,\delta\mathbf{x} \\ \delta(L_3\,d\tau) &= 0 \\ \delta(L_4\,d\tau) &= \frac{1}{\varkappa}(\nabla\,{}^1\,{}^2\mathbf{G})\,{}^1\,\delta\mathbf{x} = 0. \end{aligned}$$

Bei der Verrückung des Feldes $\mathfrak{q}$ ist nach (12) und (13) ebenso:

$$(97) \qquad \begin{aligned} \delta\left(\frac{\lambda}{\varkappa}d\tau\right) &= 0 \\ \delta(L_1\,d\tau) &= 0 \\ \delta(L_2\,d\tau) &= \mu\,(\nabla\,{}^1\,{}_2\mathfrak{M})\,.\,\delta\mathfrak{q} \\ \delta(L_3 d\tau) &= \mu\,\mathfrak{p}\,.\,\delta\mathfrak{q} \\ \delta(L_4 d\tau) &= 0, \end{aligned}$$

und diese beiden Variationen heben sich infolge (16) auf.

Es resultiert also die Impuls-Energiegleichung

$$(98) \qquad \nabla\,{}^1\,({}^2\mathbf{T} + {}^2\mathbf{D}) = 0.$$

H. Weyl [b]) hat wohl zuerst ausdrücklich darauf hingewiesen, dasz die Impuls-Energiegleichung der Ausdruck dafür ist, dasz das

a) 15. 2.
b) 17. 3 S. 121.

Hamilton'sche Prinzip insbesondere bei denjenigen Variationen erfüllt ist, die einer virtuellen Verrückung des Feldes entsprechen. [a])

Zusatz, die neueste Weyl'sche Theorie betreffend.

Sind zwei verschiedene Fundamentaltensoren ${}^2\mathfrak{g} = \mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}_1^2 = \ldots$ und ${}^{2'}\mathfrak{g} = \mathfrak{z}^2 = \mathfrak{z}_1^2 = \ldots$ gegeben, und sind die zugehörigen geometrischen Differationssymbole d, ∇ und $'d$, $'\nabla$, so ist bei Anwendung auf einen Skalar:

$$(99) \qquad dp = dp, \quad \nabla p = \nabla' p.$$

Für die Differentiation eines Vektors gilt aber:

$$(100) \qquad {}'d\,\mathfrak{v} = {}'d\,(\mathfrak{z}' \,{}^1\!:\, \mathfrak{v})\,\mathfrak{z} = d\mathfrak{v} \,{}^1\!:\, \mathfrak{z}'\ \mathfrak{z} + \mathfrak{v} \,{}^1\!:\, d\,\mathfrak{z}'\ \mathfrak{z} =$$
$$= d\mathfrak{v} + d\mathfrak{x}'\ \mathfrak{v} \,{}^2\!:\, \mathfrak{a}'\ \nabla\,(\mathfrak{a} \,{}^1\!:\, \mathfrak{z}')\,\mathfrak{z} = d\mathfrak{v} - d\mathfrak{x}'\ \mathfrak{v} \,{}^2\!:\, \mathfrak{z}'\ \nabla\,(\mathfrak{z} \,{}^1\!:\, \mathfrak{a}')\ {}'\mathfrak{a}$$
$$d\mathfrak{v}' = d\mathfrak{v}' + d\mathfrak{x}'\ \mathfrak{v}' \,{}^2\!:\, \mathfrak{a}\ \nabla\,(\mathfrak{a}' \,{}^1\!:\, \mathfrak{z})\,\mathfrak{z}' = d\mathfrak{v}' - d\mathfrak{x}'\ \mathfrak{v}' \,{}^2\!:\, \mathfrak{z}\ \nabla\,(\mathfrak{z}' \,{}^1\!:\, \mathfrak{a})\,\mathfrak{a}'$$

und ebenso:

$$(101) \qquad {}'\nabla\,\mathfrak{v} = \nabla\,\mathfrak{v} + \mathfrak{v} \,{}^1\!:\, \mathfrak{a}'\ \nabla\,(\mathfrak{a} \,{}^1\!:\, \mathfrak{z}')\,\mathfrak{z} = \nabla\,\mathfrak{v} - \mathfrak{v} \,{}^1\!:\, \mathfrak{z}'\ \nabla\,(\mathfrak{z} \,{}^1\!:\, \mathfrak{a}')\,\mathfrak{a}$$
$${}'\nabla\,\mathfrak{v}' = \nabla\,\mathfrak{v}' + \mathfrak{v}' \,{}^1\!:\, \mathfrak{a}\ \nabla\,(\mathfrak{a}' \,{}^1\!:\, \mathfrak{z})\,\mathfrak{z}' = \nabla\,\mathfrak{v}' - \mathfrak{v}' \,{}^1\!:\, \mathfrak{z}\ \nabla\,(\mathfrak{z}' \,{}^1\!:\, \mathfrak{a})\,\mathfrak{a}'$$

Der wegen (II 84) in den beiden ersten Stellen symmetrische Affinor

$$(102) \qquad \overset{3}{\mathfrak{A}}{}^{\cdot\cdot\cdot} = \mathfrak{a}\ \nabla\,(\mathfrak{a}' \,{}^1\!:\, \mathfrak{z})\,\mathfrak{z}' = -\,\mathfrak{z}\ \nabla\,(\mathfrak{z}' \,{}^1\!:\, \mathfrak{a})\,\mathfrak{a}'$$ [b])

ermöglicht also den Übergang zwischen den beiden Differentiationen:

$$(103) \qquad a) \qquad {}'d\,\mathfrak{v} = d\mathfrak{v} - \overset{3}{\mathfrak{A}}{}^{\cdot\cdot\cdot} \,{}^2\!:\, \mathfrak{v}\ d\mathfrak{x}'$$
$${}'d\,\mathfrak{v}' = d\mathfrak{v}' + d\mathfrak{x}'\ \mathfrak{v}' \,{}^2\!:\, \overset{3}{\mathfrak{A}}{}^{\cdot\cdot\cdot}$$
$$b) \qquad {}'\nabla\,\mathfrak{v} = \nabla\,\mathfrak{v} - \overset{3}{\mathfrak{A}}{}^{\cdot\cdot\cdot} \,{}^1\!:\, \mathfrak{v}.$$ [c])
$${}'\nabla\,\mathfrak{v}' = \nabla\,\mathfrak{v}' + \mathfrak{v}' \,{}^1\!:\, \overset{3}{\mathfrak{A}}{}^{\cdot\cdot\cdot}$$

---

a) Die abgeleitete direkte Analysis ist in diesem Abschnitte nur angewandt auf die Berechnung der mechanisch-electromagnetischen Grundgleichungen aus dem Variationsprinzip. Es ist gerade dieser schwierigste Teil gewählt um das System einer Kraftprobe zu unterwerfen. Einfachere Anwendungen kommen als für sich verständlich nicht zur Sprache, und eine systematische Darstellung der Einstein'schen Relativitätstheorie ist dann auch nicht angestrebt. Der Übergang zu den Koordinatengleichungen wird nicht gemacht, es sind zu diesem Übergange natürlich die Einheiten $\mathfrak{i}_0$, $\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{i}_2$, $\mathfrak{i}_3$, auf S. 15 zu verwenden.

b) Ein gemischter Affinor sei angegeben durch einen aus Punkten und Kommazeichen zusammengesetzten Index, der die Stelle der ko- und kontravarianten idealen Faktoren angiebt.

c) Diese Formeln sind eine Erweiterung der bekannten Formeln (II 61) und gehen in diese über für den Fall dasz ${}^2\mathfrak{g}$ zu einer euklidischen Maszbestimmung gehört, $({}_2\nabla\,\mathfrak{a})\,\mathfrak{a} = 0$, und allgemein $g_{\lambda\lambda} = 1$, $g_{\lambda\mu} = 0$, $\lambda \neq \mu$, $\lambda, \mu = a, \ldots, {}'d$ gewählt wird.

Im speziellen Fall, dasz

$$(104) \qquad {}'^{2}\mathbf{g} = \sigma\, {}^{2}\mathbf{g},$$

worin σ eine beliebige Funktion des Ortes darstellt, berechnet man leicht dasz:

$$(105) \quad \overset{3}{\mathbf{A}}{}^{\cdot\cdot\cdot} = {}^{1}/_{2}\,(\mathbf{a}' \,.\, \mathbf{s})\,\mathbf{b}^{2}\,\mathbf{a}' - {}^{1}/_{2}\,\mathbf{s}\,\mathbf{a}\,\mathbf{a}' - {}^{1}/_{2}\,\mathbf{a}\,\mathbf{s}\,\mathbf{a}' = \\ = {}^{1}/_{2}\,(\mathbf{b}^{2}\,\mathbf{a}'^{2} - \mathbf{b}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}'\,\mathbf{a}' - \mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{b}'\,\mathbf{a}')\,{}^{1}\!:\mathbf{s},$$

worin:

$$(106) \qquad \mathbf{s} = \nabla\, lg\, \sigma.$$

Der Affinor

$$(107) \qquad \overset{4}{\mathbf{B}}{}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = {}^{1}/_{2}\,(\mathbf{b}^{2}\,\mathbf{a}'^{2} - \mathbf{b}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}'\,\mathbf{a}' - \mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{b}'\,\mathbf{a}')$$

ist offenbar bei der Transformation (104) invariant. Infolge (105) ist nun:

$$(108) \qquad a) \quad {}'d\,\mathbf{v} = d\mathbf{v} - \overset{4}{\mathbf{B}}{}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}\,{}^{3}\!:\mathbf{s}\,\mathbf{v}\,d\mathbf{x}'$$

$$b) \quad {}'\nabla\,\mathbf{v} = \nabla\,\mathbf{v} - \overset{4}{\mathbf{B}}{}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}\,{}^{2}\!:\mathbf{s}\,\mathbf{v}.$$

Bilden wir nun bei einem gegebenen Vektor $\mathbf{q}$ die Funktionen

$$(109) \qquad a) \quad d^{*}\,\mathbf{v} = d\mathbf{v} + \overset{4}{\mathbf{B}}{}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}\,{}^{3}\!:\mathbf{q}\,\mathbf{v}\,d\mathbf{x}'$$

$$b) \quad \nabla^{*}\,\mathbf{v} = \nabla\,\mathbf{v} + \overset{4}{\mathbf{B}}{}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}\,{}^{2}\!:\mathbf{q}\,\mathbf{v}$$

so sind dies ein Differentialquotient und ein Differential von $\mathbf{v}$ in Bezug auf ein mitbewegtes Bezugssystem, dessen Maszeinheiten sich transformieren nach der Formel

$$(110) \quad {}'\mathbf{i}_{j} = \mathbf{i}_{j} - d^{*}\,\mathbf{i}_{j} = \mathbf{i}_{j} - d\,\mathbf{i}_{j} + \overset{4}{\mathbf{B}}{}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}\,{}^{3}\!:\mathbf{q}\,\mathbf{i}_{j}\,d\mathbf{x}', \quad j = 1 \ldots, n.$$

Die Funktionen (109) haben nun die bemerkenswerte Eigenschaft, dasz sie nicht nur unabhängig sind vom Bezugssystem sondern auch noch invariant bei der Transformation:

$$(111) \qquad {}^{2'}\mathbf{g} = \sigma\, {}^{2}\mathbf{g}$$

$${}'\mathbf{q} = \mathbf{q} + \nabla\, lg\, \sigma = \mathbf{q} + \mathbf{s}$$

denn bei dieser Transformation gehen $d^{*}\,\mathbf{v}$ und $\nabla^{*}\mathbf{v}$ über in:

$$(112) \quad d\mathbf{v} - \overset{4}{\mathbf{B}}{}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}\,{}^{3}\!:\mathbf{s}\,\mathbf{v}\,d\mathbf{x}' + \overset{4}{\mathbf{B}}{}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}\,{}^{3}\!:(\mathbf{q}+\mathbf{s})\,\mathbf{v}\,d\mathbf{x}' = d\mathbf{v} + \overset{4}{\mathbf{B}}{}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}\,{}^{3}\!:\mathbf{q}\,\mathbf{v}\,d\mathbf{x}'$$

$$\nabla\,\mathbf{v} - \overset{4}{\mathbf{B}}{}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}\,{}^{2}\!:\mathbf{s}\,\mathbf{v} + \overset{4}{\mathbf{B}}{}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}\,{}^{2}\!:(\mathbf{q}+\mathbf{s})\,\mathbf{v} = \nabla\,\mathbf{v} + \overset{4}{\mathbf{B}}{}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}\,{}^{2}\!:\mathbf{q}\,\mathbf{v}.$$

Auf diesen Grundlagen erhebt sich nun die neueste WEYL'sche Relativitätstheorie [1]). $\mathfrak{q}$ wird mit dem elektromagnetischen Potentialvektor definiert. Aus (109*b*) ergiebt sich dann z.B. sofort die zweite MAXWELL'sche Gleichung:

$$\nabla^* \times \nabla^* \times \mathfrak{q} = \nabla \times \nabla \times \mathfrak{q} = 0.$$

Bei einem Problem, welches bei geeigneter Wahl von σ rein mechanisch aufgefasst werden kann ist, $d^* \mathfrak{v} = d\mathfrak{v}$, bei Änderung von σ stellt sich aber ein elektromagnetisches Potential ein. Karakteristisch für die neue Theorie ist, dasz das geodätisch bewegte Bezugssystem beim durchlaufen einer geschlossen Kurze nicht nur seine Richtung sondern auch seine Grösze ändert, da $d^* \mathfrak{i}_j$ in (110) im Gegensatz zu $d\mathfrak{i}_j$ im allgemeinen nicht mehr senkrecht zu $\mathfrak{i}_j$ ist.

Die erste Aufgabe der direkten Behandlung dieser neuesten Theorie ist die Erforschung der formalen Gesetze von d^* und ∇^*.

[1]) 18. 7.

LITTERATUR-VERZEICHNISZ.

1897. 1. Ricci G. Del teorema de Stokes in uno spazio qualunque a tre dimensioni ed in coordinate generali Atti de R. I. Ven. 25. 2 (96—97) 1536—1539.

1899. 1. Hessenberg. G. Ueber die Invarianten linearer und quadratischer Differentialformeln und ihre Anwendung auf die Deformation der Flächen. Acta Mathematica 23 (99) 121—170.

2. Bianchi. Vorlesungen über Differentialgeometrie (99) 1e Aufl. Dtsch. von M. Lukat.

1901. 1. Ricci. G. und Levi Civita. T. Méthodes de calcul différentiel absolu. Math. Ann. 54 (01) 125—201.

1903. 1. Schwarzschild. K. Zur Elektrodynamik. Gött. Nachr. (03) 126—131.

2. Maschke. H. Invariants of differential quantics. Chicago Univ. Press (03).

1906. 1. Waelsch. E. Ueber mehrfache Vektoren und ihre Produkte sowie deren Anwendung in der Elastizitätstheorie. Mon. f. Math. u. Ph. 17 (06) 241—280.

1908. 1. Minkowski. H. Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. Gött. Nachr. (08) 53—111. Math. Ann. 68 (10) 472—525.

1910. 1. Abraham. A. Sull' elektrodinamica di Minkowski. Rend. di Palermo 30 (10) 33—46.

2. Sommerfeld. A. Zur Relativitätstheorie. Ann. d. Ph. 32 (10) 749—776, 33 (10) 649—689.

3. Lewis. G. N. On four dimensional vectoranalysis, and its application in electrical theory. Proc. Am. Acad. 46 (10) 165—181.

1910. 4. Ingold. L. Vector interpretation of symbolic differential parameters. Trans. Am. Math. Soc. 11 (10) 449—474.
5. Jung. F. Die Polarableihungen verschiedener Stufe und ihr Zusammenhang. Wien. Ber. 119 (10) 377—392.
1911. 1. Frank. Ph. Verhalten der electromagnetischen Feldgleichungen gegenüber linearen Transformationen der Raumzeitkoordinaten. Ann. der Ph. 35 (11) 599.
2. Laue. M. Das Relativitätsprinzip. Braunscheig, Vieweg.
1912. 1. Wilson E. B. und Lewis. G. N. The space-time manifold of relativity. Proc. Am. Ac. 48 (12) 390—508.
1913. 1. Waelsch. E. Quaternionen und binäre Formen zu den Minkowski'schen Grundgleichungen der Elektrodynamik. Wien Sitz. Ber. 122 (13) 503—513, 1095—1106.
2. Shaw. J. B. The Wilson and Lewis Algebra for four-dimensional space. Bull. of the int. assoc. for prom. the study of quat. (13) 24—27.
3. Shaw. J. B. On differentiel invariants Amer. Journal 35 (13) 394—406.
4. Weitzenböck. R. Beweis des ersten Fundamentalsatzes der symbolischen Methode. Wien. Sitz. Ber. 122 (13) 153—168.
1914. 1. Einstein. A. und Grossmann. M. Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation. Zeitschr. f. Math. und Phys. 62 (14) 225—261.
2. Schouten. J. A. Grundlagen der Vektor und Affinoranalysis. Leipzig, Teubner.
3. Müller. E. Eine Weiterbildung der Graszmann'schen Ausdehnungslehre im Sinne der Invariantentheorie. Jahresb. d. D. Math. Ver. 23 (14).
1915. 1. Lorentz. H. Het beginsel van Hamilton in Einstein's theorie der zwaartekracht. Versl. Kon. Akad. v. Wet. 23 (14—15) 1073—1089.
2. Hilbert. D. Grundlagen der Physik Gött. Nachr. (15) 395—407.
1916. 1. Einstein. A. Eine neue formale Deutung der Maxwell'schen Feldgleichungen der Elektrodynamik. Sz. Berl. Akad. (16) 184—188.
2. Einstein. A. Hamiltonsches Princip und allgemeine Relativitätstheorie. Sitz. Berl. Akad. (16) 1111—1116.
3. Tresling. J. De vergelykingen der electronentheorie in een gravitatieveld van Einstein afgeleid uit een variatieprincipe. De principale funktie der electronenbeweging. Versl. Kon. Akad. v. Wet. 25 (16) 844—848.

1916. 4. Lorentz. H. Over Einstein's theorie der zwaartekraeht. Versl. Kon. Akad. v. W. 24. 2. (15—16) 1389—1402, 1759—1774, 25 (16—17) 468—486.
5. Waelsch. E. Quaternionen und binäre Formen zu den Minkowski'schen Grundgleichungen der Elektrodynamik. Wien Sitz. Ber. 125 (16) 1083—1091, 1651—1662.
6. Waelsch. E. Binäranalyse des vierdimensionalen Raumes. Wien. Sitz. Ber. 125 (16) 1625—1650.
7. Einstein. A. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Leipz. J. A. Barth, 16, Ann. der Phys. 49 (16).
8. Schouten. J. A. Ueber eine neue Theorie der Systeme direkter Reehnung und ihre Bedeutung für die mathematisehe Physik. Areh. der Math. und Phys. 25 (16) 244—260, 328.
9. Schouten. J. A. Ueber das Verhältnisz der Vektor- und Affinoranalysis zur Binäranalyse. Jahresber. d. Deuteh. Math. Ver. 24 (16) 382—389.
10. Herglotz. G. Zur Einsteinsehen Gravitationstheorie. Leipz. Ber. 68 (16) 199—208.

1917. 1. Einstein. A. Kosmologisehe Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Berl. Sitz. Ber. (17) 142—152.
2. Fokker. A. D. De virtueele verplaatsingen van het eleetromagnetisehe en van het zwaartekrachtsveld bij de toepassing van het variatiebeginsel van Hamilton. Versl. Kon. Akad. v. Wet. 25. 1 (16—17) 1067—1084.
3. Weyl. H. Zur Gravitationstheorie Ann. d. Phys. 54 (17) S. 117—145.
4. Lorentz. H. Over Einstein's theorie der zwaartekraeht. Versl. Kon. Akad. v. Wet. 25. 2 (16—17) 1380—1396.
5. Hessenberg. G. Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie. Math. Ann. 78 (17) 187—217.
6. Jahnke. E. Zur Theorie der vierdimensionalen Vektoren und Dyaden. Arch. der Math. und Phys. 26 (17) 23—35.
7. Schouten. J. A. Over de direkte analyses der lineaire grootheden bij de rotationeele groep in drie en vier grondvariabelen. Versl. Kon. Akad. v. Wet. 26 (17) 566—580.
8. Jung. F. Die Feldableitung in allgemeinen Koordinaten. Wiener Sitz. Ber. 126 (17) 1438—1488.
9. Levi-Civita. F. Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specifieazione geometrica della eurvatura Riemanniana. Rend. di Pal. 42 (17).

1918. 1. Schouten. J. A. Über die Zahlensysteme der rotationalen Gruppe. Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel XII.
2. Schouten. J. A. Over het aantal graden van vrijheid van het geodetisch meebewegende assenstelsel en dc omvattende euklidische ruimte met het geringste aantal afmetingen. Versl. Kon. Akad. v. Wet. 27 (18) 16—22.
3. Schouten. J. A. Over het ontstaan eener praecessiebeweging tengevolge van het niet euklidisch zijn der ruimte in de nabijheid van de zon. Versl. Kon. Akad. v. Wet. 27 (18) 215—220.
4. Jung. F. Zur Ableitung der Schwerefeldglcichungen. Phys. Zeitsch. 19 (18) 61—66.
5. Serini. R. Euclideità dello spazio completamenta moto nella relatività generale di Einstein. Rend dei Lincei 27 (18) 235—238.
6. Fokker. B. D. Over hetgeen in niet-euklidische ruimten beantwoordt aan eene verplaatsing evenwijdig aan zichzelf en over de Riemanniaansche kromtemaat. Versl. Kon. Akad. v. Wet. 27 (18) 363—376.
7. Weyl. H. Gravitation und Electrizität. Sitz. Berl. Akad. (18) 465—480.

DRUCKFEHLERVERZEICHNISZ.

S. 8 Formel (3) steht $'x^\mu = \sum_\nu^{a,\ldots,d} \alpha_{\nu\mu}\, x^\nu$, zu lesen $x^\mu = \sum_\nu^{a,\ldots,d} \alpha_{\nu\mu}\, 'x^\nu$.

S. 15 Zeile 3 steht $\mathbf{i}_{412}$, zu lesen $-\mathbf{i}_{412}$.
Zeile 8 von (25) links, steht $-\mathbf{i}'_0$, zu lesen $\mathbf{i}'_0$.
Zeile 10 von (25) links, steht $-\mathbf{i}_{\bar{1}\bar{2}} = \mathbf{i}'_{12}$, zu lesen $-\mathbf{i}_{\bar{1}\bar{2}} = -\mathbf{i}'_{\bar{1}\bar{2}}$.

S. 26 dritte Spalte der Tabelle Zeile 2, 11 und 17, steht $\mathbf{c}$, zu lesen c.
in derselben Spalte Zeile 6, steht $\mathbf{b}$, zu lesen ${}_3\mathbf{b}$.

S. 43 Fuszn. *a*) steht $\mathbf{i}_l\, \mathbf{i}_j \overset{2}{.} \nabla\, \mathbf{i}_k$, zu lesen $\mathbf{i}_j\, \mathbf{i}_l \overset{2}{.} \nabla\, \mathbf{i}_k$.

INHALTSVERZEICHNIS.

Seite

Einleitung . . . . . 1—6

Erster Abschnitt.

Das Zahlensystem $R^0_{4\,x}$ der orthogonalen Gruppe in vier Grundvariablen . . . . . 7—38
Höhere Gröszen und ihre Zahlensysteme 7
Die allgemeine, symmetrische und alternierende Multiplikation der orthogonalen Gruppe 8
Das Zahlensystem R^0_4 der Lineargröszen 11
Die freien Rechenregeln des Systemes R^0_4 15
Beispiele einiger Produkte 16
Beispiel der Einführung idealer Vektoren 17
Geometrische Deutung einiger Produkte 18
Die skalaren Überschiebungen höherer Gröszen 21
Die lineare homogene Transformation von Vektoren und Bivektoren 23
Die Überschiebungsregel 24
Das System R^0_4 und die einfache Relativitätstheorie 25
Die Faltungen 27
Die vektorischen Überschiebungen höherer Gröszen 27
Die Zerlegung eines Affinors zweiter Hauptordnung 28
Das System S^l_n der Lineargröszen 29
Operatoren und Operatorkerne 33
Linien-, Flächen-, Hyperflächen- und Raumintegrale im R_4 . . 36

Zweiter Abschnitt.

Die Analysis zur allgemeinen Relativitätstheorie . . . . . 38—74
Die Urvariablen und die Vektoren $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ 38
Einführung des Fundamentaltensors 39
Orthogonalnetze und Orthogonalsysteme 43
Die Christoffel'schen Symbole 43
Die geodätische Linie 44
Das geodätisch bewegte Bezugsystem 46
Geodätisches Differential und Differentialquotient 46
Die Maschke'sche Symbolik 51

Seite

Die Methoden von L. Ingold und J. B. Shaw 52
Die Hessenberg'sche Methode 52
Die Methode von F. Jung 53
Geodätische Differentiation von Produkten 54
Die von $^2\mathbf{g}$ unabhängigen Differentiationen 55
Die Differentiationsregeln der kontravarianten Bestimmungszahlen von Vektoren und Bivektoren 56
Geodätische Differentiation des Fundamentaltensors 56
Mehrfache Differentiation 57
Der Affinor $\overset{4}{\mathbf{K}}$ 58
Einige Formeln für mehrfache Differentiationen 59
Linien-, Flächen-, Hyperflächen- und Raumintegrale 60
Eigenschaften besonderer Orthogonalnetze 62
Der Riemann-Christoffel'sche Affinor $G_{\varkappa\lambda\mu\nu}$ 64
Die geometrische Bedeutung von $\overset{4}{\mathbf{K}}$ 67
Die geometrische Bedeutung von K 67
Die geometrische Bedeutung von $^2\mathbf{K}$ und $^2\mathbf{G}$ 71
Der zweite Fundamentaltensor $^2\mathfrak{h}$ 72

Dritter Abschnitt.

Anwendungen ..... 75—91
Die Weltfunktion 75
Variation des elektromagnetischen Potentials 77
Virtuelle Verrückung der elektrisch geladenen Materie 77
Andere Deutung der virtuellen Verrückung der Materie 81
Variation des Gravitationspotentials 83
Die Bewegungsgleichungen abgeleitet aus den Feldgleichungen der Gravitation 87
Virtuelle Verrückung des Feldes 88
Zusatz die neueste Weyl'sche Theorie betreffend 89
Litteraturverzeichnisz ..... 92—95

APR 14 1922

BEGRÜNDUNG DER MENGENLEHRE UNABHÄNGIG VOM LOGISCHEN SATZ VOM AUSGESCHLOSSENEN DRITTEN

VON

DR. L. E. J. BROUWER

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT AMSTERDAM.

ZWEITER TEIL:

THEORIE DER PUNKTMENGEN.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam

(EERSTE SECTIE).

DEEL XII. N°. 7.

AMSTERDAM

JOHANNES MÜLLER

Maart 1919.

BEGRÜNDUNG DER MENGENLEHRE UNABHÄNGIG VOM LOGISCHEN SATZ VOM AUSGESCHLOSSENEN DRITTEN

VON

DR. L. E. J. BROUWER

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT AMSTERDAM.

ZWEITER TEIL:

THEORIE DER PUNKTMENGEN.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam

(EERSTE SECTIE).

DEEL XII. N°. 7.

AMSTERDAM

JOHANNES MÜLLER

1919.

Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten.

Zweiter Teil:

THEORIE DER PUNKTMENGEN.

1. *Die Grenzpunkte.*

Für die folgenden Betrachtungen wird die Menge η_2 der Paare von (nicht notwendig verschiedenen) Elementen einer geordneten Menge der Ordinalzahl η als gegeben angenommen. Diese Menge η_2 werden wir des kürzeren Ausdrucks wegen durch die Menge derjenigen Punkte der Ebene, deren rechtwinklige Cartesische Koordinaten endliche Dualbrüche sind, repräsentieren. Dementsprechend wird unsere Terminologie öfters der Vorstellung der Ebene entnommen sein, obwohl sie sich begrifflich ausschliesslich auf die Menge η_2 bezieht.

Unter einem *Quadrate* λ_ν verstehen wir das System der Eckpunkte eines die Vereinigung von vier (nach S. 8 des ersten Teiles definierten) Quadraten $\varkappa_{\nu+1}$ bildenden Quadrats. Die Species der Quadrate λ besitzt offenbar die Kardinalzahl a, und kann als eine Fundamentalreihe $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots$ geordnet werden.

Unter einem *Punkte der Ebene* verstehen wir eine unbegrenzt fortgesetzte Folge von Quadraten λ, deren jedes im Innengebiete des nächstvorangehenden enhalten ist.

Wenn zwei Punkte P_1 und P_2 die Eigenschaft besitzen, dass in jedem Quadrate von P_1 ein Quadrat von P_2 und in jedem Quadrate von P_2 ein Quadrat von P_1 enthalten ist, so sagen wir, dass P_1 und P_2 *zusammenfallen*. Eine Punktspecies, von der je zwei Punkte zusammenfallen, heisst eine *punktierte Species*.

Wenn das Quadrat q_1 des Punktes P_1 und das Quadrat q_2 des Punktes P_2 ausserhalb voneinander liegen, so heissen P_1 und P_2 *örtlich verschieden*.

Eine Menge, von der jedes Element einen Punkt der Ebene darstellt, heisst eine *ebene Punktmenge*. Die Species der Punkte der Ebene ist offenbar eine ebene Punktmenge; ihre Kardinalzahl ist c.

In derselben Weise, wie Punkte der Ebene und ebene Punkt-

mengen, können *Punkte des n-dimensionalen Raumes* und *n-dimensionale Punktmengen* definiert werden.[1]) Weil dieselben aber im folgenden ausser Betracht bleiben, so werden wir einen Punkt der Ebene auch kurz als *Punkt* und eine ebene Punktmenge auch kurz als *Punktmenge* bezeichnen.

Wenn für jedes n nach jeder ungehemmten Folge von $n-1$ Wahlen die Species derjenigen Ziffernkomplexe, die, als n-ter Ziffernkomplex gewählt, *nicht* die Hemmung des Prozesses herbeiführen, entweder endlich oder abzählbar unendlich ist, so heisst die bezügliche Punktmenge *numeriert*.

Wenn für die Elemente der Species M die Eigenschaften α_1 und α_2 einander kontradiktorisch gegenüberstehen, d. h. wenn jede dieser beiden Eigenschaften mit der Ausschliessung a priori der anderen äquivalent ist, während die Species derjenigen Elemente von M, welche die Eigenschaft α_1 bzw. α_2 besitzen, mit M_1 bzw. M_2 bezeichnet wird, so sagen wir, dass *M sich kontradiktorisch spaltet in M_1 und M_2*, und nennen *M_1 und M_2 konjugierte Spaltungsspecies von M*.

Die Species M der unbegrenzten Wahlfolgen einer Menge spaltet sich kontradiktorisch in die Species M_1 derjenigen Wahlfolgen, bei denen von einer gewissen Wahl an jedesmal nur für einen einzigen Ziffernkomplex keine Hemmung des Prozesses stattfindet und die Species M_2 derjenigen Wahlfolgen, bei denen unendlich oft für wenigstens einen von dem gewählten verschiedenen Ziffernkomplex keine Hemmung des Prozesses stattfindet.

Wenn die Species der ungehemmten endlichen Wahlfolgen von M in solcher Weise in die Species der M und M_1, nicht aber M_2, und die Species der M_2 angehörigen ungehemmten endlichen Wahlfolgen zerlegt ist, dass jede der Species M_1 und M_2 mit der Species der unbegrenzten Wahlfolgen einer Menge identisch ist, so sagen wir, dass M eine *innere Abbrechung erster Ordnung* zulässt und nennen M_1 die *innere Appendix* und M_2 die *innere Kohärenz* von M. In diesem Falle *setzt M sich auch aus M_1 und M_2 zusammen*.

Sei M die Species der unbegrenzten Wahlfolgen einer Menge und β eine wohlgeordnete Ordinalzahl. Alsdann definieren wir die mit $M(\beta)$ zu bezeichnende *β-te innere Kohärenz*, die mit $(\beta)M$ zu bezeichnende *β-te innere Adhärenz* und die mit $[\beta]M$ zu bezeichnende

---

[1]) Die Bezeichnung „Punkt der geraden Linie", bzw. „Punkt des n dimensionalen Cartesischen Raumes" ist schon S. 10 des ersten Teiles einmal gebraucht worden, aber in einem von dem hier definierten verschiedenen Sinne.

β-te innere Appendix auf Grund der folgenden Festsetzungen: $M(0)$ ist identisch mit M; wenn $M(0)$ eine innere Abbrechung erster Ordnung zulässt, so ist $M(1)$ mit der innern Kohärenz von $M(0)$ identisch; wenn $M(\beta)$ eine innere Abbrechung erster Ordnung zulässt, so ist $(\beta)M$ mit der innern Appendix von $M(\beta)$ identisch; wenn eine willkürliche wohlgeordnete Ordinalzahl $< \beta$ mit $\bar{\beta}$ bezeichnet wird, so ist $[\beta]M$ mit der Vereinigung aller $(\beta)M$ identisch; wenn $\beta = \beta_1 + \beta_2$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, und M eine innere Abbrechung β_1-ter Ordnung und $M(\beta_1)$ eine innere Abbrechung β_2-ter Ordnung zulässt, so sagen wir, dass M eine innere Abbrechung β-ter Ordnung zulässt und bezeichnen $\{M(\beta_1)\}(\beta_2)$ mit $M(\beta)$; wenn $\beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, und $M(\beta_1 + \ldots + \beta_{\nu-1})$ für jedes ν eine innere Abbrechung β_ν-ter Ordnung zulässt in solcher Weise, dass die Species der ungehemmten endlichen Wahlfolgen von M in die Species der M und $[\beta_1]M$, nicht aber $M(\beta_1)$, die Species der $M(\beta_1)$ und $[\beta_2]\{M(\beta_1)\}$, nicht aber $M(\beta_1 + \beta_2), \ldots$. und die Species der $\mathfrak{D}\{M(\beta_1), M(\beta_1 + \beta_2), \ldots\}$ angehörigen ungehemmten endlichen Wahlfolgen zerlegt ist und $\mathfrak{D}\{M(\beta_1), M(\beta_1 + \beta_2), \ldots\}$ mit der Species der unbegrenzten Wahlfolgen einer Menge identisch ist, so sagen wir, dass M eine innere Abbrechung β-ter Ordnung zulässt und bezeichnen $\mathfrak{D}\{M(\beta_1), M(\beta_1 + \beta_2), \ldots\}$ mit $M(\beta)$. Diese Definitionen sind offenbar unabhängig von der Erzeugungsart von β. *Wenn M eine innere Abbrechung β-ter Ordnung zulässt, so setzt M sich aus $M(\beta)$ und $[\beta]M$ zusammen.*

Wenn zwei Punktspecies Q und R die Eigenschaft besitzen, dass jeder Punkt von Q mit einem Punkte von R und jeder Punkt von R mit einem Punkte von Q zusammenfällt, so sagen wir, dass Q und R *zusammenfallen*.

Wenn wir eine Punktspecies, in welcher nur Quadrate, deren Seitenlänge unterhalb eines gewissen Maximums bleibt, auftreten, als *uniform* bezeichnen, so leuchtet sofort ein, dass *jede Punktspecies mit einer uniformen Punktspecies und jede Punktmenge mit einer uniformen Punktmenge zusammenfällt.*

Wenn wir weiter eine Punktspecies, in welcher für jedes ν die ν-ten Quadrate von allen Punkten die gleiche Seitenlänge besitzen, als *gleichmässig* bezeichnen, so gilt der Satz, dass *jede uniforme Punktspecies mit einer gleichmässigen Punktspecies und jede uniforme Punktmenge mit einer gleichmässigen Punktmenge zusammenfällt.* Sei nämlich m_ν die maximale Seitenlänge der von den ν-ten Wahlen der

uniformen Punktspecies Q erzeugten Quadrate und $\nu_1, \nu_2, \ldots$ eine solche Fundamentalreihe, dass $m_{\nu_n} < \frac{1}{2^{3n}}$. Alsdann erhalten wir eine mit Q zusammenfallende gleichmässige Punktspecies R, indem wir zunächst in Q nur die ν_1-ten, ν_2-ten usw. Quadrate beibehalten, und sodann jedes ν_n-te Quadrat q von Q durch ein solches Quadrat λ_{3n-1} ersetzen, dessen Mittelpunkt zunächst dem Mittelpunkte von q möglichst nahe liegt, und im übrigen möglichst grosse Koordinaten besitzt.

Wenn je zwei verschiedene Wahlfolgen einer Punktmenge zu örtlich verschiedenen Punkten führen, so heisst die Punktmenge *örtlich individualisiert*.

Wir sagen, dass zwei Punktspecies Q und R *örtlich übereinstimmen*, wenn weder ein von jedem Punkte von R örtlich verschiedener Punkt von Q, noch ein von jedem Punkte von Q örtlich verschiedener Punkt von R existieren kann.

Zwei Punktspecies Q und R heissen *örtlich kongruent*, wenn weder ein Punkt von Q, dessen Zusammenfallung mit einem Punkte von R unmöglich wäre, noch ein Punkt von R, dessen Zusammenfallung mit einem Punkte von Q unmöglich wäre, existieren kann.

Wenn kein mit einem Punkte der Punktspecies S zusammenfallender Punkt der Punktspecies R existieren kann und $\mathfrak{S}(R, S)$ mit der Punktspecies Q örtlich kongruent ist, so sagen wir, dass Q sich aus R und S *örtlich zusammensetzt* und nennen R und S *örtliche Komplementärspecies* voneinander in Q.

Die Species der mit Punkten der Punktspecies Q zusammenfallenden Punkte heisst die *ergänzende Punktspecies* oder kurz die *Ergänzung* von Q. Eine mit ihrer Ergänzung identische Punktspecies heisst eine *ganze Punktspecies*.

Wenn ein Quadrat des Punktes P im Innengebiete des Quadrates q enthalten ist, so werden wir sagen, dass P *in* q *enthalten* ist.

Wenn alle Punkte der Punktspecies Q in einem bestimmten Quadrate q enthalten sind, so nennen wir Q eine *geschränkte* Punktspecies. Die im folgenden in Betracht kommenden Punktspecies und Punktmengen werden ohne ausdrückliche Erwähnung des Gegenteils als geschränkt vorausgesetzt werden.

Der Punkt P heisst ein *Limespunkt* der Punktspecies Q, wenn in jedem Quadrate von P ein Quadrat eines Punktes von Q enthalten ist.

Der Punkt P heisst ein *Grenzpunkt* der Punktspecies Q, wenn in jedem Quadrate von P zwei ausserhalb voneinander liegende Quadrate von Punkten von Q enthalten sind.

Ein Punkt von Q, der gleichzeitig Grenzpunkt von Q ist, heisst ein *Kondensationspunkt* von Q.

Wenn das Quadrat q des Punktes P kein Quadrat eines Punktes der Punktspecies Q in seinem Innern enthalten kann, so heisst P ein von Q *freier* Punkt.

Wenn das Quadrat q des Punktes P die Eigenschaft besitzt, dass je zwei in q enthaltene Quadrate von Punkten von Q *nicht* ausserhalb voneinander liegen, so heisst P ein von Q *unbegrenzter* Punkt.

Ein zu Q gehöriger, aber von Q unbegrenzter Punkt heisst ein *isolierter* Punkt von Q.

Wenn jeder Punkt der Ebene von der geschränkten Punktmenge π unbegrenzt ist, so fällt π mit einer solchen Punktmenge zusammen, zu deren Kardinalzahl h eine endliche Kardinalzahl $k > h$ gefunden werden kann. Sei nämlich K das Quadrat, in dem die Punktmenge π, welche wir als gleichmässig voraussetzen dürfen, enthalten ist. Wir betrachten die Menge ρ derjenigen Punkte, deren erstes Quadrat q_1 ein willkürliches von K ganz oder teilweise überdecktes Quadrat λ_1, deren zweites Quadrat q_2 ein willkürliches im Innern von q_1 enthaltenes Quadrat λ_3, deren drittes Quadrat q_3 ein willkürliches in q_2 enthaltenes Quadrat λ_5 usw. ist. Wenn jeder Punkt von ρ von π unbegrenzt ist, so muss man bei der Erzeugung der Punkte von ρ nach einer endlichen Wahlfolge M fester Kardinalzahl m die Sicherheit erlangt haben, dass nach einer weiteren endlichen Wahlfolge der von M abhängigen Kardinalzahl m_1 ein Quadrat q erzeugt wird, innerhalb dessen je zwei Quadrate von Punkten von π *nicht* ausserhalb voneinander liegen. Mithin liegen, wenn wir das Maximum von m_1 mit m' und $m + m'$ mit m'' bezeichnen, je zwei im selben von K ganz oder teilweise überdeckten Quadrate $\lambda_{2m''-1}$ enthaltene Quadrate von Punkten von π *nicht* ausserhalb voneinander. Wir bestimmen nun eine solche Zahl ν, dass die Seitenlänge der von den ν-ten Wahlen von π erzeugten Quadrate $q'_\nu \leq \frac{1}{2^{2m''+1}}$ ist, lassen von den Quadraten q'_ν, (welche offenbar von einer zählbaren Wahlspecies erzeugt werden), diejenigen fort, welche nicht ausserhalb aller vorhergehenden liegen, und weisen jedem der mit q''_ν zu bezeichnenden übrigen zu: *erstens* ein solches Quadrat $\lambda_{2m''-1}$, dass zunächst die Mittelpunkte der beiden Quadrate einander möglichst nahe liegen, während im übrigen der Mittelpunkt des letzteren Quadrates möglichst grosse Koordinaten besitzt, so dass je zwei verschiedenen Quadraten q''_ν zwei verschiedene Quadrate $\lambda_{2m''-1}$ zugewiesen werden; *zweitens* denjenigen Punkt P'' von π, der erhalten wird, indem wir nach

der q''_ν erzeugenden Wahl immer wieder den erstmöglichen Ziffernkomplex von ζ wählen. Die Kardinalzahl der Punkte P'' bezeichnen wir mit h, die endliche Kardinalzahl der von K ganz oder teilweise überdeckten Quadrate $\lambda_{2m''-1}$ mit k. Alsdann ist $h < k$ und jeder Punkt von π fällt mit einem Punkte P'' zusammen, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Dieselbe Schlussweise führt mit einer geringen Abänderung zu folgendem Resultat: *Wenn jeder Punkt der Ebene von der geschränkten Punktspecies Q unbegrenzt ist, so fällt Q mit einer solchen in eine Species der Kardinalzahl h von punktierten Species zerlegten Punktspecies zusammen, dass eine endliche Kardinalzahl $k \geq h$ gefunden werden kann.*

Es existiert kein Grund zu behaupten, dass diese Eigenschaft auch für andere geschränkte Punktmengen bzw. Punktspecies, für welche kein Grenzpunkt existieren kann, ihre Gültigkeit behalte. Ebenso wäre die Aussage, dass jede unendliche geschränkte Punktspecies notwendig einen Grenzpunkt besitzen müsse, vollständig unberechtigt.

Eine Punktspecies Q, von der jeder Punkt Kondensationspunkt ist, heisst *in sich dicht.*

Wenn jeder Limespunkt der Punktspecies Q mit einem Punkte von Q zusammenfällt, so heisst Q *abgeschlossen.* Der Durchschnitt einer Species von abgeschlossenen ganzen Species ist wiederum eine abgeschlossene ganze Species.

Eine Punktspecies, welche sowohl in sich dicht wie abgeschlossen ist, heisst *perfekt.*

Eine Punktspecies Q heisst im Bereiche β *überall dicht*, wenn in jedem von β vollständig überdeckten Quadrate λ ein Punkt von Q enthalten ist.

Eine Punktspecies Q heisst im Bereiche β *nirgends dicht*, wenn innerhalb jedes von β vollständig überdeckten Quadrates λ ein weiteres Quadrat λ liegt, in dem kein Punkt von Q enthalten sein kann.

Die (offenbar ganze) Species der Limespunkte der Punktspecies Q heisst die *Abschliessung* von Q. Jeder Limespunkt der Abschliessung von Q gehört zur Abschliessung von Q. Eine abgeschlossene Punktspecies lässt sich auch als eine Punktspecies, deren Abschliessung und Ergänzung identisch sind, definieren.

Die (offenbar ganze) Species der Grenzpunkte der Punktspecies Q heisst die *Ableitung* von Q. Jeder Grenzpunkt der Abschliessung von Q, sowie jeder Limespunkt der Ableitung von Q ist ein Punkt

der Ableitung von Q. Auf Grund der letzteren Eigenschaft ist die Ableitung einer Punktspecies eine abgeschlossene Punktspecies und lässt eine perfekte Punktspecies sich auch als eine Punktspecies, deren Ableitung und Ergänzung identisch sind, definieren.

Die Species der Kondensationspunkte der Punktspecies Q heisst die *Kohärenz* von Q. Eine in sich dichte Punktspecies lässt sich auch als eine mit ihrer Kohärenz identische Punktspecies definieren. Eine in sich dichte Punktspecies ist in ihrer Ableitung als Teilspecies enthalten, und diese Ableitung ist perfekt.

Die Species der isolierten Punkte der Punktspecies Q heisst die *Appendix* von Q. Die Punktspecies Q spaltet sich kontradiktorisch in ihre Appendix und ihre Kohärenz. Die Abschliessung der Punktspecies Q spaltet sich kontradiktorisch in die Ableitung von Q und die Ergänzung der Appendix von Q.

Sei β eine wohlgeordnete Ordinalzahl. Wir definieren die mit $Q(\beta)$ zu bezeichnende *β-te Kohärenz* der Punktspecies Q auf Grund der folgenden Festsetzungen: $Q(0)$ ist identisch mit Q; $Q(1)$ ist identisch mit der Kohärenz von Q; wenn $\beta = \beta_1 + \beta_2$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, so ist $Q(\beta) = \{Q(\beta_1)\}(\beta_2)$; wenn $\beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, so ist $Q(\beta) = \mathfrak{D}\{Q(\beta_1), Q(\beta_1+\beta_2), Q(\beta_1+\beta_2+\beta_3), \ldots\}$. Diese Definition ist offenbar unabhängig von der Erzeugungsart von β. Weiter verstehen wir unter der *β-ten Adhärenz* $(\beta)Q$ von Q die Appendix von $Q(\beta)$ und wenn eine willkürliche wohlgeordnete Ordinalzahl $< \beta$ mit $\bar{\beta}$ bezeichnet wird, so verstehen wir unter der *β-ten Appendix* $[\beta]Q$ von Q die Vereinigung aller $(\bar{\beta})Q$.

Mittels der induktiven Methode beweisen wir leicht die beiden folgenden Sätze:

Für jedes β spaltet Q sich kontradiktorisch in $Q(\beta)$ und $[\beta]Q$. Sei nämlich $\beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation; wir nehmen an, dass für jede Punktspecies Q und für jedes ν bewiesen ist, dass Q sich in $Q(\beta_\nu)$ und $[\beta_\nu]Q$, mithin auch in $\mathfrak{S}\{[\beta_1]Q, [\beta_2]\{Q(\beta_1)\}, \ldots, [\beta_\nu]\{Q(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{\nu-1})\}\}$ und $Q(\beta_1+\ldots+\beta_\nu)$ kontradiktorisch spaltet; um sodann weiter einzusehen, dass Q sich ebenfalls in $Q(\beta)$ und $\mathfrak{S}\{[\beta_1]Q, [\beta_2]\{Q(\beta_1)\}, [\beta_3]\{Q(\beta_1+\beta_2)\}, \ldots\}$ kontradiktorisch spaltet, bemerken wir, dass zu jedem Punkte P von Q, für den die Zugehörigkeit zu $Q(\beta)$ a priori ausgeschlossen ist, ein solches ν angegeben werden kann, dass die Zugehörigkeit

zu $Q(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu)$ ebenfalls für P a priori ausgeschlossen ist, so dass P notwendig zu einer der Punktspecies $[\beta_1]Q, [\beta_2]\{Q(\beta_1)\}, \ldots,$ $[\beta_\nu]\{Q(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{\nu-1})\}$ gehören muss.

Für jedes β ist eine willkürliche in Q als Teilspecies enthaltene in sich dichte Punktspecies ebenfalls in $Q(\beta)$ als Teilspecies enthalten.

Wenn eine solche wohlgeordnete Ordinalzahl β'_Q bekannt ist, dass $Q(\beta'_Q)$ in sich dicht ist, so heisst $Q(\beta'_Q)$ die *finale Kohärenz* von Q.

Sei β eine wohlgeordnete Ordinalzahl. Wir definieren die mit $Q^{(\beta)}$ zu bezeichnende *β-te Ableitung* der Punktspecies Q auf Grund der folgenden Festsetzungen: $Q^{(0)}$ ist identisch mit der Abschliessung von Q; $Q^{(1)}$ ist identisch mit der Ableitung der Abschliessung von Q, d. h. mit der Ableitung von Q; wenn $\beta = \beta_1 + \beta_2$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation, so ist $Q^{(\beta)} = \{Q^{(\beta_1)}\}^{(\beta_2)}$; wenn $\beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, so ist $Q^{(\beta)} = \mathfrak{D}\{Q^{(\beta_1)}, Q^{(\beta_1+\beta_2)}, Q^{(\beta_1+\beta_2+\beta_3)}, \ldots\}$. Diese Definition ist offenbar unabhängig von der Erzeugungsart von β. Jedes $Q^{(\beta)}$ ist eine abgeschlossene ganze Punktspecies. Für jede kondensierte wohlgeordnete Ordinalzahl β ist $Q^{(\beta)}$ mit $Q^{(1)}(\beta-1)$ identisch.

Die induktive Methode liefert unmittelbar den Beweis der beiden folgenden Sätze:

Für jedes β ist $Q(\beta)$ als Teilspecies in $Q^{(\beta)}$ enthalten.

Für jedes β ist eine willkürliche in Q als Teilspecies enthaltene in sich dichte Punktspecies ebenfalls in $Q^{(\beta)}$ als Teilspecies enthalten.

Wenn eine solche wohlgeordnete Ordinalzahl β''_Q bekannt ist, dass $Q^{(\beta''_Q)}$ perfekt ist, so heisst $Q^{(\beta''_Q)}$ die *finale Ableitung* von Q.

Wenn eine Punktspecies sowohl eine finale Kohärenz, wie eine finale Ableitung besitzt, so ist erstere in letzterer als Teilspecies enthalten, wie unmittelbar daraus folgt, dass die finale Kohärenz in sich dicht ist.

Wir sagen, dass die Punktmenge π eine *Abbrechung erster Ordnung* zulässt, wenn die zu π gehörige Wahlmenge in solcher Weise in eine Menge von Punkten von $(0)\pi$, nicht aber Punkten von $\pi(1)$ angehörigen Wahlen, eine Menge von Punkten von $\pi(1)$ angehörigen Wahlen und eine *überflüssige* Wahlmenge ρ (dies soll besagen, dass jeder Punkt von π mit einem von nicht zu ρ gehörenden Wahlen erzeugten Punkte von π zusammenfällt, während jede auf eine Wahl von ρ folgende Wahl ebenfalls zu ρ gehört)' zerlegt ist, dass $(0)\pi$ mit einer von der ersten Wahlmenge erzeugten Punktmenge $(0)\bar{\pi}$

oder $[1]\bar{\pi}$, und $\pi(1)$ mit einer von der zweiten Wahlmenge erzeugten Punktmenge $\bar{\pi}(1)$ zusammenfällt.

Wenn die Punktmenge π eine Abbrechung erster Ordnung zulässt, so setzt sie sich aus $(0)\bar{\pi}$ und $\bar{\pi}(1)$ örtlich zusammen. Wenn wir nämlich die von den *nicht* zu ρ gehörigen Wahlen von π erzeugte Punktmenge mit τ bezeichnen, so fällt jeder Punkt von π mit einem Punkte von τ zusammen und muss deshalb, wenn er mit keinem Punkte von $(0)\pi$ zusammenfallen kann, mit einem Punkte von $\bar{\pi}(1)$ zusammenfallen. Mithin kann kein Punkt von π existieren, für den sowohl mit einem Punkte von $(0)\bar{\pi}$ wie mit einem Punkte von $\bar{\pi}(1)$ Zusammenfallung unmöglich wäre, d. h. für den Zusammenfallung mit einem Punkte von $\mathfrak{S}\{(0)\bar{\pi}), \bar{\pi}(1)\}$ unmöglich wäre.

Weiter sagen wir, dass *jede Punktmenge eine Abbrechung 0-ter Ordnung zulässt* und wenn β eine wohlgeordnete Ordinalzahl ist, so sagen wir, dass die Punktmenge π eine *Abbrechung β-ter Ordnung* zulässt: *erstens* wenn $\beta_1 = \beta_1 + \beta_2$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation und π eine Abbrechung β_1-ter Ordnung und $\bar{\pi}(\beta_1)$ eine Abbrechung β_2-ter Ordnung zulässt, in welchem Falle wir $\{\bar{\pi}(\beta_1)\}(\beta_2)$ mit $\bar{\pi}(\beta)$ und $\mathfrak{S}\{[\beta_1]\bar{\pi}, [\beta_2]\{\bar{\pi}(\beta_1)\}\}$ mit $[\beta]\bar{\pi}$ bezeichnen; *zweitens* wenn $\beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation und $\bar{\pi}(\beta_1 + \ldots + \beta_{\nu-1})$ für jedes ν eine Abbrechung β_ν-ter Ordnung zulässt in solcher Weise dass die zu π gehörige Wahlmenge in eine Menge von Punkten von π und von $[\beta_1]\pi$, nicht aber Punkten von $\pi(\beta_1)$ angehörigen Wahlen, eine Menge von Punkten von $\pi(\beta_1)$ und von $[\beta_2]\{\pi(\beta_1)\}$, nicht aber Punkten von $\pi(\beta_1 + \beta_2)$ angehörigen Wahlen, ..., eine Menge von Punkten von $\pi(\beta)$ angehörigen Wahlen und eine überflüssige Wahlmenge zerlegt ist, während $[\beta_1]\pi$ mit einer von der ersten Wahlmenge erzeugten Punktmenge $[\beta_1]\bar{\pi}, [\beta_2]\{\pi(\beta_1)\}$ mit einer von der zweiten Wahlmenge erzeugten Punktmenge $[\beta_2]\{\bar{\pi}(\beta_1)\}, \ldots$, und $\pi(\beta)$ mit einer von der vorletzten Wahlmenge erzeugten Punktmenge $\bar{\pi}(\beta)$ zusammenfällt, in welchem Falle wir $\mathfrak{S}\{[\beta_1]\pi, [\beta_1 + \beta_2]\bar{\pi}, \ldots\}$ mit $[\beta]\bar{\pi}$ bezeichnen.

Wenn die Punktmenge π eine Abbrechung β-ter Ordnung zulässt, so setzt sie sich aus $[\beta]\pi$ und $\bar{\pi}(\beta)$ örtlich zusammen.

Wenn π eine Abbrechung β'_π-ter Ordnung zulässt und $\bar{\pi}(\beta'_\pi)$ in sich dicht ist, so sagen wir, dass π eine *vollständige Abbrechung* zulässt.

Wenn die Punktmenge π eine vollständige Abbrechung zulässt und die wohlgeordnete Ordinalzahl β kondensiert ist, so ist jeder Punkt von $(\beta)\pi$ Grenzpunkt von $(0)\pi$, wie in folgender Weise mittels der

induktiven Methode eingesehen wird: Jeder Punkt P von $(1)\pi$ ist Grenzpunkt von π, also von $\mathfrak{S}\{(0)\bar{\pi}, \bar{\pi}(1)\}$, besitzt aber ein Quadrat q, innerhalb dessen kein Paar ausserhalb voneinander liegender Quadrate von $\bar{\pi}(1)$ liegen kann, so dass innerhalb jedes innerhalb q liegenden Quadrates von P zwei ausserhalb voneinander liegende Quadrate von $(0)\bar{\pi}$ liegen und demzufolge P Grenzpunkt von $(0)\bar{\pi}$ ist. Es sei nun $\beta = \beta_1 + \beta_2$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation und es sei der fragliche Satz sowohl für β_1 und β_2 wie für jedes $\bar{\beta}_1$ und jedes $\bar{\beta}_2$ bewiesen. Alsdann ist jeder Punkt von $(\beta)\pi = (0)\{\pi(\beta)\} = (0)\{\{\pi(\beta_1)\}\beta_2\} = (\beta_2)\{\pi(\beta_1)\}$ Grenzpunkt von $(0)\{\pi(\beta_1)\} = (\beta_1)\pi$ und jeder Punkt von $(\beta_1)\pi$ Grenzpunkt von $(0)\pi$, mithin jeder Punkt von $(\beta)\pi$ Grenzpunkt der Ableitung von $(0)\pi$ und demzufolge Punkt der Ableitung von $(0)\pi$. Es sei weiter $\beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation und es sei der fragliche Satz sowohl für jedes β_ν wie für jedes $\bar{\beta}_\nu$ bewiesen. Alsdann ist jeder Punkt P von $(\beta)\pi$ Grenzpunkt von π, also von $\mathfrak{S}\{[\beta]\bar{\pi}, \pi(\beta)\}$, besitzt aber ein Quadrat q, innerhalb dessen kein Paar ausserhalb voneinander liegende Quadrate von $\bar{\pi}(\beta)$ liegen kann, so dass innerhalb jedes innerhalb q liegenden Quadrates von P zwei ausserhalb voneinander liegende Quadrate von $[\beta]\bar{\pi}$, mithin zwei ausserhalb voneinander liegende Quadrate von Punkten der Ableitung von $(0)\pi$ liegen und demzufolge P Grenzpunkt von $(0)\pi$ ist.

Wenn die Punktmenge π eine Abbrechung erster Ordnung zulässt, so fällt $(0)\pi$ mit einer zählbaren, örtlich individualisierten Punktmenge zusammen. Sei nämlich $\mathfrak{z}_1$ die zählbare Menge der zu $(0)\bar{\pi}$, nicht aber zu $\bar{\pi}(1)$ gehörigen ungehemmten endlichen Wahlfolgen, π_1 die ebenfalls zählbare Teilmenge von $(0)\bar{\pi}$, welche entsteht, wenn jedes Element von $\mathfrak{z}_1$ derweise fortgesetzt wird, dass immer wieder der erstmögliche für $(0)\bar{\pi}$ zugelassene Ziffernkomplex von ζ gewählt wird. Alsdann fällt jeder Punkt von $(0)\pi$ mit einem Punkte von π_1 zusammen. Weiter besitzt ein willkürlicher Punkt P von π_1 ein Quadrat q, innerhalb dessen nicht zwei ausserhalb voneinander liegende Quadrate von π_1 liegen können, so dass ein willkürlicher Punkt P' von π_1, der auf Grund der Zählbarkeit von π_1 auf P folgt, ein solches Quadrat q' besitzt, dass P' mit P zusammenfällt oder von P örtlich verschieden ist, je nachdem q' innerhalb oder nicht innerhalb q liegt. Indem wir mithin die Punktmenge π_1 zunächst nach ihrer Zählbarkeit ordnen und sodann von ihr jeden mit einem vorangehenden zusammenfallenden Punkt fortlassen, erhalten wir eine örtlich individualisierte und noch immer zählbare Punktmenge π_2, mit der π_1 und demzufolge auch $(0)\pi$ zusammenfällt.

Wenn die Punktmenge π eine vollständige Abbrechung zulässt und sich in solcher Weise örtlich zusammensetzt aus einer in sich dichten Punktmenge ρ und einer von ρ freien und keine in sich dichte Teilmenge enthaltenden Punktmenge σ, dass die zu π gehörige Wahlmenge in eine Menge von zu σ, nicht aber zu ρ gehörigen Wahlen, eine Menge von zu ρ gehörigen Wahlen und eine überflüssige Wahlmenge zerlegt ist, so fallen einerseits ρ und $\pi(\beta'_\pi)$, andererseits σ und $[\beta'_\pi]\pi$ zusammen. Wenn wir nämlich die von den *nicht* überflüssigen Wahlen von π erzeugte Punktmenge mit τ bezeichnen, so fällt jeder Punkt von π mit einem Punkte von τ zusammen; wenn nun ein Punkt von $\pi(\beta'_\pi)$ mit einem von einer *nicht* Punkten von ρ angehörigen Wahl von τ erzeugten Punkte zusammenfiele, so würde ein solches Quadrat q von $\pi(\beta'_\pi)$ existieren, innerhalb dessen kein Quadrat von ρ läge, so dass die in sich dichte in q enthaltene Teilmenge von $\pi(\beta'_\pi)$ der Voraussetzung entgegen mit einer Teilmenge von σ zusammenfiele. Weiter ist jeder Punkt von $[\beta'_\pi]\pi$ frei von $\pi(\beta'_\pi)$, mithin von ρ, so dass für hinreichend grosses ν die ν-te Wahl des mit diesem Punkte zusammenfallenden Punktes von τ nicht zu ρ gehören kann und demzufolge zu σ gehören muss. Hieraus folgt, dass jeder Punkt von $[\beta'_\pi]\pi$ mit einem Punkte von σ zusammenfällt und in derselben Weise zeigen wir, dass jeder Punkt von σ mit einem Punkte von $[\beta'_\pi]\pi$ zusammenfällt.

Wenn die Punktmenge π eine vollständige Abbrechung zulässt und sich dadurch örtlich zusammensetzt aus einer in sich dichten und mit jeder sie als Teilmenge enthaltenden in sich dichten Teilmenge von π zusammenfallenden Punktmenge ρ und einer von ρ freien Punktmenge σ, dass die zu π gehörige Wahlmenge in eine Menge von zu σ, nicht aber zu ρ gehörigen Wahlen, eine Menge von zu ρ gehörigen Wahlen und eine überflüssige Wahlmenge zerlegt ist, so fallen einerseits ρ und $\pi(\beta'_\pi)$, andererseits σ und $[\beta'_\pi]\pi$ zusammen.

Eine Punktspecies heisst *limitierbar*, wenn eine mit ihrer Abschliessung zusammenfallende Punktmenge existiert.

Wir sagen, dass die limitierbare Punktspecies Q eine *Begrenzung β-ter Ordnung* zulässt, wenn eine mit $Q^{(0)}$ zusammenfallende, eine Abbrechung β-ter Ordnung zulassende Punktmenge existiert.

Wir sagen, dass die gleichmässige Punktspecies Q, deren n-te Quadrate die Seitenlänge $2^{1-\mu_n}$ besitzen, *katalogisiert* ist oder eine *Katalogisierung 0-ter Ordnung* zulässt, wenn $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ eine solche Fundamentalreihe von nicht abnehmenden endlichen Zahlen ist, dass σ_n für hinreichend grosses n jede Grenze übersteigt und für

jedes n eine solche endliche Menge s_n von Quadraten λ_{μ_n} angegeben werden kann, dass jedes nicht zu s_n gehörige Quadrat λ_{μ_n} zu keinem Punkte von Q gehört und zu jedem Quadrate von s_n für jedes nicht negative m ein Quadrat $\lambda_{\mu_{n+m}}$ von Q existiert, von dem es eine Entfernung $< \frac{1}{2^{\sigma_n}}$ besitzt.

Jede katalogisierte Punktspecies ist limitierbar. Um dies zu beweisen, bezeichnen wir die Menge der Quadrate von s_n ganz oder teilweise überdeckenden Quadrate λ_{μ_n} mit t_n, bestimmen eine solche Fundamentalreihe n_1, n_2, . . ., dass $\mu_{n_{\nu+1}} \geq \mu_{n_\nu} + 4$ und konstruieren zu einem willkürlichen Quadrate q_ν von t_{n_ν} zwei konzentrische Quadrate q'_ν und q''_ν, deren Seitenlänge $\frac{3}{4}$ bzw. $\frac{7}{8}$ der Seitenlänge von q_ν beträgt. Alsdann können wir nach einem durch die σ_{n_ν} und die μ_{n_ν} bestimmten Verfahren mittels Betrachtung von s_{n_ρ}, wo ρ sich als eine Funktion $\varphi(\nu)$ von ν festlegen lässt, mit Sicherheit feststellen, *entweder* dass alle Punkte der Abschliessung R von Q' ausserhalb q'_ν liegen, *oder* dass zu R in q''_ν enthaltene Punkte gehören. Indem wir diejenigen Quadrate q_ν, für welche der letztere Fall vorliegt, als Quadrate k_ν bezeichnen und der Reihe nach ein Quadrat k_1, ein Quadrat k_2 usw. in solcher Weise dass jedes von ihnen im Innern des vorangehenden liegt, übrigens aber willkürlich wählen, erzeugen wir eine mit R zusammenfallende Punktmenge S_Q.

Mit Rücksicht auf das weitere sorgen wir überdies dafür, dass $\mu_{n_{\nu+1}} \geq \mu_{n_\nu} + 5$, bestimmen $\rho = \varphi(\nu)$ durch die Forderungen $\mu_{n_\rho} > \mu_{n_\nu} + 7$ und $\sigma_{n_\rho} \geq \mu_{n_\nu} + 6$, konstruieren noch ein drittes mit q_ν konzentrisches Quadrat q'''_ν, dessen Seitenlänge $\frac{2}{3}\frac{7}{2}$ der Seitenlänge von q_ν beträgt und rechnen q_ν dann und nur dann zu den k_ν, wenn s_{n_ρ} teilweise innerhalb q'''_ν liegt.

Dieselbe Schlussweise liefert den Beweis des folgenden Satzes:

Wenn für jedes n eine endliche Menge s_n von Quadraten λ_{μ_n} definiert ist in solcher Weise, dass jedes Quadrat von s_{n+1} im Innern eines Quadrates von s_n enthalten ist und σ_1, σ_2, . . . eine solche Fundamentalreihe von nicht abnehmenden endlichen Zahlen darstellt, dass σ_n für hinreichend grosses n jede Grenze übersteigt, während zu jedem Quadrate von s_n für jedes positive m ein Quadrat von s_{n+m} existiert, von dem es eine Entfernung $< \frac{1}{2^{\sigma_n}}$ besitzt, so ist die Species R der in jedem s_n enthaltenen Punkte mit der Abschliessung einer katalogisierten Punktspecies identisch.[1])

[1]) Aus dem obigen Satze lässt sich, wenn wir einen Limespunkt von in der endlichen Quadratmenge k enthaltenen Punkten als *zu k gehörend* bezeichnen, weiter folgern:

Wir sagen, dass die katalogisierte Punktspecies Q eine *Katalogisierung erster Ordnung* zulässt, wenn $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots$ eine solche Fundamentalreihe von nicht abnehmenden endlichen Zahlen ist, dass σ'_n für hinreichend grosses n jede Grenze übersteigt und die Quadratmenge s_n für jedes n in zwei solche Quadratmengen s'_n und ${}_1s_n$ zerlegt ist, dass zu jedem Quadrate von s'_n ein einen Grenzpunkt von Q enthaltendes Quadrat von s_n existiert, von dem es eine Entfernung $< \frac{1}{2^{\sigma'_n}}$ besitzt, und in keinem Quadrate von ${}_1s_n$ ganz oder teilweise überdeckenden Quadrate λ_{μ_n} ein Grenzpunkt von Q enthalten sein kann. Wenn überdies für jedes n jeder in einem Quadrate von ${}_1s_n$ enthaltene Punkt von Q isoliert ist, so sagen wir, dass Q eine *isolierende Katalogisierung erster Ordnung* zulässt.

Hierbei dürfen wir annehmen, zunächst dass $\sigma_n \leq \mu_n - 2$ für jedes n, und auf Grund davon weiter, dass $\sigma'_n = \sigma_n$ für jedes n ist. Um nämlich letzteres zu erreichen, brauchen wir für $\sigma'_n < \sigma_n$ und $\sigma'_{n+m} \geq \mu_n$ nur diejenigen Quadrate aus s'_n fortzulassen, welche, ebensowenig wie die angrenzenden oder von ihnen teilweise überdeckten Quadrate λ_{μ_n}, ein Quadrat von s'_{n+m} in ihrem Innern enthalten.

Wenn Q eine Katalogisierung erster Ordnung zulässt, so kann die Ableitung $Q^{(1)}$ als Abschliessung einer katalogisierten Punktspecies dargestellt werden. Man findet nämlich eine entsprechende Quadratmenge $t_n^{(1)}$ in der Menge aller Quadrate von s'_n ganz oder teilweise überdeckenden Quadrate λ_{μ_n}.

Wenn Q eine isolierende Katalogisierung erster Ordnung zulässt, so lässt überdies die entsprechende Punktmenge S_Q eine Abbrechung erster Ordnung zu. Das Verfahren welches die $k_\nu^{(1)}$ unter den $q_\nu^{(1)}$ und die k_ν unter den q_ν auswählt, bestimmt nämlich die $k_\nu^{(1)}$ ausschliesslich unter den k_ν. Wenn wir weiter zu jedem q_ν noch ein viertes konzentrisches Quadrat q_ν'''' konstruieren, dessen Seitenlänge $\frac{2}{3}\frac{5}{2}$ der Seitenlänge von q_ν beträgt, und eine ein k_ν, nicht aber ein $k_\nu^{(1)}$

Wenn $\mu_1, \mu_2, \ldots$ und $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ solche Fundamentalreihen von nicht abnehmenden endlichen Zahlen sind, dass μ_n und σ_n für hinreichend grosses n jede Grenze übersteigen und für jedes n eine endliche Menge r_n von Quadraten λ_{μ_n} definiert ist in solcher Weise, dass jedes Quadrat von r_{n+1} entweder Teilquadrat eines Quadrates von r_n oder mit einem Quadrate von r_n identisch ist, während zu jedem Quadrate von r_n für jedes positive m ein Quadrat von r_{n+m} existiert, von dem es eine Entfernung $< \frac{1}{2^{\sigma_n}}$ besitzt, so ist die Species der zu jedem s_n gehörenden Punkte mit der Abschliessung einer katalogisierten Punktspecies identisch. Dies folgt unmittelbar aus dem obigen Satze, wenn wir jedes r_n durch die Menge der Quadrate von r_n ganz oder teilweise überdeckenden Quadrate λ_{μ_n} ersetzen.

erzeugende Wahl zur zweiten oder zur dritten Kategorie rechnen, je nachdem s_{n_ϱ} teilweise innerhalb oder nicht teilweise innerhalb des bezüglichen q_ν'''' liegt, so brauchen wir nur einerseits die auf Wahlen zweiter Kategorie folgenden, $k_\nu^{(1)}$ erzeugenden Wahlen, andererseits die Wahlen dritter Kategorie als überflüssig zu betrachten.

Sei R', R'', ... eine solche mit F zu bezeichnende Fundamentalreihe von Abschliessungen von katalogisierten Punktspecies, dass jedes ihrer Elemente im vorangehenden als Teilspecies enthalten ist. Alsdann dürfen wir annehmen, *erstens* dass für jedes n die Zahlen μ_n und σ_n für alle $R^{(\nu)}$ gleich sind, *zweitens* dass die zu $R^{(\nu+1)}$ gehörige Quadratmenge $s_n^{(\nu+1)}$ für jedes n und jedes ν eine Teilmenge der zu $R^{(\nu)}$ gehörigen Quadratmenge $s_n^{(\nu)}$ ist.[1]) Die Fundamentalreihe F wird *induzibel* genannt, wenn für jedes n ein solches ν_n angegeben werden kann, dass $s_n^{(\nu_n+\mu)}$ für jedes positive μ mit $s_n^{(\nu_n)}$ identisch ist. Alsdann ist jedes Quadrat von $s_{n+1}^{(\nu_{n+1})}$ im Innengebiete eines Quadrates von $s_n^{(\nu_n)}$ enthalten und der *Durchschnitt der induziblen Fundamentalreihe F*, welche ja mit der Species der für jedes n und jedes ν in $s_n^{(\nu)}$ enthaltenen Punkte identisch ist, *ist auch ihrerseits mit der Abschliessung einer katalogisierten Punktspecies*, nämlich mit der Species $R^{(\omega)}$ der für jedes n in $s_n^{(\nu_n)}$ enthaltenen Punkte, *identisch*.

Wenn β eine wohlgeordnete Ordinalzahl ist, so sagen wir, dass die Punktspecies Q eine *Katalogisierung* bzw. *isolierende Katalogisierung β-ter Ordnung* zulässt: *erstens*, wenn $\beta = \beta_1 + \beta_2$ auf Grund der ersten erzeugenden Operation und Q eine Katalogisierung bzw. isolierende Katalogisierung β_1-ter Ordnung und $Q^{(\beta_1)}$ eine Katalogisierung bzw. isolierende Katalogisierung β_2-ter Ordnung zulässt; *zweitens*, wenn $\beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation und $Q^{(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{\nu-1})}$ für jedes ν eine Katalogisierung bzw. isolierende Katalogisierung β_ν-ter Ordnung zulässt, während die Fundamentalreihe $Q^{(0)}$, $Q^{(\beta_1)}$, $Q^{(\beta_1+\beta_2)}$, ... induzibel ist.

Wenn Q eine Katalogisierung bzw. isolierende Katalogisierung β''_Q-ter Ordnung zulässt, und $Q^{(\beta''_Q)}$ perfekt ist, so sagen wir, dass Q eine *vollständige Katalogisierung* bzw. *vollständige isolierende Katalogisierung* zulässt.

---

[1]) Weil nämlich $R^{(\nu+1)}$ einerseits mit der Species der für jedes n in $s_n^{(\nu+1)}$ enthaltenen Punkte identisch ist, andererseits in der mit der Species der für jedes n in $s_n^{(\nu)}$ enthaltenen Punkte identischen Species $R^{(\nu)}$ als Teilspecies enthalten ist, so ist $R^{(\nu+1)}$ auch mit der Species der für jedes n in $\mathfrak{D}(s_n^{(\nu)}, s_n^{(\nu+1)})$ enthaltenen Punkte identisch.

Wenn Q eine Katalogisierung β-ter Ordnung zulässt, so kann sowohl $Q^{(\beta)}$ wie jedes $Q^{(\overline{\beta})}$ als Abschliessung einer katalogisierten Punktspecies dargestellt werden.

Wenn Q eine isolierende Katalogisierung β-ter Ordnung zulässt, so lässt überdies die entsprechende Punktmenge S_Q eine Abbrechung β-ter Ordnung zu. Wenn nämlich $\beta = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ auf Grund der zweiten erzeugenden Operation, während jedem n ein solches ϑ_n entspricht, dass $s_n^{(\beta_1+\ldots+\beta_{\vartheta_n}+\mu)}$ für jedes positive μ mit $s_n^{(\beta_1+\ldots+\beta_{\vartheta_n})}$ identisch ist und ψ_ν die grössere der beiden Zahlen ϑ_{n_ν} und $\vartheta_{n_{\varphi(\nu)}}$ darstellt, so ist die Menge der Quadrate $k_\nu^{(\beta_1+\ldots+\beta_{\psi_\nu}+\mu)}$ für jedes positive μ mit der Menge der Quadrate $k_\nu^{(\beta_1+\ldots+\beta_{\psi_\nu})}$ identisch.

Es kann vorkommen, dass eine katalogisierte Punktmenge π eine vollständige Abbrechung zulässt, ohne dass für eine mit ihrer Abschliessung zusammenfallende Punktmenge dasselbe zutrifft. Sei z. B. σ eine solche auf einem Liniensegment l der X-Axe liegende, katalogisierte und abgeschlossene Punktmenge, dass keine vollständige Abbrechung einer mit σ zusammenfallenden Punktmenge existiert, und π die Menge der Mitten der oberen der X-Axe parallelen Seiten der Quadrate der zu σ gehörigen Quadratmengen s_n. Alsdann ist π katalogisiert und lässt eine vollständige Abbrechung zu; eine mit ihrer Abschliessung $\mathfrak{S}(\sigma, \pi)$ zusammenfallende Punktmenge lässt aber keine vollständige Abbrechung zu. Umgekehrt kann es vorkommen, dass die zu einer katalogisierten Punktmenge π gehörige Punktmenge S_π eine vollständige Abbrechung zulässt, ohne dass für eine mit π zusammenfallende Punktmenge dasselbe zutrifft. Sei z. B. σ eine solche auf einem Liniensegment l der X-Axe liegende Punktmenge, dass keine vollständige Abbrechung einer mit σ zusammenfallenden Punktmenge existiert, und ϱ die Menge der Mitten der oberen der X-Axe parallelen Seiten derjenigen Quadrate λ, deren Mittelpunkt auf l liegt. Alsdann fällt $\mathfrak{S}(\sigma, \varrho)$ mit einer solchen katalogisierten Punktmenge π zusammen, dass keine mit π zusammenfallende Punktmenge eine vollständige Abbrechung zulässt; die zugehörige Punktmenge S_π dagegen lässt eine vollständige Abbrechung zu.

Jede perfekte Punktspecies Q, welche wenigstens einen Punkt enthält, ist der Menge C (vgl. S. 9 des ersten Teiles) *äquivalent,* und zwar (übrigens analog wie im Falle der S. 13 des ersten Teiles betrachteten Species S) auch dann, wenn wir für Punkte den Begriff „verschieden" im Sinne von „örtlich verschieden" auffassen. Erstens

nämlich ist Q eine Teilspecies der die Kardinalzahl c besitzenden Menge der Punkte der Ebene. Zweitens enthält Q eine Teilspecies, welche mit einer mit der Menge $G_{222\ldots}$ (vgl. S. 22 des ersten Teiles) gleichmächtigen, örtlich individualisierten Punktmenge zusammenfällt, und die Menge $G_{222\ldots}$ ihrerseits eine mit C gleichmächtige Teilmenge, so dass auch jedem Element von C ein Punkt von Q in solcher Weise zugeordnet werden kann, dass zwei verschiedenen Elementen von C zwei örtlich verschiedene Punkte von Q entsprechen.

Dieselbe Eigenschaft gilt auch für jede Punktspecies, welche eine perfekte Punktspecies als Teilspecies enthält.

Seien Q' und Q'' zwei katalogisierte Punktspecies. Alsdann dürfen wir annehmen, dass für jedes n die Zahlen μ_n und σ_n für Q' und Q'' gleich sind. Wenn $\tau_1, \tau_2, \ldots$ eine solche Fundamentalreihe von nicht abnehmenden endlichen Zahlen ist, dass τ_n für hinreichend grosses n jede Grenze übersteigt und die Quadratmenge $\mathfrak{D}(t'_n, t''_n)$[1]) für jedes n in zwei solche Quadratmengen $t_n^{(3)}$ und $t_n^{(4)}$ zerlegt ist, dass zu jedem Quadrate von $t_n^{(3)}$ für jedes positive m ein Quadrat von $t_{n+m}^{(3)}$ existiert, von dem es eine Entfernung $< \frac{1}{2^{\tau_n}}$ besitzt und für geeignetes positives ν kein Quadrat von $t_n^{(4)}$ an ein Quadrat von $\mathfrak{D}(t'_{n+\nu}, t''_{n+\nu})$ grenzt oder von ihm teilweise überdeckt wird, so dürfen wir annehmen, dass jedes Quadrat von $t_{n+1}^{(3)}$ in einem Quadrate von $t_n^{(3)}$ enthalten ist und nennen Q' und Q'' *in bezug aufeinander katalogisiert.*

Von zwei in bezug aufeinander katalogisierten Punktspecies ist der Durchschnitt der Abschliessungen mit der Abschliessung einer katalogisierten Punktspecies identisch. Im Falle der obigen Punktspecies Q' und Q'' ist dieser Durchschnitt nämlich mit der Species der Punkte, welche für jedes n in $t_n^{(3)}$ enthalten sind, identisch.

Die Abschliessungen zweier in bezug aufeinander katalogisierter Punktspecies besitzen gemeinsame Punkte oder nicht, je nachdem die entsprechende Quadratmenge $t_1^{(3)}$ ein Element besitzt oder nicht.

Eine Punktspecies Q heisst *zusammenhängend*, wenn zu je zwei beliebig vorgegebenen Punkten P_1 und P_2 von Q für beliebiges n eine endliche Folge $P_1, P'_1, P'_2, \ldots P'_k, P_2$ von Punkten von Q bestimmt werden kann, von denen je zwei aufeinanderfolgende in einem gemeinsamen Quadrate λ_n enthalten sind.

[1]) Diese Quadratmenge braucht nicht jeden Punkt zu enthalten, der sowohl in t'_n wie in t''_n enthalten ist; sie enthält aber diejenigen Quadrate λ_{μ_n}, welche sowohl ein Quadrat von s'_n wie ein Quadrat von s''_n ganz oder teilweise überdecken. Jedes Quadrat von $\mathfrak{D}(t'_{n+1}, t''_{n+1})$ ist im Innern eines Quadrates von $\mathfrak{D}(t'_n, t''_n)$ enthalten.

Eine Species von Quadraten λ heisst *zusammenhängend*, wenn zu je zwei beliebig vorgegebenen Quadraten q_1 und q_2 der Species eine endliche Folge $q_1, q'_1, q'_2, \ldots q'_h, q_2$ von Quadraten der Species bestimmt werden kann, von denen je zwei aufeinanderfolgende einander teilweise überdecken.

Zu jedem grössten zusammenhängenden Bestandteile β der zu einer katalogisierten Punktspecies Q gehörigen Quadratmenge t_n lässt sich entweder ein solches m angeben, dass *kein* Quadrat von t_{n+m} in Innern eines Quadrates von t_n liegt, oder es lässt sich feststellen, dass für jedes positive m ein Quadrat von t_{n+m} im Innern eines Quadrates von t_n liegt. Im ersteren Falle nennen wir β einen *unwesentlichen*, im letzteren einen *wesentlichen* zusammenhängenden Bestandteil von t_n.

Der Zusammenhang einer katalogisierten Punktspecies Q ist der Eigenschaft äquivalent, dass für jedes n die entsprechende Quadratmenge t_n nicht zwei wesentliche zusammenhängende Bestandteile aufweist und hieraus folgt unmittelbar weiter, dass *der Zusammenhang einer katalogisierten Punktspecies der Eigenschaft äquivalent ist, dass ihre Abschliessung nicht in zwei je wenigstens einen Punkt enthaltende, in bezug aufeinander katalogisierte Abschliessungen von katalogisierten Punktspecies zerlegt werden oder sich aus solchen zusammensetzen kann.*

Der Durchschnitt $R^{(\omega)}$ einer induziblen Fundamentalreihe $R', R'', \ldots$ von zusammenhängenden Abschliessungen von katalogisierten Punktspecies ist ebenfalls zusammenhängend. Wenn nämlich irgend ein $t_n^{(\nu_n)}$ mehr als einen wesentlichen zusammenhängenden Bestandteil enthielte, so könnte $R^{(\nu_n)}$ nicht zusammenhängend sein. Weil mithin $t_n^{(\nu_n)}$ für jedes n nicht mehr als einen wesentlichen zusammenhängenden Bestandteil enthält, so ist die Species $R^{(\omega)}$ der für jedes n in $t_n^{(\nu_n)}$ enthaltenen Punkte zusammenhängend.

Eine Punktspecies Q heisst *zusammenhängend zwischen zwei ihrer Punkte P_1 und P_2*, wenn für beliebiges n eine endliche Folge $P_1, P'_1, P'_2, \ldots P'_k, P_2$ von Punkten von Q bestimmt werden kann, von denen je zwei aufeinanderfolgende in einem gemeinsamen Quadrate λ_n enthalten sind.

Eine Species von Quadraten λ heisst *zusammenhängend zwischen zwei in ihr enthaltenen Punkten P_1 und P_2*, wenn eine solche endliche Folge $q_1, q'_1, q'_2, \ldots q'_h, q_2$ von Quadraten der Species bestimmt werden kann, dass P_1 in q_1 und P_2 in q_2 enthalten ist, während je zwei aufeinanderfolgende Quadrate der Folge einander teilweise überdecken.

Der Zusammenhang zwischen P_1 und P_2 einer katalogisierten Punktspecies Q ist der Eigenschaft äquivalent, dass für jedes n die entsprechende Quadratmenge t_n einen zwischen P_1 und P_2 zusammenhängenden Bestandteil aufweist und hieraus folgt unmittelbar weiter, dass *der Zusammenhang zwischen P_1 und P_2 einer katalogisierten Punktspecies der Eigenschaft äquivalent ist, dass ihre Abschliessung nicht in zwei in bezug aufeinander katalogisierte Abschliessungen von katalogisierten Punktspecies, von denen die eine P_1 und die andere P_2 enthält, zerlegt werden oder sich aus solchen zusammensetzen kann.*

Der Durchschnitt $R^{(\omega)}$ einer induziblen Fundamentalreihe $R', R'', \ldots$ von zwischen P_1 und P_2 zusammenhängenden Abschliessungen von katalogisierten Punktspecies ist ebenfalls zusammenhängend zwischen P_1 und P_2. Wenn nämlich irgend ein $t_n^{(\nu_n)}$ keinen zwischen P_1 und P_2 zusammenhängenden Bestandteil enthielte, so könnte $R^{(\nu_n)}$ nicht zusammenhängend zwischen P_1 und P_2 sein. Weil mithin $t_n^{(\nu_n)}$ für jedes n einen zwischen P_1 und P_2 zusammenhängenden Bestandteil enthält, so ist die Species $R^{(\omega)}$ der für jedes n in $t_n^{(\nu_n)}$ enthaltenen Punkte zusammenhängend zwischen P_1 und P_2.

2. *Bereiche und innere Grenzspecies.*

Den Quadraten eines nach S. 8 des ersten Teiles definierten Bereichs β fügen wir folgende Quadrate λ hinzu:

1. Wenn zwei Quadrate $\varkappa'$ und $\varkappa''$ von β eine gemeinsame Seite s der Länge l besitzen, dasjenige Quadrat λ der Seitenlänge l, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte von s zusammenfällt.

2. Wenn eine Seite des Quadrates $\varkappa'$ von β eine Seite s der Länge l des Quadrates $\varkappa''$ von β als Teil enthält, dasjenige Quadrat λ der Seitenlänge l, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte von s zusammenfällt.

3. Wenn in einem Punkte P drei oder vier Quadrate $\varkappa$ von β zusammenstossen, dasjenige Quadrat λ, dessen Mittelpunkt in P liegt und dessen Seitenlänge der Seitenlänge des kleinsten der in P zusammenstossenden Quadrate gleich ist.

Die ursprünglichen Quadrate $\varkappa$ von β zusammen mit den obigen neu hinzugefügten Quadraten λ werden wir als die *Ziegelquadrate des Bereichs* β bezeichnen.

Die Species der je zu einer endlichen Menge von Quadraten von β gehörigen oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Species

der je in einem Ziegelquadrate von β enthaltenen Punkte werden wir auch kurz als *den Bereich* β bezeichnen.

Jeder Bereich fällt mit einer numerierten Punktmenge zusammen. Um dies zu beweisen, zerlegen wir die Quadrate von β in solcher Weise in als *Quadrate zweiter Ordnung von* β zu bezeichnende, von keinem Ziegelquadrate von β zerlegte Quadrate $\varkappa$, dass die Seitenlängen der innerhalb eines willkürlichen Ziegelquadrates z von β liegenden Quadrate zweiter Ordnung von β höchstens $\frac{1}{8}$ des *Massstabes* von z, d. h. des Minimums der Seitenlängen von z und den z teilweise überdeckenden Ziegelquadraten betragen, im übrigen aber möglichst gross sind. Aus den Quadraten zweiter Ordnung von β leiten wir die *Ziegelquadrate zweiter Ordnung von* β in derselben Weise her, wie wir aus den Quadraten von β die Ziegelquadrate von β hergeleitet haben. Sodann leiten wir der Reihe nach für jedes n aus den Quadraten und Ziegelquadraten n-ter Ordnung von β die *Quadrate und Ziegelquadrate* $(n+1)$*-ter Ordnung von* β in derselben Weise her, wie wir aus den Quadraten und Ziegelquadraten von β die Quadrate und Ziegelquadrate zweiter Ordnung von β hergeleitet haben. Indem wir der Reihe nach für jedes n ein Ziegelquadrat n-ter Ordnung von β in solcher Weise, dass jedes dieser Quadrate im Innern des vorangehenden liegt, übrigens aber willkürlich wählen, erzeugen wir eine numerierte Punktmenge π_β, welche mit β zusammenfällt. Sei nämlich die Quadratfolge $q_1, q_2, \ldots$ ein Punkt P von β. Wir bestimmen eine möglichst kleine derartige Zahl n_1, dass q_{n_1} im Innern eines Ziegelquadrates a_1 von β liegt und vom Rande von a_1 eine wenigstens $\frac{1}{8}$ des Massstabes von a_1 betragende Entfernung besitzt. Sodann bestimmen wir eine möglichst kleine derartige Zahl n_2, dass q_{n_2} im Innern eines Ziegelquadrates a_2 zweiter Ordnung von β liegt und vom Rande von a_2 eine wenigstens $\frac{1}{8}$ des Massstabes von a_2 betragende Entfernung besitzt. Indem wir in dieser Weise fortfahren und überdies der eindeutigen Bestimmtheit wegen für jedes ν die Koordinaten des Mittelpunktes von a_ν möglichst gross wählen, erzeugen wir eine Quadratfolge $a_1, a_2, \ldots$, welche einen mit P zusammenfallenden Punkt von π_β darstellt.

Sei E ein willkürliches Quadrat $\varkappa_1$. Der Einfachheit halber wollen wir im weiteren je zwei Quadrate $\varkappa$ der gleichen Seitenlänge wie E, samt den zu ihnen gehörigen Punkten der Ebene, deren rechtwinklige Cartesische Koordinaten endliche Dualbrüche sind, ihrer Kongruenz entsprechend identifiziert denken, worin, weil die von uns betrachteten Punktspecies als geschränkt vorausgesetzt werden, keinerlei Beschränkung liegt.

Seien $\varkappa', \varkappa'', \varkappa''', \ldots$ die Quadrate des Bereichs β. Sei l_ν das

Minimum der Seitenlängen von $\varkappa', \varkappa'', \ldots \varkappa^{(\nu)}$ und M_ν die Menge derjenigen Teilquadrate von E der Seitenlänge l_ν, welche von keinem der Quadrate $\varkappa', \varkappa'', \ldots \varkappa^{(\nu)}$ überdeckt werden. Die Species der für jedes ν zu M_ν gehörigen Punkte bildet eine abgeschlossene ganze Species $k = K(\beta)$, welche wir das *Komplement von* β nennen werden. Ebenso werden wir β als das *Komplement* $K(k)$ *von* k bezeichnen. Wenn wir die Species der Punkte der Ebene kurz als E bezeichnen, so *sind* β *und* k *Komplementärspecies voneinander in* E.

Wenn $K(\beta)$ mit einer katalogisierten Punktspecies zusammenfällt, so nennen wir β *komplementär katalogisiert*. Insbesondere ist also jedes Gebiet ein komplementär katalogisierter Bereich.

Die Vereinigung einer endlichen Menge sowie einer Fundamentalreihe von Bereichen ist wiederum ein Bereich.

Die endliche Bereichmenge B heisst *durchsichtig*, *erstens* wenn ein Quadrat $\varkappa$ angegeben werden kann, das von jedem Elemente von B überdeckt wird, *zweitens* wenn kein Quadrat $\varkappa$ existieren kann, das von jedem Elemente von B überdeckt wird.

Der Durchschnitt einer durchsichtigen endlichen Menge von Bereichen fällt entweder fort, oder ist wiederum ein Bereich.

Unter einer *innern Grenzspecies* verstehen wir den Durchschnitt I einer Fundamentalreihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ von Bereichen. Wenn I wenigstens einen Punkt enthält, so dürfen wir annehmen, dass jedes Quadrat von $\beta_{\nu+1}$ von β_ν überdeckt wird.

Jede mit einer katalogisierten Punktspecies zusammenfallende innere Grenzspecies fällt mit einer Punktmenge zusammen. Um dies zu beweisen, konstruieren wir in der oben angegebenen Weise die Ziegelquadrate von β_1 und zu einem willkürlichen Ziegelquadrate q_1 von β_1 zwei solche konzentrische Quadrate q'_1 und q''_1, dass die Entfernung des Randes von q'_1 bzw. q''_1 vom Rande von q_1, $\frac{1}{8}$ bzw. $\frac{1}{16}$ des Massstabes von q_1 beträgt. Alsdann können wir nach einem *bestimmten* Verfahren mit Sicherheit feststellen, *entweder* dass alle Punkte von I ausserhalb q'_1 liegen, *oder* dass zu I in q''_1 enthaltene Punkte gehören. Im ersteren Falle bezeichnen wir q_1 als *unwesentliches*, im letzteren Falle als *wesentliches Ziegelquadrat* von β_1. Sodann zerlegen wir die Quadrate von β_2 in solcher Weise in als *modifizierte Quadrate von* β_2 zu bezeichnende, von keinem Ziegelquadrate von β_1 zerlegte Quadrate $\varkappa$, dass die Seitenlängen der innerhalb eines willkürlichen Ziegelquadrates z_1 von β_1 liegenden modifizierten Quadrate von β_2 höchstens $\frac{1}{16}$ des Massstabes von z_1 betragen, im übrigen aber möglichst gross sind. Aus den modifizierten Quadraten von β_2 leiten wir in der oben angegebenen Weise

die *Ziegelquadrate von* β_2 her und definieren die *wesentlichen Ziegelquadrate von* β_2 in analoger Weise, wie für β_1. In dieser Weise fortfahrend, bestimmen wir der Reihe nach für jedes n zunächst die *modifizierten Quadrate* und sodann die *Ziegelquadrate* und *wesentlichen Ziegelquadrate von* β_n. Die Menge π_I derjenigen Punkte, welche erzeugt werden, indem der Reihe nach für jedes n ein solches wesentliches Ziegelquadrat von β_n gewählt wird, dass jedes dieser Quadrate im Innern des vorangehenden liegt, *fällt mit I zusammen.* Sei nämlich die Quadratfolge $q_1, q_2, \ldots$ ein Punkt P von I, so können wir eine möglichst kleine derartige Zahl n_1 bestimmen, dass q_{n_1} im Innern eines wesentlichen Ziegelquadrates a_1 von β_1 liegt und vom Rande von a_1 eine wenigstens $\frac{1}{16}$ des Massstabes von a_1 betragende Entfernung besitzt. Sodann können wir eine möglichst kleine derartige Zahl n_2 bestimmen, dass q_{n_2} im Innern eines wesentlichen Ziegelquadrates a_2 von β_2 liegt und vom Rande von a_2 eine wenigstens $\frac{1}{16}$ des Massstabes von a_2 betragende Entfernung besitzt. Indem wir in dieser Weise fortfahren und überdies der eindeutigen Bestimmtheit wegen für jedes ν die Koordinaten des Mittelpunktes von a_ν möglichst gross wählen, erzeugen wir eine Quadratfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots$, welche einen mit P zusammenfallenden Punkt von π_I darstellt.

Unter einer *äussern Grenzspecies* verstehen wir die Vereinigung A einer solchen Fundamentalreihe $k_1, k_2, \ldots$ von Komplementen von Bereichen $\beta_1, \beta_2, \ldots$, wo $k_\nu = \mathfrak{D}(M_{\nu 1}, M_{\nu 2}, \ldots)$ ist, dass jedes $M_{\nu+1,\mu}$ ein $M_{\nu\sigma}$ als Teil enthält. Wenn dabei jedes k_ν mit der Abschliessung einer katalogisierten Punktspecies identisch ist, so heisst *A konsolidiert.* Gleichzeitig mit der äussern Grenzspecies A wird eine innere Grenzspecies $I = \mathfrak{D}(\beta_1, \beta_2, \ldots)$ definiert, welche wir das *Komplement* $K(A)$ *von* A nennen werden. Ebenso wird A als das *Komplement* $K(I)$ *von* I bezeichnet werden.

Es existiert kein Grund zu behaupten, dass die Vereinigung einer endlichen Menge von inneren Grenzspecies wiederum eine innere Grenzspecies oder die Vereinigung einer endlichen Menge von äusseren Grenzspecies wiederum eine äussere Grenzspecies, nicht einmal sogar, dass die Vereinigung einer endlichen Menge von Bereichkomplementen wiederum ein Bereichkomplement sei.

Sei π eine vollständig abbrechbare Punktmenge. Wir dürfen annehmen, dass π uniform ist. Die Punktmenge $\pi(\beta'_\pi)$ bezeichnen wir kurz mit π_1, die auf Grund von S. 12 Z. 19—17 v. u. mit $[\beta'_\pi]\pi$ bzw. $[\beta'_\pi - \gamma]|\pi(\gamma)|$ zusammenfallende zählbare, örtlich individualisierte Punktmenge mit π_2 bzw. ${}_\gamma\pi_2$. Zu jedem Punkte P eines $(\beta)\pi$ kann nach einem bestimmten Gesetze ein solches n_P, ein solches

ν_ρ und ein solches μ_ρ gefunden werden, das jedes von einer ν_ρ-ten Wahl von $\pi(\beta)$ erzeugte Quadrat entweder zu einem mit P zusammenfallenden Punkte gehört oder eine Entfernung $> 2^{-\mu_\rho}$ vom n_ρ-ten Quadrate von P besitzt. Die Species der je in einem n_ρ-ten bzw. $(n_\rho + m)$-ten Quadrate ${}_\rho q_1$ bzw. ${}_\rho q'_{m+1}$ eines Punktes P von π_2 enthaltenen Punkte bildet einen Bereich β''_1 bzw. β''_{m+1}. Die Species der je in einem Quadrate ${}_\rho q_{m+1}$ eines Punktes P von ${}_\gamma\pi_2$ enthaltenen Punkte bildet einen Bereich ${}_\gamma\beta'_{m+1}$. Die Species der je in einem n-ten Quadrate eines Punktes von π_1 enthaltenen Punkte bildet einen Bereich β'_n. Den Bereich $\mathfrak{S}(\beta'_n, \beta''_n)$ bzw. $\mathfrak{S}(\beta'_n, {}_\gamma\beta''_n)$ bezeichnen wir mit β'''_n bzw. ${}_\gamma\beta'''_n$, die inneren Grenzspecies $\mathfrak{D}(\beta'_1, \beta'_2, \ldots)$, $\mathfrak{D}(\beta''_1, \beta''_2, \ldots)$, $\mathfrak{D}(\beta'''_1, \beta'''_2, \ldots)$, $\mathfrak{D}({}_\gamma\beta''_1, {}_\gamma\beta''_2, \ldots)$ und $\mathfrak{D}({}_\gamma\beta'''_1, {}_\gamma\beta'''_2, \ldots)$ der Reihe nach mit I', I'', I''', I''_γ und I'''_γ. Sei P ein Punkt von I''', dessen Zusammenfallung mit einem Punkte von $[\beta'_\pi]\pi$ unmöglich ist. Wenn P im Quadrate ${}_\kappa q_m$ eines Punktes K von $(0)\pi$ enthalten wäre, so könnte P für hinreichend grosses n nicht in β'_n und nur dann in ${}_\eta q_n$ enthalten sein, wenn H mit K zusammenfiele. Dann aber müsste auch P mit K zusammenfallen, was der Voraussetzung widerspricht, so dass P in keinem Quadrate ${}_\kappa q_m$ eines Punktes K von $(0)\pi$ enthalten sein kann. Weil mithin P für jedes n in ${}_1\beta'''_n$ enthalten ist, so ist P ein Punkt von I'''_1. Und analog lässt sich unter Heranziehung der induktiven Methode beweisen, dass P ein Punkt von $I'''_{\beta'_\pi}$, d. h. von I' ist.

Wenn wir nun den Durchschnitt von I'' und der Abschliessung von $\pi(\beta'_\pi)$ mit R, $\mathfrak{S}\{R, [\beta'_\pi]\pi\}$ mit S und $\mathfrak{S}(R, \pi)$ mit T bezeichnen, so kann kein Punkt von I''' existieren, dessen Zusammenfallung mit einem Punkte von S unmöglich wäre. Mithin kann erst recht kein Punkt von I'' existieren, dessen Zusammenfallung mit einem Punkte von T unmöglich wäre, so dass *I'' und T örtlich kongruent sind.* Weil andererseits I''' eine mit π örtlich kongruente Punktmenge, nämlich $\mathfrak{S}(\pi_1, \pi_2)$ als Teilspecies enthält, so können wir folgenden Satz formulieren:

Zu jeder vollständig abbrechbaren Punktmenge π existiert eine innere Grenzspecies, welche mit der Vereinigung von π und einer Teilspecies der Abschliessung der finalen Kohärenz von π örtlich kongruent ist und eine mit π örtlich kongruente Punktmenge als Teilspecies enthält.

Und im besonderen:

Zu jeder vollständig abbrechbaren Punktmenge π, deren finale Kohärenz fortfällt, existiert eine mit π örtlich kongruente innere Grenzspecies.

Sei $I = \mathfrak{D}(\beta_1, \beta_2, \ldots)$ eine wenigstens einen Punkt enthaltende

in sich dichte innere Grenzspecies. Sei q ein Quadrat eines Punktes P von I. Alsdann ist innerhalb q ein in β_1 enthaltenes Quadrat z von P bestimmt, innerhalb z zwei ausserhalb voneinander liegende Quadrate q_0 und q_1 von Punkten P_0 und P_1 von I, innerhalb jedes q_ν ($\nu = 0, 1$) ein in β_2 enthaltenes Quadrat z_ν von P_ν, innerhalb jedes z_ν zwei ausserhalb voneinander liegende Quadrate $q_{\nu 0}$ und $q_{\nu 1}$ von Punkten $P_{\nu 0}$ und $P_{\nu 1}$ von I, innerhalb jedes $q_{\nu\mu}$ ($\nu, \mu = 0, 1$) ein in β_3 enthaltenes Quadrat $z_{\nu\mu}$ von $P_{\nu\mu}$, usw. Die Menge der Quadrate $z_{\nu_1} \ldots {}_{\nu_\alpha}$ (α eine willkürliche ganze positive Zahl, jedes $\nu_\sigma = 0$ oder 1) bestimmt eine mit der Menge $G_{222\ldots}$ gleichmächtige, örtlich individualisierte Teilspecies von I. Hieraus folgern wir in genau derselben Weise wie S. 18 für die perfekten Punktspecies, dass *jede wenigstens einen Punkt enthaltende in sich dichte innere Grenzspecies der Menge C äquivalent ist.*

Dieselbe Eigenschaft gilt auch für jede Punktspecies, welche eine wenigstens einen Punkt enthaltende in sich dichte innere Grenzspecies oder eine mit einer solchen zusammenfallende Punktspecies als Teilspecies enthält.

Eine vollständig abbrechbare, mit einer innern Grenzspecies I zusammenfallende Punktmenge i fällt entweder mit einer zählbaren Punktmenge zusammen oder ist der Menge C äquivalent. Zunächst dürfen wir nämlich annehmen, dass i uniform ist. Sei weiter, im Falle dass $\bar{i}(\beta'_i)$ wenigstens einen Punkt enthält, I als der Durchschnitt der Bereiche $\beta_1, \beta_2, \ldots$ definiert und β'_n für jedes n der von der Species der je in einem n-ten Quadrate eines Punktes von $\bar{i}(\beta'_i)$ enthaltenen Punkte gebildete Bereich. Alsdann bildet für jedes n der Durchschnitt von β_n und β'_n einen Bereich β°_n und $\mathfrak{D}(\beta^\circ_1, \beta^\circ_2, \ldots)$ eine in I als Teilspecies enthaltene innere Grenzspecies I°, welche ihrerseits wieder eine leicht definierbare, mit der Menge $G_{222\ldots}$ gleichmächtige, örtlich individualisierte Punktspecies als Teilspecies enthält.

Sei R die Abschliessung einer katalogisierten Punktspecies, s_n für jedes n eine solche Menge von Quadraten λ_{μ_n}, dass jedes Quadrat von s_{n+1} im Innern eines Quadrates von s_n enthalten und die Species der in jedem s_n enthaltenen Punkte mit R identisch ist, π eine zählbare Punktmenge und π_n die Menge der auf Grund der Zählbarkeit von π den Ziffernkomplexen $1, 2, \ldots n$ von ζ zugeordneten Punkte von π. Die Species der von jedem Punkte von π_n örtlich verschiedenen, in s_n enthaltenen Punkte bildet einen Bereich β_n und der Durchschnitt $\mathfrak{D}(\beta_1, \beta_2, \ldots)$ *eine innere Grenzspecies I, welche mit der Species der von jedem Punkte von π örtlich verschiedenen Punkte von R identisch ist.*

Von diesem Satze gilt einerseits folgende Spezialisierung:

Wenn die Abschliessung R einer katalogisierten Punktspecies in solcher Weise mit der Vereinigung zweier zählbarer Punktmengen π' und π'' zusammenfällt, dass jeder Punkt von π' von jedem Punkte von π'' örtlich verschieden ist, so fallen π' und π'' je mit einer innern Grenzspecies zusammen.

Andererseits lässt derselbe Satz sich auf Grund der Eigenschaft, dass der Durchschnitt zweier innerer Grenzspecies wiederum eine innere Grenzspecies ist, wie folgt verallgemeinern:

Die Species derjenigen Punkte einer innern Grenzspecies I, welche von jedem Punkte einer konsolidierten äussern Grenzspecies A örtlich verschieden sind, ist mit einer innern Grenzspecies I' identisch.

3. *Der Inhalt der Punktspecies.*

Sei, für jedes ganze positive ν, $i_\nu = \frac{a_\nu}{2^\nu}$ bestimmt, wo a_ν eine ganze positive Zahl ist. Wir sagen, dass die mit i zu bezeichnende Fundamentalreihe $i_1, i_2, \ldots$ eine *limitierte Folge* bildet, wenn jedem ganzen positiven μ ein solches ν zugeordnet ist, dass $[i_{\nu+\lambda} - i_\nu] < \frac{1}{2^\mu}$ für jedes nicht negative λ. Die Begriffe *„gleich"*, *„grösser"* und *„kleiner"* in bezug auf limitierte Folgen, sowie der Begriff *„limitierte Folge von limitierten Folgen"*, sind ohne weiteres klar.

Wenn der Inhalt der ersten ν Quadrate eines Bereichs β mit i_ν bezeichnet wird und $i_1, i_2, \ldots$ eine limitierte Folge i bilden, so heisst β *messbar* und i der *Inhalt* von β.

Sei, für jedes ganze positive ν, M_ν eine endliche Menge von Quadraten $\varkappa$. Die Species der zur endlichen Quadratmenge M_ν gehörigen Punkte werden wir kurz als *die endliche Quadratmenge* M_ν bezeichnen. Wenn dann jedes $M_{\nu+1}$ zu M_ν gehört und die Inhalte i_ν der M_ν eine limitierte Folge i bilden, so heisst das Bereichkomplement $k = \mathfrak{D}(M_1, M_2, \ldots)$ *messbar* und i der *Inhalt* von k.

Zu jedem messbaren Bereichkomplemente k vom positiven Inhalte i und jeder ganzen positiven Zahl ρ existiert eine in k als Teilspecies enthaltene messbare Abschliessung einer katalogisierten Punktspecies, deren Inhalt grösser als $i - \frac{1}{2^\rho}$ ist. Wenn wir nämlich $\frac{1}{2^{4\nu+\rho}}$ mit ε_ν bezeichnen, so enthält die Fundamentalreihe $M_1, M_2, \ldots$

eine solche Teilfundamentalreihe $M_{\tau_1}, M_{\tau_2}, \ldots$ $(\tau_{\nu+1} > \tau_\nu)$, dass $[i_{\tau_{\nu+\lambda}} - i_{\tau_\nu}] < \varepsilon_\nu$ für jedes positive λ. Wenn wir M_{τ_ν} kurz mit L_ν bezeichnen und von jedem L_ν die Durchschnitte mit denjenigen Innengebieten von Quadraten $\varkappa_2$, deren Durchschnitte mit L_1 einen Inhalt $< 2\varepsilon_1$ besitzen, fortlassen, so bleibt ein Rest ${}_1L_\nu$ übrig. Wenn wir von jedem ${}_1L_\nu$ die Durchschnitte mit denjenigen Innengebieten von Quadraten $\varkappa_3$, deren Durchschnitte mit ${}_1L_2$ einen Inhalt $< 2\varepsilon_2$ besitzen, fortlassen, so bleibt ein Rest ${}_2L_\nu$ übrig. Wenn wir von jedem ${}_2L_\nu$ die Durchschnitte mit denjenigen Innengebieten von Quadraten $\varkappa_4$, deren Durchschnitte mit ${}_2L_3$ einen Inhalt $< 2\varepsilon_3$ besitzen, fortlassen, so bleibt ein Rest ${}_3L_\nu$ übrig. In dieser Weise fahren wir fort. Alsdann ist die Speeies der für jedes ν zu ${}_\nu L_\nu$ gehörigen Punkte ein mit der Absehliessung einer katalogisierten Punktspeeies identiseh, messbares Bereichkomplement k_1, dessen Inhalt in der Tat grösser als $i - \frac{1}{2^\rho}$ ist.

Weil für $i > \frac{1}{2^\rho}$ leicht eine in k_1 als Teilspecies enthaltene, wenigstens einen Punkt enthaltende perfekte Punktspeeies angegeben werden kann, so gilt weiter, dass *jedes messbare Bereichkomplement positiven Inhaltes eine wenigstens einen Punkt enthaltende perfekte Teilspecies enthält.*

Seien $k' = \mathfrak{D}(M'_1, M'_2, \ldots)$ und $k'' = \mathfrak{D}(M''_1, M''_2, \ldots)$, wo jedes $M'_{\nu+1}$ zu M'_ν und jedes $M''_{\nu+1}$ zu M''_ν gehört, zwei Bereichkomplemente. Wir bezeichnen $\mathfrak{S}(M'_\nu, M''_\nu)$ mit M'''_ν und das Bereichkomplement $k''' = \mathfrak{D}(M'''_1, M'''_2, \ldots)$ als das *vereinigende Bereichkomplement* von k' und k''. Wenn k' und k'' beide messbar sind, so ist, wie sofort ersiehtlieh, auch k''' messbar. Unter dieser Annahme wählen wir für ρ eine willkürliehe positive ganze Zahl und für ν_1 eine solehe positive ganze Zahl, dass $[i'_{\nu_1+\lambda} - i'_{\nu_1}] < \frac{1}{2^{\rho+2}}$ und $[i'''_{\nu_1+\lambda} - i'''_{\nu_1}] < \frac{1}{2^{\rho+2}}$ für jedes positive λ. Sei R eine solehe zu M''_{ν_1} gehörige und M'_{ν_1} nieht berührende endliehe Quadratmenge, dass die Differenz der Inhalte von M'''_{ν_1} und $\mathfrak{S}(M'_{\nu_1}, R)$ weniger als $\frac{1}{2^{\rho+1}}$ beträgt. Wenn wir $\mathfrak{D}(M''_\nu, R)$ mit N''_ν, $\mathfrak{S}(M'_\nu, N''_\nu)$ mit N_ν und $\mathfrak{D}(N_1, N_2, \ldots)$ mit h bezeiehnen, so ist h ein sowohl in k''' wie in der Vereinigung von k' und k'' als Teilspeeies enthaltenes Bereiehkomplement, dessen Inhalt grösser als $i''' - \frac{1}{2^\rho}$ ist. Weil dieselbe Beweisführung

sieh auf eine beliebige endliche Zahl von messbaren Bereichkomplementen erweitern lässt, so sind wir zu folgendem Satz gelangt:

Die Vereinigung einer endlichen Zahl von messbaren Bereichkomplementen k', k'', . . . $k^{(m)}$ *enthält als Teilspecies ein messbares Bereichkomplement, dessen Inhalt dem Inhalte des vereinigenden Bereichkomplementes von* k', k'', . . . $k^{(m)}$ *beliebig nahe kommt.*

Wenn für eine äussere Grenzspeeies $A = \mathfrak{S}(k_1, k_2, \ldots)$ jedes k_ν messbar ist und die Inhalte i_ν der k_ν eine limitierte Folge i bilden, so heisst A *messbar* und i der *Inhalt* von A.

Sei $k^{(\nu)} = \mathfrak{D}(M_1^{(\nu)}, M_2^{(\nu)}, \ldots)$ ein für jedes ν bestimmtes messbares Bereichkomplement. Wir nehmen an, dass $M_{m+1}^{(\nu)}$ für jedes m und jedes ν zu $M_m^{(\nu)}$ gehört und dürfen weiter annehmen, dass $[i_{m+\lambda}^{(\nu)} - i_m^{(\nu)}] < \frac{1}{2^m}$ für jedes m, jedes $\nu \leq m$ und jedes positive λ. Wir bezeichnen das vereinigende Bereichkomplement $\mathfrak{D}(L_1^{(\nu)}, L_2^{(\nu)}, \ldots)$ von k', k'', . . . $k^{(\nu)}$ mit $h^{(\nu)}$ und nehmen an, dass die Inhalte $I_1, I_2, \ldots$ von h', h'', . . . eine limitierte Folge bilden. Weiter verstehen wir unter $N_m^{(\nu)}$ eine nach irgend einem Gesetz für jedes m und jedes ν bestimmte endliche Quadratmenge, welche zu $M_m^{(\nu)}$ gehört und $L_m^{(\nu-1)}$ nicht berührt, während die Differenz der Inhalte von $L_m^{(\nu)}$ und $\mathfrak{S}(L_m^{(\nu-1)}, N_m^{(\nu)})$ weniger als $\frac{1}{2^m}$ beträgt und der Durchschnitt von $N_m^{(\nu)}$ und $M_{m+1}^{(\nu)}$ für jedes m und jedes ν zu $N_{m+1}^{(\nu)}$ gehört. Wenn wir den Durchschnitt von $N_m^{(\nu)}$ und $k^{(\nu)}$ mit $p_m^{(\nu)}$ und die Vereinigung von $p'_m, p''_m, \ldots p_m^{(m)}$ mit $g^{(m)}$ bezeichnen, so sind $A_1 = \mathfrak{S}(h', h'', \ldots)$ und $A_2 = \mathfrak{S}(g', g'', \ldots)$ *zwei inhaltsgleiche äussere Grenzspecies*, von denen die erstere, welche die *vereinigende äussere Grenzspecies* der Fundamentalreihe k', k'', . . . genannt wird, die Vereinigung von k', k'', . . . als Teilspeeies enthält und die letztere in der Vereinigung von k', k'', . . . als Teilspecies enthalten ist. D. h. wir haben bewiesen:

Die Vereinigung einer Fundamentalreihe F *von messbaren Bereichkomplementen, welche die Eigenschaft besitzt, dass die Inhalte der vereinigenden Bereichkomplemente ihrer Anfangssegmente eine limitierte Folge bilden, enthält eine mit der vereinigenden äussern Grenzspecies von* F *inhaltsgleiche äussere Grenzspecies.*

Eine Fundamentalreihe F von äusseren Grenzspeeies bestimmt eine Doppelfolge von Bereichkomplementen. Wenn wir diese Doppelfolge als eine einfache Fundamentalreihe lesen, so ist einerseits die Definition der *vereinigenden äussern Grenzspecies* von F ohne weiteres klar, andererseits lässt der vorstehende Satz sieh unmittelbar wie folgt erweitern:

Die Vereinigung einer Fundamentalreihe F von messbaren äusseren Grenzspecies, welche die Eigenschaft besitzt, dass die Inhalte der vereinigenden äusseren Grenzspecies ihrer Anfangssegmente eine limitierte Folge bilden, enthält eine mit der vereinigenden äussern Grenzspecies von F inhaltsgleiche äussere Grenzspecies.

Sei $A = \mathfrak{S}(k', k'', \ldots)$, wo $k^{(\nu)} = \mathfrak{D}(M_1^{(\nu)}, M_2^{(\nu)}, \ldots)$ eine messbare äussere Grenzspecies. Wir dürfen annehmen, dass $M_m^{(\nu)}$ für jedes m und jedes ν zu $M_m^{(\nu+1)}$ gehört. Sei $i^{(\nu)}$ der Inhalt von $k^{(\nu)}$ und i der Inhalt von A. Zu jedem $k^{(\nu)}$ lässt sich dem obigen gemäss ein in $k^{(\nu)}$ als Teilspecies enthaltenes, mit der Abschliessung einer katalogisierten Punktspecies identisches messbares Bereichkomplement $h^{(\nu)} = \mathfrak{D}(L_1^{(\nu)}, L_2^{(\nu)}, \ldots)$ bestimmen, dessen Inhalt mehr als $i^{(\nu)} - \frac{1}{2^\nu}$ beträgt, wobei wir leicht dafür sorgen können, dass $L_m^{(\nu)}$ für jedes m und jedes ν zu $L_m^{(\nu+1)}$ gehört, so dass die Vereinigung von h', h'', ... eine mit A inhaltsgleiche äussere Grenzspecies darstellt. Mithin gilt der Satz:

Jede messbare äussere Grenzspecies enthält als inhaltsgleiche Teilspecies eine konsolidierte, also mit einer Punktmenge zusammenfallende äussere Grenzspecies.

Eine Punktspecies Q heisst *messbar*, wenn für jedes ganze positive ν ein solches m_ν, zwei solche endliche Mengen a'_ν und a''_ν von zur reduzierten Ebene E gehörigen Quadraten $\varkappa_{m_\nu}$ und ein solcher messbarer Bereich β_ν bestimmt sind, dass ein willkürlicher Punkt des Durchschnittes d'_ν bzw. d''_ν von a'_ν bzw. a''_ν mit dem Komplemente k_ν von β_ν zu Q gehört bzw. unmöglich zu Q gehören kann, während der Inhalt i_ν von β_ν kleiner als $\frac{1}{2^\nu}$ und die Summe der Inhalte i'_ν und i''_ν von a'_ν und a''_ν grösser als $1 - \frac{1}{2^\nu}$ ist.

Der Durchschnitt $d_{\mu\nu}$ von d'_μ und d''_ν ist ein messbares Bereichkomplement, der keinen Punkt, also erst recht keine messbare Abschliessung positiven Inhaltes einer katalogisierten Punktspecies enthalten kann, besitzt mithin für jedes μ und jedes ν den Inhalt Null. Hieraus folgern wir zunächst, dass der Durchschnitt $a_{\mu\nu}$ von a'_μ und a''_ν für jedes μ und jedes ν einen Inhalt $< \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{2^\nu}$ besitzt und sodann *erstens*, dass die mit i zu bezeichnende Folge $i'_1, i'_2, \ldots$ und die Folge $i''_1, i''_2, \ldots$ limitiert sind und eine Summe gleich 1 besitzen, *zweitens*, dass bei der vorstehenden Definition angenommen

werden darf, dass a'_ν und a''_ν kein gemeinsames Quadrat $\varkappa_{m_\nu}$ enthalten und zusammen das Quadrat E vollständig überdecken, *drittens*, dass, wenn Q in mehr als einer Weise der Messbarkeitsdefinition genügt, die entsprechenden limitierten Folgen i gleich sind. Wir bezeichnen diese limitierten Folgen als den *Inhalt* von Q.

Offenbar werden von dieser allgemeinen Inhaltsdefinition besondere Fälle geliefert durch die vorausgeschikten Definitionen des Inhaltes von messbaren Bereichen, Bereichkomplementen und äusseren Grenzspecies.

Wenn wir die Species derjenigen Punkte, welche unmöglich zu Q gehören können, mit $C(Q)$ bezeichnen, so *zieht die Messbarkeit von Q die Messbarkeit von $C(Q)$ nach sich.* Für die umgekehrte Aussage liegen keine zureichenden Gründe vor.

Zu jeder messbaren Punktspecies Q vom Inhalte i existieren zwei derartige messbare konsolidierte äussere Grenzspecies A'_Q und A''_Q der Inhalte i und $1-i$, dass ein willkürlicher Punkt von A'_Q zu Q gehört und ein willkürlicher Punkt von A''_Q unmöglich zu Q gehören kann.

Zum Beweise dieses Satzes bezeichnen wir $\mathfrak{S}(\beta_\nu, \beta_{\nu+1}, \ldots)$ mit β°_ν, das Komplement von β°_ν mit k°_ν, $\mathfrak{D}(a'_\nu, k^\circ_\nu)$ mit e_ν, $\mathfrak{D}(a'_\nu, a'_{\nu+1}, \ldots)$ mit f_ν, $\mathfrak{D}(e_\nu, f_\nu)$ mit b_ν. Alsdann ist β°_ν ein messbarer Bereich, dessen Inhalt i°_ν kleiner als $\frac{1}{2^{\nu-1}}$ ist. Weiter ist der Durchschnitt von k°_ν mit einem willkürlichen Quadrate $\varkappa$, das von a'_ν überdeckt wird, aber für irgend ein positives λ von $\mathfrak{D}(a'_\nu, a'_{\nu+1}, \ldots a'_{\nu+\lambda})$ weder ganz noch teilweise überdeckt wird, ein messbares Bereichkomplement, das keinen Punkt enthalten kann, mithin den Inhalt Null besitzt. Hieraus folgt, dass nicht nur e_ν, sondern auch b_ν ein messbares Bereichkomplement ist, während e_ν und b_ν gleiche Inhalte besitzen, so dass der Inhalt von b_ν grösser als $i'_\nu - \frac{1}{2^{\nu-1}}$ ist. Die äussere Grenzspecies $\mathfrak{S}(b_1, b_2, \ldots)$ ist somit messbar, besitzt den Inhalt i und enthält eine messbare konsolidierte äussere Grenzspecies A'_Q vom Inhalt i als Teilspecies. Genau analog wird A''_Q bestimmt.

Punktspecies der geforderten Art können auch wie folgt hergestellt werden: Der Durchschnitt eines willkürlichen Quadrates $\varkappa$, das von a'_ν weder ganz noch teilweise überdeckt wird aber für irgend ein positives λ von $a'_{\nu+\lambda}$ überdeckt wird, mit dem Komplement von $\mathfrak{S}(\beta_\nu, \beta_{\nu+\lambda})$ ist ein messbares Bereichkomplement, das keinen Punkt enthalten kann, mithin den Inhalt Null besitzt, so

dass die Differenz der Inhalte von a'_ν und $\mathfrak{S}(a'_\nu, a'_{\nu+1})$ kleiner als $\frac{1}{2^{\nu-1}}$ und die Differenz der Inhalte von d'_ν und dem vereinigenden Bereichkomplemente von d'_ν und $d'_{\nu+1}$ kleiner als $\frac{1}{2^{\nu-2}}$ ist. Weil mithin die Inhalte der vereinigenden Bereichkomplemente der Anfangssegmente der Fundamentalreihe von messbaren Bereichkomplementen $d'_1, d'_2, \ldots$ eine limitierte Folge bilden, so kann eine in $\mathfrak{S}(d'_1, d'_2, \ldots)$ enthaltene, mit der vereinigenden äussern Grenzspecies von $d'_1, d'_2, \ldots$ inhaltsgleiche, messbare konsolidierte äussere Grenzspecies A'_Q bestimmt werden. Der Inhalt $^\circ i'$ von A'_Q kann nicht $< i$ sein. In analoger Weise konstruieren wir eine in $\mathfrak{S}(d''_1, d''_2, \ldots)$ enthaltene, mit der vereinigenden äussern Grenzspecies von $d''_1, d''_2, \ldots$ inhaltsgleiche, messbare konsolidierte äussere Grenzspecies A''_Q, deren Inhalt $^\circ i''$ nicht $< 1-i$ sein kann. Wenn nun $^\circ i' + {}^\circ i'' > 1$ wäre, so würde ein messbares Bereichkomplement positiven Inhaltes existieren, das sowohl zu A'_Q wie zu A''_Q gehörte, von dem mithin ein willkürlicher Punkt einerseits zu Q gehörte, andererseits unmöglich zu Q gehören könnte. Aus diesem Widerspruche folgt also, dass $^\circ i' = i$ und $^\circ i'' = 1-i$ ist.

Umgekehrt folgt aus der Definition der Messbarkeit in ihrer ursprünglichen Form unmittelbar: *Wenn zu einer Punktspecies Q zwei derartige messbare äussere Grenzspecies A'_Q und A''_Q der Inhalte i und $1-i$ existieren, dass ein willkürlicher Punkt von A'_Q zu Q gehört und ein willkürlicher Punkt von A''_Q unmöglich zu Q gehören kann, so ist Q messbar und besitzt den Inhalt i.*

Seien ${}_1Q$ und ${}_2Q$ zwei messbare Punktspecies. Sei ${}_3a''_\nu$ der Durchschnitt von ${}_1a''_\nu$ und ${}_2a''_\nu$, b'_ν eine solche zu ${}_2a'_\nu$ gehörige und ${}_1a'_\nu$ nicht berührende endliche Quadratmenge, dass die Differenz der Inhalte von $\mathfrak{S}({}_1a'_\nu, {}_2a'_\nu)$ und ${}_3a'_\nu = \mathfrak{S}({}_1a'_\nu, b'_\nu)$ weniger als $\frac{1}{2^\nu}$ beträgt, ${}_3\beta_\nu$ die Vereinigung von ${}_1\beta_\nu$ und ${}_2\beta_\nu$, ${}_3k_\nu$ das Komplement von ${}_3\beta_\nu$. Alsdann ist der Inhalt ${}_3i_\nu$ von ${}_3\beta_\nu$ kleiner als $\frac{1}{2^{\nu-1}}$ und die Summe der Inhalte ${}_3i'_\nu$ und ${}_3i'''_\nu$ von ${}_3a'_\nu$ und ${}_3a''_\nu$ grösser als $1 - \frac{1}{2^\nu}$, während ein willkürlicher Punkt des Durchschnittes ${}_3d'_\nu$ bzw. ${}_3d''_\nu$ von ${}_3a'_\nu$ bzw. ${}_3a''_\nu$ mit ${}_3k_\nu$ zu $\mathfrak{S}({}_1Q, {}_2Q)$ gehört bzw. unmöglich zu $\mathfrak{S}({}_1Q, {}_2Q)$ gehören kann. Hieraus folgt auf Grund der Messbarkeitsdefinition in ihrer ursprünglichen Form, dass auch $\mathfrak{S}({}_1Q, {}_2Q)$ messbar ist. Mithin gilt der Satz:

Die Vereinigung einer endlichen Zahl von messbaren Punktspecies ist wiederum eine messbare Punktspecies.

In analoger Weise wird bewiesen:

Der Durchschnitt einer endlichen Zahl von messbaren Punktspecies ist wiederum eine messbare Punktspecies.

Im Falle der Vereinigung zweier elementefremder messbarer Punktspecies ${}_1Q$ und ${}_2Q$ kann der Inhalt des Durchschnittes von ${}_1a'_\nu$ und ${}_2a'_\nu$ nicht grösser als $\frac{1}{2^{\nu-1}}$, mithin ${}_3i''_\nu$ nicht kleiner als ${}_1i''_\nu + {}_2i''_\nu - \frac{1}{2^{\nu-2}}$ sein. Weil somit ${}_3i''_1, {}_3i''_2, \ldots$ und ${}_1i''_1 + {}_2i''_1, {}_1i''_2 + {}_2i''_2, \ldots$ gleiche limitierte Folgen sind, so besteht der Satz:

Der Inhalt der Vereinigung einer endlichen Zahl von elementefremden messbaren Punktspecies $Q', Q'', \ldots Q^{(n)}$ ist gleich der Summe der Inhalte von $Q', Q'', \ldots Q^{(n)}$.

Im Falle des Durchschnittes von ${}_1Q$ und ${}_2Q = C(T)$, wo T eine messbare Teilspecies von ${}_1Q$ ist, können wir dafür sorgen, dass jeder Punkt von ${}_2d''_\nu$ zu T gehört. Als dann kann der Inhalt des nicht von ${}_1a'_\nu$ überdeckten Teiles von ${}_2a''_\nu$ nicht grösser als $\frac{1}{2^{\nu-1}}$, mithin ${}_3i''_\nu$ nicht grösser als ${}_1i''_\nu - {}_2i''_\nu + \frac{1}{2^{\nu-1}}$ und nicht kleiner als ${}_1i''_\nu - {}_2i''_\nu$ sein. Hieraus folgt, dass ${}_3i'_1, {}_3i'_2, \ldots$ und ${}_1i'_1 - {}_2i''_1, {}_1i'_2 - {}_2i''_2, \ldots$ gleiche limitierte Folgen sind. Wenn wir mithin die Species derjenigen Punkte von ${}_1Q$, welche unmöglich zu T gehören können, als die *Differenz* von ${}_1Q$ und T bezeichnen, so besteht die Eigenschaft:

Wenn die messbare Punktspecies Q'' eine Teilspecies der messbaren Punktspecies Q' ist, so ist auch die Differenz von Q' und Q'' messbar und ihr Inhalt gleich der Differenz der Inhalte von Q' und Q''.

Sei ${}_1Q, {}_2Q, \ldots$ eine solche Fundamentalreihe von messbaren Punktspecies, dass die Inhalte ${}^1i, {}^2i, {}^3i, \ldots$ von ${}^1Q = {}_1Q$, ${}^2Q = \mathfrak{S}({}_1Q, {}_2Q)$, ${}^3Q = \mathfrak{S}({}_1Q, {}_2Q, {}_3Q), \ldots$ eine limitierte Folge i bilden. Wir bezeichnen $\mathfrak{S}({}_1Q, {}_2Q, \ldots)$ mit ${}^\omega Q$, die Vereinigung derjenigen ${}_\nu a'_n$, für welche $\nu = 1, 2, \ldots m$ und $n = p + \nu, p + \nu + 1, \ldots p + \nu + m - 1$, mit ${}^{mp}a'$, den Durchschnitt derjenigen ${}_\nu a_n''$, für welche $\nu = 1, 2, \ldots m$ und $n = p + \nu, p + \nu + 1, \ldots p + \nu + m - 1$, mit ${}^{mp}a''$, das vereinigende Bereichkomplement derjenigen ${}_\nu d'_n$, für welche $\nu = 1, 2, \ldots m$ und $n = p + \nu, \ldots p + \nu + m - 1$, mit ${}^{mp}d'$. Wenn ${}^m i > i - \frac{1}{2^{\mu+1}}$ und $p + m \geq \mu + 2$, so ist der Inhalt des vereinigenden Bereichkomplementes von ${}_1d'_{p+m}, {}_2d'_{p+m+1}, \ldots {}_m d'_{p+2m-1}$, also erst recht der

Inhalt ${}^{m_p p}i'$ von ${}^{m_p p}d'$ grösser als $i - \frac{1}{2^p}$. Andererseits würde für ${}^{m_p p}i' > i$ in ${}^{m}Q$ ein messbares Bereichkomplement mit einem Inhalt grösser als i enthalten sein, was unmöglich ist. Mithin bilden für jedes p die Inhalte ${}^{1p}i'$, ${}^{2p}i'$, ... eine limitierte Folge, welche gleich i ist.

Hieraus folgt, dass für jedes p auch die Inhalte von ${}^{1p}a'$, ${}^{2p}a'$, ..., sowie die Inhalte von ${}^{1p}a''$, ${}^{2p}a''$, ... limitierte Folgen bilden, so dass zu jedem p ein solches m_p und ein solcher messbarer Bereich ${}^{p}\beta''$ mit einem Inhalt kleiner als $\frac{1}{2^p}$ bestimmt werden kann, dass jeder Punkt des Durchschnittes von ${}^{m_p p}a''$ mit dem Komplement ${}^{p}k''$ von ${}^{p}\beta''$ zu $\mathfrak{D}_{\nu=1,n>p+\nu} {}_{\nu}a_n''$ gehört. Wenn wir weiter $\mathfrak{S}_{\nu\geq 1,n>p+\nu} {}_{\nu}\beta_n$ mit ${}^{p}\beta'$ und $\mathfrak{S}({}^{p}\beta', {}^{p}\beta'')$ mit ${}^{p}\beta$ bezeichnen, so ist der Inhalt von ${}^{p}\beta'$ kleiner als $\frac{1}{2^{p-1}}$, der Inhalt von ${}^{p}\beta$ also kleiner als $\frac{1}{2^{p-2}}$.

Weiter kann zu jedem p eine solche zu ${}^{m_p p}a'$ gehörige endliche Quadratmenge ${}^{m_p p}a'_0$ bestimmt werden, dass die Differenz der Inhalte von ${}^{m_p p}a'$ und ${}^{m_p p}a'_0$ weniger als $\frac{1}{2^{p-2}}$ beträgt und ein willkürlicher Punkt des Durchschnittes von ${}^{m_p p}a'_0$ mit dem Komplement ${}^{p}k'$ von ${}^{p}\beta'$ zu ${}^{m_p}Q$ gehört.

Nunmehr sind für ${}^{\omega}Q$ alle Messbarkeitsbedingungen erfüllt, denn für jedes $p = 2$ sind ein solches ${}^{m_p p}a_0'$, ein solches ${}^{m_p p}a''$ und ein solches ${}^{p}\beta$ bestimmt, dass ein willkürlicher Punkt des Durchschnittes von ${}^{m_p p}a_0'$ bzw. ${}^{m_p p}a''$ mit dem Komplemente ${}^{p}k$ von ${}^{p}\beta$ zu ${}^{\omega}Q$ gehört bzw. unmöglich zu ${}^{\omega}Q$ gehören kann, während der Inhalt von ${}^{p}\beta$ kleiner als $\frac{1}{2^{p-2}}$ und die Summe der Inhalte von ${}^{m_p p}a_0'$ und ${}^{m_p p}a''$ grösser als $1 - \frac{1}{2^{p-2}}$ ist. Wir sind also zu folgendem Resultat gelangt:

Wenn F eine solche Fundamentalreihe von messbaren Punktspecies ist, dass die Inhalte der Vereinigungen ihrer Anfangssegmente eine limitierte Folge i bilden, so ist auch die Vereinigung von F messbar und ihr Inhalt gleich i.

In analoger Weise wird bewiesen:

Wenn F eine solche Fundamentalreihe von messbaren Punktspecies ist, dass die Inhalte der Durchschnitte ihrer Anfangssegmente eine limitierte Folge i bilden, so ist auch der Durchschnitt von F messbar und sein Inhalt gleich i.

Berichtigungen zum ersten Teile.

S. 3, Z. 19 v. u.: statt „für jedes n" lies „für jedes $n > 1$"
S. 3, Z. 15 v. u.: statt „von der Menge" lies „von einer unbegrenzten Wahlfolge"
S. 5, Z. 20 v. u.: statt „eines gewissen" lies „eines gewissen eventuell fortfallenden"
S. 8, Z. 10: statt „von Quadraten" lies „von einander nicht überdeckenden Quadraten"
S. 34, Z. 9 v. u.: statt „$\dot{\geq}$" lies „$\dot{>}$ (und gleichzeitig $\dot{\leq}$)"
S. 40, Z. 12 v. u.: statt „$\dot{\geq}$" lies „$\dot{\geq}$ (und gleichzeitig $\dot{\leq}$)"

CALIF ACAD OF SCIENCES LIBRARY
3 1853 10007 6319

GEDRUKT BIJ
JOH. ENSCHEDÉ EN ZONEN
HAARLEM